韓國數學敎育學會誌〈數學敎育〉
1976. 6. Vol. XIV No.2

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Jun. 1976. Vol. XIV No. 2

e 및 π의 초월성과 고등학교에서 초월수의 지도

〔The transcendency of e and π, and the teaching method of transcendental number in high school〕

충북대학 강사 김 태 성

§1. 서 론

복소수체계 내에서 수집합의 대수적 구조와, 초등초월함수의 성질을 고등학교에서 지도하도록 되어 있으나, 초월수의 개념은 교과 과정에서 피하고 있다. 부진근수만이 무리수인 것으로 오해하거나, π, e 등을 초월수로 지도받은 학생들이 초월수가 무리수의 부분 집합으로 잘못 이해하는 일이 자주 일어난다. 이 논문에서는 e와 π의 초월성을 비교적 평이한 방법으로 설명하여 고등학교에서 초월수의 지도를 시도해 보고자 한다.

§2. 초월수의 정의

정의 1. 집합 D가 자연수의 집합 N과 동등집합일 때 D를 가부번집합이라 하며, 그 농도는 $\aleph_0$(Alef-Zero)라 한다.

정의 2. $a_0, a_1, a_2 \cdots a_n$이 정수일 때 대수방정식 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n=0$을 만족하는 수 x를 대수적 수라 한다.

정리 1. 대수적 수의 집합은 가부번집합이다.

<증명>

$$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_mx^m\cdots(1)$$

을 정수계수 다항식이라 하고, P를 모든 정수계수 다항식의 집합이라 하자. (1)에서 차수가 m이고, $|a_0|+|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|=n$인 것을 $P_{(n,m)}$이라 놓으면 $P_{(n,m)}$은 유한이다. 그러므로

$$P=\cup_{i\in N\times N}P_i$$

이다. 또 P는 countable sets의 countable family이므로 countable이다. 따라서 P는 유한은 아니나 가부번집합이다.

또 E를 $p(x)=0$의 집합이라면 E는 가부번이다. 즉,

$$E=\{p_1(x)=0,\ p_2(x)=0,\ p_3(x)=0\cdots\}$$

$A_i=\{x|x \text{ is a solution of } p_i(x)=0\}$으로 정의하면 n차 방정식의 근은 n개이므로 각 A_i는 유한이다.

$$A=\cup_{i\in N}A_i$$

라면 A도 P와 마찬가지로 유한은 아니지만 가부번집합이다.

따라서 대수적수의 집합은 가부번집합이다.

정리 2. 단위구간 〔0, 1〕의 모든 실수는 가부번집합이 아니다.

<증명> 이 정리는 Cantor의 대각선 증명방법으로 쉽게 증명된다. 따라서 모든 복소수 집합 안에는 대수적 수가 아닌 수의 존재를 확인할 수 있고 초월수의 다음과 같은 정의를 얻을 수 있다.

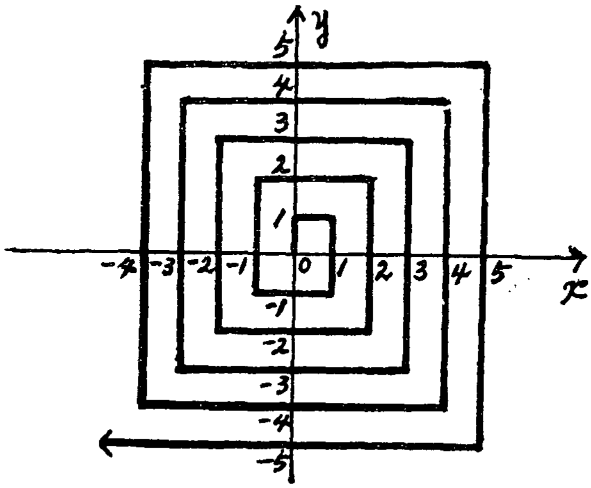
정의 : 대수적 수가 아닌 복소수를 초월수라 한다.

§3. 초월수의 도입

현 교과 과정에서는 중학교에서부터 1-1 대응관계를 지도하고 있다. 즉 수와 수직선상의 점, 순서쌍 (a, b)와 평면 위의 점, 순서쌍 (a, b, c)와 공간상의 점들이 1-1 대응을 하고 있다는 것이다. 이 지식을 통하여 정수 및 유리수의 집합이 가부번집합임을 알 수 있다. 즉 함수

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}\,(\text{odd}) \\ \dfrac{x}{2}\,(\text{even}) \end{cases}$$ 을 이용하면

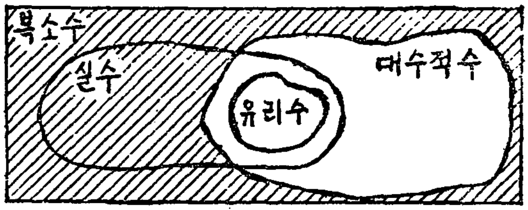
$f(1)=0,\ f(2)=1,\ f(3)=-1,\ f(4)=2\cdots\cdots$로서 모든 정수의 집합이 가부번임을 설명할 수 있다. 또 아래의 Graph를 이용하면 점 (m, n)에 유리수 $\frac{m}{n}$ 을 대응하면서 원점으로부터 시작



하여 모든 점에 번호를 정해 갈 수 있다. 이는 모든 유리수의 집합은 가부 번이라는 이야기가 된다. 이 때 $\frac{0}{0}$, $\frac{m}{0}$ 및 기약인 분수는 뛰어 넘으면 될 것이다. 또 대수적 수의 정의에 따라 유리수 전체의 집합과 $a+b\sqrt{2}$ 및 $a+b\sqrt{2}\,i$ $(a, b$: 유리수$)$인 모양의 수들이 대수적 수임을 쉽게 지도할 수 있다. 정리 1에 의하여 대수적 수의 집합은 가부번집합이고 원소의 갯수는 자연수집합의 원소의 갯수와 같음을 알 수 있다. 즉 그 농도가 $\aleph_0$이다. 그러나 정리 2에 따라 복소수집합은 가부번집합이 아니므로 그농도가 $\aleph_0$보다 크다. 즉 복소수집합 안에는 대수적인 수 이외의 것이 있음을 지도할 수 있고, 그 수를 초월수로 정의할 수 있다. 수 체계와 초월수 관계를 그림으로 나타내면 위와 같다. 즉, 사선을 친 부분이 초월수의 집합이 되겠다. 여기서

$A=\{x\,|\,x$는 무리수$\}$
$T=\{y\,|\,y$는 초월수$\}$
$S=\{\pi, e\}$

라 놓으면 $S\subset A$ and $S\subset T$ 이므로 $S\subset A\cap B$ 임도 설명할 수 있다.



§4. e 및 π의 초월성

1. e의 초월성

(1) e에 의한 식변형

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^\nu}{\nu!}\cdots$$

에서 양변에 $\nu!$을 곱하면

$$\nu!e^x=\nu!+\frac{\nu!}{1!}x+\frac{\nu!}{2!}x^2+\cdots+\frac{\nu!}{(\nu-1)!}x^{\nu-1}$$
$$+u_\nu(x)+\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

여기서

$$u_\nu(x)=x^\nu+\frac{xc^{+1}}{\nu+1}+\frac{x^{\nu+2}}{(\nu+1)(\nu+2)}+\cdots\cdots ②$$

$f(x)$의 n차 도함수를 $D_nf(x)$라 하면

$$\nu!e^x=D_\nu x^\nu+D_{\nu-1}x^\nu+\cdots+D_1x^\nu+u_\nu(x)+\cdots\cdots ③$$
$$=\sum_{s=1}^{\nu}D_sx^\nu+u_\nu(x)$$

③에서
$$1!e^x=D_1x^1+D_2x^1+D_3x^1+\cdots\cdots$$
$$+D_mx^1+u_1(x)$$
$$2!e^x=D_1x^2+D_2x^2+D_3x^2+\cdots\cdots$$
$$+D_mx^2+u_2(x)$$
$$3!e^x=D_1x^3+D_2x^3+D_3x^3+\cdots\cdots$$
$$+D_mx^3+u_3(x)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$m!e^x=D_1x^m+D_2x^m+D_2x^m+\cdots\cdots$$
$$+D_mx^m+u_m(x)$$

윗 식의 양변에 $r_1, r_2, \cdots r_m$을 각각 곱하여 더하면 (이때 $D_sx^t\ (m\geqq s>t)=0$)

$$e^x(r_1\cdot 1!+r_2\cdot 2!+r_3\cdot 3!+\cdots+r_m\cdot m!)=\sum_{s=1}^{m}D_s(r_1x$$

$+r_2x^2+\cdots+r_mx^m)+u_1(x)\cdot r_1+u_2(x)\cdot r_2++u_m(x)\cdot r_m$ ………………………④

④에서 $r_1x+r_2x^2+r_3x^3+\cdots+r_mx^m=\varphi(x)$로 놓으면 $\varphi(x)$는 $\varphi(0)=0$이 될 수 있는 임의의 다항식이므로

$$\sum_{s=1}^{m}D_s(r_1x+r_2x^2+r_3x^3+\cdots+r_mx^m)=\sum_{s=1}^{m}D_s\varphi(x)$$
$$=\varphi'(x)+\varphi''(x)+\cdots+\varphi^{(m)}(x)$$

이 때 $\varphi'(x)+\varphi''(x)+\varphi'''(x)+\cdots+\varphi^{(m)}(x)=\phi(x)$…⑤이라 놓으면

$$\phi(0)=r_1+r_2\cdot 2!+r_3\cdot 3!+\cdots+r_m\cdot m!$$

또 $u_1(x)r_1+u_2(x)r_2+u_3(x)\cdot r_3+\cdots+u_m(x)\cdot r_m=u(x)$라 놓으면 ④은 $e^x\cdot\phi(0)=\phi(x)+u(x)$…⑥로 쓸 수 있다.

또 ②에서 $\frac{1}{\nu+1}<\frac{1}{1!}$, $\frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)}<\frac{1}{2!}$, $\frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}<\frac{1}{3!}$……이므로

$|x|=r$이라면 $|u_\nu(x)|<{}^{\nu}r+\frac{r^{\nu+1}}{1!}+\frac{r^{\nu+2}}{2!}+\frac{r^{\nu+3}}{3!}+\cdots=r^\nu\left(1+\frac{r}{1!}+\frac{r^2}{2!}+\frac{r^3}{3!}+\cdots\right)=r^\nu\cdot e^r$

$r_1, r_2, \cdots r_m$의 절대값을 $c_1, c_2, c_3, \cdots c_m$이라 하면 $|u(x)|<|r_1|\cdot|u_1(x)|+|u_2(x)|+\cdots+|r_m|\cdot|u_m(x)|<(c_1r+c_2r^2+c_3r^3+\cdots+c_mr^m)e^r$.

이 때 $c_1r+c_2r^2+c_3r^3+\cdots+c_mr^m=F(r)$ …⑦이라 놓으면

$$|u(x)|<F(r)\cdot e^r \text{ ………………………⑧}$$

인데, $F(r)$은 $\varphi(x)$의 x를 r로, $r_1, r_2, \cdots r_m$을 $c_1, c_2, \cdots c_m$으로 대치한 식임을 알 수 있다.

(2) e의 초월성

$c_0, c_1, c_2, \cdots c_n$이 정수이고 c_0, c_n이 0이 아닐 때, e가 방정식

$$c_0+c_1e+c_2e^2+\cdots+c_ne^n=0 \text{………(A)}$$

를 만족한다고 하자.

(1)의 ⑥식 $e^x\phi(0)=\phi(x)+u(x)$에서 $x=1, 2, 3\cdots n$을 대입한 각식에 $c_1, c_2, c_3, \cdots c_n$을 각각 곱하여 더한 양변에 $c_0\phi(0)$를 더하면,

$(c_0+c_1e+c_2e^2+\cdots+c_ne^n)\phi(0)=c_0\phi(0)+c_1\phi(1)+c_2\phi(2)+\cdots+c_n\phi(n)+c_1u(1)+c_2u(2)+\cdots+c_nu(n)$

(A)에 의하여

$$\sum_{\nu=0}^{n}c\nu\phi(\nu)+\sum_{\nu=1}^{n}c\nu u(\nu)=0 \text{ ………………①}$$

그런데 (1)의 ⑤에서 $\phi(\nu)=\sum_{\mu=1}^{m}\varphi(\mu)(\nu)$ 이 때 $\phi(0)\neq 0$이다.

①식이 성립하지 않음을 보여 e의 초월성을 증명하자.

p를 소수라 하고,

$\varphi(x)=\frac{x^{p-1}(x-1)^p\cdot(x-2)^p\cdots(x-n)^p}{(p-1)!}$이라 놓자.

$\varphi(x)$은 $\varphi(0)=0$인 $(np+p-1)$차의 다항식이다.

$m=np+p-1$이라면

$$(p-1)!\varphi(x)=x^{p-1}\cdot(x-1)^p\cdot(x-2)^p\cdot(x3)^p\cdots(x-n)^p=a_{p-1}x^{p-1}+a_px^p+a_{p}{}^{+}{}_{1}x^{p+1}+\cdots+a_mx^m=b_p(x-\nu)^p+b_{p+1}(x-\nu)^{p+1}+\cdots+b_m(x-\nu)^m$$
………………………②

$(\nu=1, 2, 3, \cdots n)$; $a_{p-1}\cdot a_p\cdots a_m, b_p\cdot b_{p1}{}^{+}\cdots b_m$은 모두 정수이다. ②의 2째, 3째식을 x^{p-1}으로 나누면,

$(x-1)^p(x-2)^p\cdots(x-n)^p=a_{p-1}+a_px+a_{p+1}x^2+\cdots+a_mx^{m-p+1}$

이 때 $a_{p-1}=\pm 1^p\cdot 2^p\cdot 3^p\cdots n^p=\pm(n!)^p$이며 $p>n$이면 a_{p-1}은 p로 나누어지지 않는다.

②에서 $\varphi(x)$의 최저인 차수는 $p-1$이므로

$$r_1=r_2=\cdots=r_{p-2}=0$$
$$r_{p-1}=\frac{a_{p-1}}{(p-1)!},\ r_p=\frac{a_p}{(p-1)!},\ r_{p+1}=\frac{a_{p+1}}{(p-1)!},\ \cdots,\ r_m=\frac{a_m}{(p-1)!}.$$

$$\varphi(0)=\varphi'(0)=\varphi''(0)=\cdots=\varphi^{(p-2)}(0)=0$$
$$\varphi^{(p-1)}(0)=a_{p-1},\ \varphi^{(p)}(0)=pa_p,\ \varphi^{(p+1)}(0)=p\cdot(p+1)a_{p+1}\cdots\varphi^{(m)}(0)=p\cdot(p+1)\cdots m\cdot a_m$$

여기서 $\varphi^{(\mu)}(0)$는 모두 정수이고, $\varphi^{(p-1)}(0)$은 p로 나누어지지 않고, 다른 $\varphi^{(\mu)}(0)$은 0이거나 p로 나누어진다. 따라서 $\phi(0)=\sum_{\mu=0}^{m}\varphi^{(\mu)}(0)$는 p로 나누어지지 않는다.

다음에 $\varphi(x+h)=\varphi(x)+\frac{h}{1!}\varphi'(x)+\frac{h^2}{2!}\varphi''(x)+\cdots+\frac{h^m}{m!}\varphi^{(m)}(x)$에서 $x=\nu$, $h=x-\nu$로 놓으면,

$$\varphi(x)=\varphi(\nu)+(x-\nu)\varphi'(\nu)+\frac{(x-\nu)^2}{2!}\varphi''(x^2)+\cdots+\frac{(x-\nu)^m}{m!}\varphi^{(m)}(\nu)$$

이 되므로 이것을 ②의 첫째, 네째식과 비교하여

$$\varphi(\nu)=\varphi'(\nu)=\varphi''(\nu)=\cdots=\varphi^{(p-1)}(\nu)=0$$
$$\varphi^{(p)}(\nu)=p\cdot b_p,\ \varphi^{(p+1)}(\nu)=p\cdot(p+1)b_{p+1}\cdots\cdots,$$
$$\varphi^{(m)}(\nu)=p\cdot(p+1)\cdots m\cdot b_m$$

을 얻는다. $\nu\neq 0$에 대하여 $\varphi^{(\mu)}(\nu)$는 0이거나 p로 나누어진다. 또 정수이다. 따라서 $\phi(x)=\varphi'(x)+\varphi''(x)+\cdots+\varphi^{(m)}(x)$에서 $x=1,2,3,\cdots n$으로 놓아 얻어진 $\phi(1),\phi(2),\cdots\phi(n)$은 모두 p로 나누어진다.

①의 제 1 항 $\sum_{\nu=0}^{n}c_\nu\phi(\nu)=c_0\phi(0)+c_1\phi(1)+c_2\phi+\cdots+c_n\varphi(n)$에서 2항 이하는 모두 p로 나누어지고, p를 충분히 크게 하면, c_0는 p로 나누어지지 않게 할 수 있다. $\phi(0)$는 p로 나누어지지 않으므로 $\sum_{\nu=0}^{n}c_\nu\phi(\nu)$는 p로 나누어지지 않고 0이 아님을 알 수 있다.

다음에 ①의 제 2 항 $\sum_{\nu=1}^{n}c_\nu u(\nu)$에서 $F(r)$을 고려하면

$$F(r)=\frac{r^{p-1}(r+1)^p\cdot(r+2)^p\cdot(r+3)^p\cdots(r+n)^p}{(p-1)!}\cdots\cdots③$$

$p\nu=\nu(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n)$로 놓으면,

$F(\nu)=\frac{p_\nu^{\,p}}{\nu(p-1)!}$이 된다.

(1)의 ⑧에서 $|u(x)|<F(r)$,

$$e^r\,|u(\nu)|<\frac{p_\nu^{\,p}}{\nu(p-1)!}\cdot e^\nu=\frac{p_\nu^{\,p-1}\cdot p_\nu e^\nu}{(p-1)!\,\nu}\cdots\cdots④$$

를 얻게 된다.

무한급수 $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$ $(-\infty<x<8)$는 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$, 따라서 $\lim_{p\to 0}\frac{p_\nu^{\,p-1}}{(p-1)!}=0$

이고 $\frac{e^\nu\cdot p_\nu}{\nu}$는 유한이므로 ④에서 $|u(\nu)|$는 얼마든지 작게 된다. 즉 $|\sum_{\nu=1}^{n}c_\nu u(\nu)|$이 얼마든지 작게 되어 ①은 성립하지 않는다. 따라서 e는 대수방정식

$$c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n=0$$

을 만족하지 않으므로 초월수이다.

2. π의 초월성

(1) π에 의한 식변형

Euler의 관계식 $1+e^{i\pi}=0\cdots$①을 이용하여 π의 초월성을 증명한다. π가 정계수 대수방정식 $\xi(x)=0$의 근이라면 $\xi(\pi)=0$이다. 따라서 $\xi(\pi)\cdot\xi(-\pi)=0$이다. 이제 $y=i\pi$로 놓으면 $\pi=-iy$, $-\pi=iy$이므로 $i\pi$는 $\xi(iy)\cdot\xi(-iy)=\Psi(y)=0$인 정계수 대수방정식을 만족시킨다. 이제 $\Psi(y)=0$을 ν차의 방정식이라 하고 $y_1,y_2,\cdots y_\nu$을 그 근이라 하면 그 중에 $i\pi$가 있으므로 ①에 의하여

$$(1+e^{y_1})(1+e^{y_2})(1+e^{y_3})\cdots(1+e^{y_\nu})=0$$

즉, $1+\sum e^{y_i}+\sum e^{y_i+y_k}+\sum e^{y_i+y_k+y_l}+\cdots=0\cdots\cdots$②

y_i를 근으로 하는 대수방정식 $\Psi(x)=0$, y_i+y_k 또는 $y_i+y_k+y_l$ 등을 근으로 하는 대수방정식을 각각 $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ 등이라 하면 $\phi(x)\cdot\psi_1(x)\cdot\psi_2(x)\cdots$은 y_i, y_i+y_k, $y_i+y_k+y_l\cdots$등의 零點을 갖는다. 이 가운데 x인 인수가 $c-1$개 있는 것으로 하여 위 식을 x^{c-1}로 나누면,

$$\chi(x)=Nx^{1-c}\psi(x)\cdot\psi_1(x)\cdot\psi_2(x)\cdots\cdots③$$

여기서 N은 유리수이고 N을 곱하여 ③의 모든 계수가 정수가 되며 공통인수가 없도록 한 것이다. 즉, $\chi(0)\neq 0$이다. $\chi(x)=0$의 근을 $x_1,x_2,\cdots x_n$로 하면 ②는

$$c+e^{x_1}+e^{x_2}+e^{x_3}+\cdots+e^{x_n}=0\cdots\cdots④$$

이다. 1.의 (1)의 ⑥에 의하면,

$$e^x\cdot\phi(0)=\phi(x)+u(x)$$

이 식의 x 대신에 $x_1,x_2,x_3,\cdots x_n$을 대입하여 더한 결과의 양변에 $c\phi(0)$을 더하면,

$c\phi(0)+\phi(x_1)+\phi(x_2)+\cdots+\phi(x_n)+u(x_1)+u(x_2)+\cdots+u(x_n)=\phi(0)(c+e^{x}+e^{x_2}+\cdots+e^{x_n})$ ⋯⋯⑤

④, ⑤에서 $c\phi(0)+\phi(x_1)+\phi_1(x_2)+\cdots+\phi(x_n)+u(x_1)+u(x_2)+\cdots+u(x_n)=0$ 즉

$$c\phi(0)+\sum_{\nu=1}^{n}\phi(x_\nu)+\sum_{\nu=1}^{n}u(x_\nu)=0 \quad \cdots⑥$$

$\phi(y)=0$ 이 근 $i\pi$ 를 갖는다면 ⑥이 성립해야 한다.

(2) π 의 초월성

π 의 초월성을 보이기 위하여 ⑥에서

i) $c\phi(0)+\sum_{\nu=1}^{n}\phi(x_\nu)$ 은 0이 아닌 정수이고,

ii) $\sum_{\nu=1}^{n}u(x_\nu)$ 가 얼마든지 작은 절대값을 가질 수 있도록 $\varphi(x)$을 적당히 잡을 수 있으면 ⑥이 성립하지 않게 된다.

(α) $\chi(x)=ax^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n$ ⋯⋯①

(1)의 ③을 이와 같이 전개하면 $a, a_1, a_2, \cdots a_n$은 정수이며 $a>0$, $a_n\neq0$ 이며 a_i 는 모두 공통인수를 갖지 않도록 되어 있다.

①식의 양변에 a^{n-1} 을 곱하면,

$$a^{n-1}\chi(x)=a^nx^n+a^{n-1}\cdot a_1x^{n-1}+a_2x^{n-1}+\cdots+a^{n-1}\cdot a_n$$
$$=(ax)^n+a_1(ax)^{n-1}+a\cdot a_2(ax)^{n-1}+\cdots+a^{n-1}\cdot a_n$$

$ax=z$, $a_1=b_1$, $aa_2=b_2$, $a^2b_3=b_3$, $\cdots a^{n-1}\cdot a^u=b_n$ 으로 놓으면,

$$a^{n-1}\chi(x)=\theta(z)=z^n+b_1z^{n-1}+b_2z^{n-2}+\cdots+b_n=0 \quad \cdots⑦$$

를 얻으나 그 근은 $z_1=ax_1, z_2=ax_2\cdots z_n=ax_n$ 이다. 또 $\varphi(x)$를

$$\varphi(x)=\frac{z^{p-1}\{\theta(z)\}^p}{(p-1)!}=\frac{a^{np-1}x^{p-1}\{\chi(x)\}^p}{(p-1)!}\cdots③$$

그러면 $\varphi(0)=0$, p를 충분히 큰 素數, $\varphi(x)$의 차수는 $np+p-1$이고 이를 m이라 하면,

$$\{\theta(z)\}^p=A_0+A_1z+A_2z^2+\cdots\cdots$$
$$=A_0+A_1ax+A_2a^2x^2+\cdots$$

여기서 $A_0, A_1, A_2\cdots$는 모두 정수인데 $z=0$ 으로 놓으면,

$A_0=b_n^p\neq0$ 이므로 $\{\theta(0)\}^p\neq0$

이것에 의하여 $\varphi(x)$ 승멱순으로 정리하면,

$$(p-1)!\varphi(x)=A_0a^{p-1}x^{p-1}+A_1a^px^p+A_2a^{p+1}x^{p+1}+\cdots\cdot\ \varphi'(0)=0,\ \varphi''(0)=0,\cdots,\varphi^{(p-2)}(0)=0.$$

$\varphi^{(p-1)}(0)=A_0a^{p-1}=b_n^pa^{p-1}\neq0$, $\varphi^{(p)}(0)=p\cdot A_1a^p$, $\varphi^{(p+1)}(0)=p(p+1)A_2^{p+1}\cdots$

이제 p를 a, b_n의 어느 것보다도 큰 소수로 취하면 $\varphi^{(p-1)}(0)$은 p로 나누어지지 않는다. 다른 $\varphi^{(\nu)}(0)$은 모두 p로 나누어진다. 고로

$\phi(0)=\sum_{\nu=0}^{m}\varphi^{(\nu)}(0)$은 p로 나누어지지 않는 정수이며 $\phi(0)\neq0$ 이다.

(β) 다음에 $\dfrac{\theta(z)}{z-z_1}=z^{n-1}+q_1z^{n-2}+q_2z^{n-3}+\cdots$

여기서 $q_1\cdot q_2\cdot q_3$ 는 z_1 의 정계수 다항식이며,

$$q_1=z_1+b_1,\ q_2=z_1^2+b_1z_1+b_2,\cdots$$

이것은 $\theta(z)$의 한 근이 z_1 이므로 $\theta(z)$은 $z-z_1$ 으로 나누어지고, 윗 식을 얻을 수 있다. ③과 윗식에서

$$(p-1)!\varphi(x)=z^{p-1}\{Q(z)\}^p=\{(z-z_1)+z_1\}^p(z-z_1)^p(z^{n-1}+q_1z^{n-2}+q_2z^{n-3}+\cdots)^p$$

이것을 $z-z_1$ 의 승멱순으로 정리하면

$$(p-1)!\varphi(x)=B_1(z_1)(z-z_1)^p+B_2(z_1)(z-z_1)^{p+1}+\cdots=a^pB_1(z_1)(x-x_1)^p+a^{p+1}\cdot B_2(z_2)(x-x_1)^{p+1}+\cdots$$

여기서 $B_1(z_1), B_2(z_2)\cdots$은 z_1의 정계수 다항식으로

$$B_1(z_1)=\beta_1^{(0)}+\beta_1^{(1)}z_1+\beta_1^{(2)}z^2+\cdots\cdots$$
$$B_2(z_1)=\beta_2^{(0)}+\beta_2^{(1)}z_1+\beta_2^{(2)}z^2+\cdots\cdots$$

⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯

따라서 $\varphi'(x_1)=\varphi''(x_1)=\cdots=\varphi^{(p-1)}(x_1)=0$

$$\varphi^{(p)}(x_1)=p\cdot a^pB_1(z_1),$$
$$\varphi^{(p+1)}(x_1)=p(p+1)a^{p+1}B_2(z_1)\cdots\cdots$$

이제 $Q(z_1)=a^pB_1(z_1)+(p+1)B_2(z_1)+\cdots$로 놓으면,

$$\phi(x_1)=\sum_{\nu=1}^{m}\varphi^{(\nu)}(x_1)=p\cdot\theta(z_1)$$

$Q(z_1)$을 z_1의 승멱순으로 쓰면,

$$Q(z_1)=\theta_0+\theta_1z_1+\theta_2z_1^2+\theta_3z_1^3+\cdots$$

이며 $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \cdots$를 정계수로 갖는 z_1에 관한 다항식이다. 이 식은 x_1, z_1 대신에 $x_2, z_2, x_3, x_3\cdots x_n$

z_n을 넣어도 성립한다.

$$\sum_{p=1}^{n}\theta(z_\nu)=n\theta_0+\theta_1 s_1+\theta_2 s_2+\theta_3 s_3+\cdots$$

여기서 $S_1=\sum_{\nu=1}^{n} z_\nu$, $S_2=\sum_{\nu=1}^{n} z_\nu^2$, $S_3=\sum_{\nu=1}^{n} z_\nu^3$, $\cdots$

따라서 $s_1+b_1=0$, $s_2+s_1b_1+2b_2=0$, $s_3+s_2b_1+s_1b_2+3b_3=0$, $\cdots$을 얻게 되어 $s_1, s_2, s_3\cdots$는 모두 정수이다.

$$\sum_{\nu=1}^{n}\phi(x_\nu)=p\sum_{\nu=1}^{n}\theta(z_\nu)$$

은 p로 나누어지는 정수이다.

(γ) $c<p$인 p를 잡으면 (α)에서 $c\phi(0)$은 p로 나누어지지 않고, (β)에 의해서 $\sum_{\nu=1}^{n}\phi(x_\nu)$은 p로 나누어지므로

$$c\phi(0)+\sum_{\nu=1}^{n}\phi(x_\nu)$$

은 p로 나누어지지 않으며 0이 아닌 정수이다.

(δ) $\chi(x)=a(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$로 쓰면 ③에 의하여

$(p-1)!\varphi(x)=a^{np+p-1}x^{p-1}(x-x_1)^p\cdots(x-x_n)^p$

이며 그 계수는 a, $-x_1$, $-x_2$, $\cdots$, $-x_n$에서 가법 승법으로 이루어진다. 이들을 $|x_\nu|=r_\nu$로 놓아 $a, r_1, r_2, r_3\cdots r_n$로 바꾸어 놓으면 위의 각 계수는 $a^{np+p-1}\cdot x^{p-1}\cdot(x+r_1)^p(x+r_2)^p\cdots(x+r_n)^p$의 각 계수보다 크지 않다. 이제 $p(r)=a^{n+1}\cdot r(r+r_1)\cdot(r+r_2)\cdots(r+r_n)$으로 놓으면 $p(r)^p=a^{np+p}r^p\cdot(r+r_1)^p(r+r_2)^p(r+r_2)^p\cdots(r+r_n)^p$이 된다.

또 $\varphi(x)$의 각 항의 절대값을 취하여 $|x|=r$로 두고 작성된 다항식 F(r) (1. (1)의 ⑦)을 생각하면,

$F(r)=\dfrac{p(r)^p}{a(p-1)!}$, $r=r_\nu$로 놓으면

$F(r_\nu)=\dfrac{p(r_\nu)^p}{ar_\nu(p-1)!}$을 얻는데 이것은 p를 크게 하면 얼마든지 작게 할 수 있다. 따라서 $|u(x)|<F(r_\nu)e^{r_\nu}$은 얼마든지 작아지고

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n}u(x_\nu)\right|$$

도 얼마든지 작아진다. 따라서 1.의 ⑥은 성립하지 않는다. 즉, π는 초월수이다.

참고문헌

1. 辻 正次. 集合論. 共立出版株式會社. 東京. 1952.

2. 窪田忠彦. 初等幾何學作圖問題. 內田老鶴圃. 東京. 1952.

3. Seymour Lipschutz. set Theory McGraw-Hill Book Company, New York, 1964

4. 문교부. 고등학교 교육과정 1974