韓國數學敎育學會誌〈數學敎育〉
1976. 6. Vol. XIV No. 2

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Jun. 1976. Vol. XIV No. 2

第四次 美國 數學 올림피아드

서울大學校 師範大學 李 載 學

이제 네번째 해를 맞는 「미국 수학 올림피아드」는 그 반응으로 판단해 보건데 전세계의 중등 敎育에서 바람직한 위치를 點有했다고 하겠으며, 特히 올해에는 各 學校를 代表한 優秀한 수학도의 추천이 눈에 띄게 증가했다. 그러나 「올림피아드」에의 참가는 단지 초청에 의해서만 可能할 뿐이다. 今年에도 例年과 같이 大多數의 學生들은 Annual High School Mathematics Examination의 結果에 근거를 두어서 選擇되어졌으며, 前과 마찬가지로 Michigan과 Wsiconsin 주의 몇 몇 學生들이 招請되어졌다. (이들 州에서는 Annual High School Mathematics Examination에 참가하지 않고 그 州自體의 試驗이 있다). 그리고 極小數의 主任敎師의 추천을 받은 地方學校 學生들도 올해에는 招請되어졌다. 그리하여 모두 112名의 學生들이 參加하도록 要請되었으며, 最終的으로 103名이5月 6日「올림피아드」에 참가했다. 終前과 같이 「올림피아드」問題는 數學的인 才能과 解決力을 要求하는 essay 形態의 5問題로 構成되었으며, 3時의 制限時間이 주어졌다. 모든 答案紙는 5월 19일까지 Rutgers 大學의 數學敎授 委員會에 의해서 채점이 되었으며, 上位 30名의 답안지는 Memphis 州立大學에서 다시 등급이 매겨 졌으며 이는 아래 表 1에 表示되어 있다.

—표 1—

「올림피아드」에 참가한 학생들의 「올림피아드」 성적과 A.H.S.M.Exam.의 점수 비교

올림피아드 / A.H.S.M.Exam.	0	1-10	11-20	21-30	31-40	41-50	51-60	61-70	71-80	81-90
131-140		2	1		1	1				1
121-130	1	2		1	4	2	1			
111-120	1	6	4	9	2		1			
101-110	3	17	9	8	8	1		2		
기 타		3	6	3	1		2			
합 계	5	30	20	21	16	4	4	2		1

上位 8名中 7名이 表 1의 오른편 난에 表示된 點數를 받았다. 그런데 A.H.S.M.Exam. 에서 받은 점수와 「올림피아드」에서 얻은 점수와의 分散은 상당히 컸으며, 기타난의 오른편난에 표시된 學生은 둘다 그들의 主任敎師로부터 强力히 추천된 학생이었다. 表1에 나

타난 바와 같이 「올림피아드」와 A.H. S.M. Exami.의 점수 사이에는 상관관계가 거의 없다.

—표 2—

올림피아드시험에 응시한 103명의 성적
(문제별 점수와 총점)

총점 \ 문제번호	1	2	3	4	5
21-25	1	3	1		4
16-20	1	16	3	6	23
11-15	3	4	1	3	6
6-10	15	2	1	11	7
1-5	52	37	30	9	24
0	31	41	67	74	39

위의 表 2에는 各問題에 對한 참가자들의 점수가 表示되어 있다. 그런데 작년에도 이와 類似한 表가 주어졌으나, 어떤 놀라움의 反應도 없었던 것으로 보아 아마도 좀더 상세한 言及이 必要한 것 같다. 筆者는 이 表가 굉장한 留意點을 갖고 있으며, 敎師들에 대한 硏究方向을 시사하고 있다고 믿는다. 例를 들면, 各問題를 調査하여 數學의 어떤 分野가 그 問題과 관련이 있는지를 알아보고, 各問題의 點數도 비교를 해 본다. 0점과 5점 사이의 점수가 왜 그렇게 많은가? 또한 各問題가 數學에 있어서 學生들의 未來의 訓練에 어떤 영향을 미치는 기술적인 面을 포함하고 있는가? 지금 强調를 하고 있는 部分이 아닌 다른 곳에 강조를 둘 수 있다는 것을 시사하고 있는 점은 없는지? 등…, 敎師들은 이러한 물음과 아울러 表2의 硏究에서 나올 수 있는 더욱 많은 質問들을 스스로에게 反問해야만 한다. 여하튼 筆者로서는 讀者들로부터 表 1, 2의 硏究에서 얻은 어떤 結論이나 「올림피아드」의 문제에 관한 意見과 시사점들을 듣고싶다.

第四次 美國數學 올림피아드 (1975. 5. 6.)

1. (a) 다음을 증명하여라.

$$[5x]+[5y]\geq[3x+y]+[3y+x]$$

단 $x, y\geq 0$ 이고 $[u]$는 u를 넘지 않는 最大整數이다.

(b) (a)를 이용하여 다음 식이 모든 陽의 整數 m, n에 대하여 整數가 됨을 證明하여라.

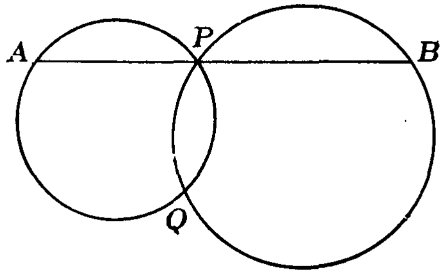
$$\frac{(5m)!\,(5n)!}{m!\,n!\,(3m+n)!\,(3n+m)!}$$

2. A, B, C, D가 空間上의 4點을, AB가 A와 B 사이의 거리를 나타낼 때 다음을 證明하여라.

$$AC^2+BD^2+AD^2+BC^2\geq AB^2+CD^2$$

3. $P(x)$가 $k=0, 1, 2, \cdots\cdots, n$에 對하여 $P(k)=\frac{k}{k+1}$가 成立하는 n次 多項式을 나타낼 때, $P(n+1)$을 구하여라.

4. 두 점 P, Q에서 만나는 두 원이 있다. P點을 지나는 線分 AB가 두 원과 만나면서 $AP\cdot PB$를 最大로 할 때 이 선분 AB를 어떻게 구하는지를 보여라.



5. 석장의 에이스를 포함한 N장의 카드를 잘 섞어서 맨 위부터 한 장씩 뽑는 일을 두 번째 에이스가 나타날 때까지 계속한다. 이 때 뽑혀진 카드장수의 기대값이 $\frac{N+1}{2}$이 됨을 증명하여라. 단, 여기서 잘 섞는다 함은 모든 종류의 카드의 분포가 均一함을 意味한다.

最終上位 8名은 6月 5日 Washington D.C. 에서 있은 기념식에서 수상을 했다. 여기에는 國立科學院의 紀念式, 國務省의 John Quincy Adams Room에서의 리셉션, 그리고 Thomas Jefferson Room에서의 만찬이 있었는데, 이는 例年과 같이 I.B.M.의 도움으로 可能케 된 것이었다. 學生들에게 주는 賞가운데는 I.B.M.에서 주는 銀메달과 Hewlett-Packard 會社에서 주는 H.P-35 計算機, 그리고 美國數學協議會와 國立數學教師 評議會에서 주는 冊 등이 있었다.

「올림피아드」委員會는 第四次 「올림피아드」를 可能케 한 많은 各 個人과 기관의 協調와 지지를 매우 감사히 생각한다. 「올림피아드」의 問題는 Murray Klamkin, C. C. Rousseau, 와 Tom Griffiths로 構成된 委員會에 의하여 準備되었으며 Annual High School Mathematics Examination 委員會(New York 大學校의 R. Artino, A. Gaglione, N. Shilkret로 構成되었음)가 「올림피아드」에 참가할 學生들을 選出하고 招請하는데 必要한 資料를 提供했다. 또한 答案紙는 Rutgers 大學校의 數學教授團에 의해서 채점되었으며 上位 30名의 답안지는 Memphis 州立大學校의 Cecil C. Rousseau에 의해 다시 分類되었다.

(註: 1975年 NCTM 9月 뉴우스레터에 보고된 바와같이, 美國은 1975年 9月 불가리아의 Burgas에서 開催된 第17次 國際 數學競試大會에 참가하도록 초청되어, 다른 20개國家들과 경쟁하여 3位를 차지하였다. 上位 5個國을 順序대로 쓰면 헝가리, 東獨, 美國, 쏘련, 英國이다. 美國은 國際競試大會에는 단지 2年 참가를 했을 뿐이며, 昨年에는 쏘련 다음으로 2위를 차지했었다. 第五次 美國數學 「올림피아드」는 76年5月 4日에 開催될 豫定이다.)

〈올림피아드 수학문제 풀이〉

1. (a) $x=x_0+x_1$ $y=y_0+y_1$(단 x_1, y_1은 음수가 아닌 정수이고, $0\leq x_0$, $y_0<1$)이라 하자, 그러면 주어진 부등식은 $x_1+y_1+[5x_0]+[5y_0]\geqq[3x_0+y_0]+[3y_0+x_0]$가 된다. 여기서 $0<x_0$, $y_0<1$인 경우 이 부등식이 成立함을 보이면 된다($y_0=0$인 경우는 分明하다). 一般性을 잃지 않고 $x_0\geqq y_0$라 할 수 있다. 따라서 윗식은 $[5x_0]-[3x_0+y_0]\geqq[3y_0+x_0]-[5y_0]$으로 바꿀 수 있으며 $3y_0+x_0\leqq 5y_0$인 경우, 쉽게 滿足됨을 알 수 있다. 이제 $x_0>2y_0$인 경우만을 증명하면 된다.

$5x_0=a+b$, $5y_0=c+d$(단 a, c는 정수, $0\leqq b$, $d<1$)이라 하면 윗식은 $a+c\geqq\left[\frac{3a+c+3b+d}{5}\right]+\left[\frac{3c+a+3d+b}{5}\right]$

(1) $a+c\geqq\left[\frac{3a+c-4^-}{5}\right]^*+\left[\frac{3c+a+4^-}{5}\right]$ (* $3a+c+4^-$는 $3a+c+4$보다 작은 數를 나타낸다). 그런데 $1>x_0>2y_0$이므로 $4\geqq a\geqq 2c$가 된다. 따라서 아래의 경우 (1)의 식을 滿足시키는가를 보이면 된다.

a	4	4	4	3	3	2	2	1
c	2	1	0	1	0	1	0	0

(b) m!을 나누는 素數 P의 최고멱은 $\left[\frac{m}{p}\right]+\left[\frac{m}{p^2}\right]+\cdots\cdots$이므로 $\left[\frac{5m}{r}\right]+\left[\frac{5n}{r}\right]\geqq\left[\frac{m}{r}\right]+\left[\frac{n}{r}\right]+\left[\frac{3m+n}{r}\right]+\left[\frac{3n+m}{r}\right]$이 임의의 정수 $r\geqq 2$에 대하여 成立함을 보이면 된다. $m=rm_1+x$, $n=rn_1+y$ ($0\leqq x$, $y<r$, m_1, n_1은 정수)라 하면 윗식은 $\left[\frac{5x}{r}\right]+\left[\frac{5y}{r}\right]\geqq\left[\frac{3x+y}{r}\right]+\left[\frac{3y+x}{r}\right]$가 되며 이는 (a)에 의해서 분명히 성립한다.

2. 空間에서의 4點의 座標를 各各 (x_i, y_i, z_i), $i=1, 2, 3, 4$라 하면 $(x_1-x_3)^2+(x_2-x_4)^2+(x_1-x_4)^2+(x_2-x_3)^2\geqq(x_1-x_2)^2+(x_3-x_4)^2$임을 證明하면 된다. 그런데 이 부등식은 $(x_1+x_2-x_3-x_4)^2\geqq 0$과 같으므로 分明히 成立한다. 단 等號는 4點이 평행사변형을 이룰 때 성립한다.

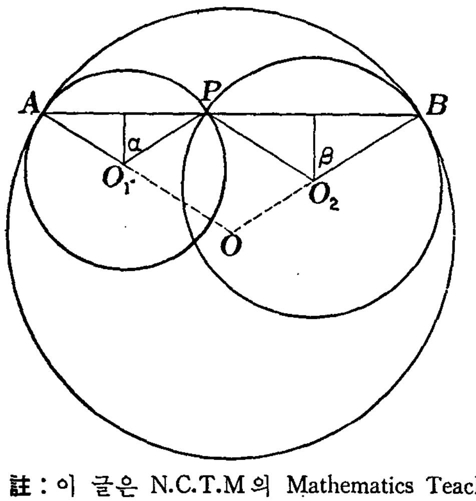
3. $Q(x)=(x+1)P(x)-x$라 하면 $x=0, 1, 2, \cdots, n$에 대하여 $Q(x)=0$이므로, $(x+1)P(x)-x=Ax(x-1)\cdots(x-n)$이 된다. A를 알기 위하여

$x=-1$을 代入하면 $1=A(-1)^n(n+1)!$. 따라서

$$P(x)=\frac{\{(-1)^{n+1}x(x-1)\cdots(x-n)/(n+1)!\}+x}{(x+1)}$$

$$\therefore\ P(n+1)=\begin{cases}1 : \text{n이 홀수}\\ \dfrac{n}{n+2} : \text{n이 짝수}\end{cases}$$

4. 點 Q를 포함하는 원의 모든 현 CD에 대하여 CQ·QD는 항상 일정하므로, P와 共直線上의 點 A, B에서 주어진 두 원과 만나는 最大원을 구하면 된다. 이 최대원은 주어진 두 원과 接하게 될 것이다. 결과적으로 $\overleftrightarrow{AO_1}$, $\overleftrightarrow{BO_2}$는 이 최대원의 中心에서 만나야만 한다. 점 A, B는 O_1, O_2를 지나고 PO_2와 PO_1과 各各 平行한 直線을 그림으로써 얻어진다. 그렇게 되면 A, P, B는 共直線上에 있다. 이때 어떠한 다른 현 A'PB' 도 이 최대원의 內部에 있게 됨을 알아보라. 따라서 $A'P\times PB'<AP\times PB$이다.



〈別解〉

$AP=2\gamma_1\sin\alpha,\ \ PB=2\gamma_2\sin\beta$

$AP\times PC=4\gamma_1\gamma_2\sin\alpha\sin\beta$

따라서 $AP\times PB$가 최대가 되려면 $\sin\alpha\sin\beta$가 최대이면 된다. $\sin\alpha\sin\beta$는 $\alpha=\beta$일 때 최대가 된다. 왜냐하면 $\angle O_1PO_2$는 일정, $\alpha+m\angle O_1PO_2+\beta=\pi$이므로 $\alpha+\beta=\pi-m\angle O_1PO_2$, 따라서 $\alpha+\beta$도 일정하게 된다. $\alpha+\beta=c$라 하면 $2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$

$\therefore\ 2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos c$

$\therefore\ 2\sin\alpha\sin\beta$는 $\cos(\alpha-\beta)=1$일 때 최대가 된다.

$\alpha=\beta$는 $\overline{AO_1}/\!/\overline{PO_2}$, $\overline{BO_2}/\!/\overline{PO_1}$임을 뜻한다. $\overline{AO_1}$과 $\overline{BO_2}$의 交點은 주어진 두 원에 接하는 원의 중심 O가 된다. 여기서 AO=BO이며, A, P, B가 共直線上에 있음을 알아보라.

5. 카드를 잘 섞었을 때, 석장의 에이스의 위치를 x_1, x_2, x_3라 하자. 이때 다른 可能한 섞는 方法은 먼저번 섞는 方法의 역순이 된다. 이때의 두 번째 에이스의 위치를 x_2'이라 하면 $x_2'=N+1-x_2$이다. 따라서 N이 홀수이거나 짝수이거나 상관없이 x_2의 평균위치는 $\frac{(x_2+(N+1-x_2))}{2}=\frac{N+1}{2}$ 이다.

註 : 이 글은 N.C.T.M의 Mathematics Teacher (Jan. 1976)에 있는 The Fourth U. S. A Mathematics Olympiad(Samuel L. Greitzer, Rutgers University Newark, New Jersey)의 飜譯이다.