大韓機械學會誌 第17卷 第1號 pp. 40～44, 1977

<解 說>

有限要素法의 基本論理과 應用(Ⅱ)

—方向變換에 따르는 變換매트릭스—

金 恒 旭*

먼저번에는 (大韓機械學會誌 第16卷 第4號 1976) 유한요소법의 중심부를 통하는 기본로선을 따라 가면서 기초 개념을 해설하였다. 이 해설에서 앞으로 취급될 사항은 다음과 같다.

1. 트러스 구조물의 정역학적 문제를 예제로 다루며 방향변환에 따르는 "변환매트릭스"해설
2. 기둥의 탄성 안정 문제를 예제로 다루며 비 선형 문제에서 등장하는 "추가 강성매트릭스 (Incremental Stiffness Matrix) [N]의 해설.
3. 1차원 문제에 있어서의 여러가지 유한요소 해설
4. 2차원 문제에 있어서 평면형을 갖는 여러가지 유한요소 해설
5. 2차원 문제에 있어서의 곡면형을 갖는 여러가지 유한요소 해설
6. 유한요소법의 발전 전망
7. 전자계산기 프로그래밍에 있어서의 여러문제

해설의 대상자는 공과대학 기계계열의 상급학년 학생 또는 고체역학 부문에 경력을 갖는 기술자들로서 이 부문의 기본지식을 갖고있는자로 한다.

이번회에는 유한요소의 자유도 즉 미지상수로 다루어지는 자변수의 좌표축이 바뀔 때 부수적으로 등장하는 변환 매트릭스에 대하여 해설한다.

1. 緒 論

구조물은 여러개의 부재가 결합되어 형성된다. 수학의 힘을 빌려서 해석할 때는 해석학의 개념을 도입하기 때문에 필히 기준 좌표가 설정된다. 구조물 전체에 대하여 기준좌표를 설정해 놓고 각 부재를 살피면 기준좌표가 각각의 부재를 다루기에 최량상태(最良狀態)가 아닌 것이 일반적인 현상이다. 불규칙 하게 꺾이여 있는 보나 기둥이든지 또는 한점에서 연결되는 여러 부재의 방향이 각각 다른 트러스 구조물이 그 실예이다. 구조물전체를 다룰때 각 부재에 대해서 정의한 물리량의 방향을 기준좌표에 합당한 방향으로 변환해야만 계 전체에 대한 매트릭스 통제방정식이 구성된다. 변환 매트릭스의 도입과 그 역할을 해설하기 위하여 트러스 구조물의 정역학적 문제를 예로 취급한다.

2. 트러스 有限要素

이상적인 트러스 구조물은 정역학적으로 정정이건 부정정이건 간에 두힘요소(Two Force Member)로 되어 있으므로 트러스 구조물을 해석하기 위한 유한요소는 두힘요소로 족하다. 두힘요소는 착력점이 두개이며, 두 착력점을 연결하는 직선상의 힘만을 지탱한다. 일반적인 트러스 구조물은 부재들의 연결부가 마찰없는 힌지(Hinge)가 아니기 때문에 두힘요소로 구성되는것이 아니지만 특수경우를 제외 하고는 2차응력을 무시하고 이상적인 트러스 구조물로 취급한다.

2-1. 기하학적 모양과 절점의 자유도

그림 (1)과 같이 트러스 유한요소의 기하학적 모양과 두 절점의 자유도를 정한다. 전에도 언급했든 바와 같이 유한요소의 기하학적 모양은 해석코저 하는 구조물의 기하학적 성분을 고려하여 지정되는 것이고, 절점에 부여되는 자유도는 물리학적인 면을 주로 고려 하면서 지정한다. 자유도는 많을 수록 근사해의 오차는 감소되지만 반면 경제적으로는 손해를 보는것이기에 적이 타협해서 결정한다.

그림에서 보는 바와 같이 Δ_1, Δ_3는 각각 절점 ①, ②에 있어서의 x축방향 변위이고, Δ_2, Δ_4는 절점에 있어서의 y축 방향 변위이다. 자유도 Δ_i, $_{i=1\sim4}$에 대응되는 힘 p_i, $_{i=1\sim4}$는 같은 절점에 Δ_i 방향으로 작용하는 외력

* 正會員, 韓國航空大學

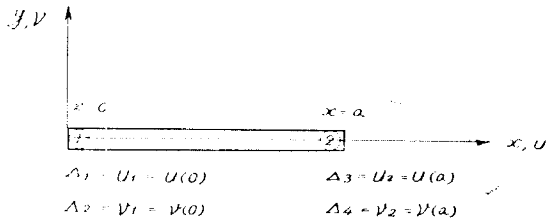


그림 1. 트러스 유한요소

으로서 다음과 같다.

$$\lceil p \rfloor \equiv \lceil p_1 p_2\ p_3\ p_4 \rfloor \equiv \lceil X_1\ Y_1\ X_2\ Y_2 \rfloor \tag{1}$$

이 유한요소는 축이 직선인 봉이며, 양끝에 하나식의 절점을 갖는다. 각 절점은 두 직각 방향으로의 변위 즉 u와 v인 자유도를 갖으며 따라서 이 유한 요소는 4개의 자유도를 갖기 때문에 매트릭스 통제방정식에 등장하는 매트릭스는 4×4가 될것이다. 트러스 구조물의 부재는 단순히 인장 또는 압축을 받기 때문에 단면의 회전량을 절점의 자유도로서 등장시킬 필요가 없다. 그림에서 보는 자유도를 수식으로 정돈하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\lceil \varDelta \rfloor &\equiv \lceil \varDelta_1\ \varDelta_2\ \varDelta_3\ \varDelta_4 \rfloor \equiv \lceil u_1\ v_1\ u_2\ v_2 \rfloor\\ &\equiv \lceil u(0)\ \ v(0)\ \ u(a) v(a) \rfloor\end{aligned} \tag{1'}$$

2-2. 내부 변위 함수

축 방향의 변위 $u(x)$와 y축 방향의 변위 $v(x)$는 서로 직교 함으로 독립이다. 따라서 내부 변위 함수 $u(x)$, $v(x)$는 각각 양단에 있어서의 서로 다른 두개의 경계 조건을 만족 시켜야 한다. 따라서 다음과 같은 1차식으로 놓을 수 있다. 물론 다른 모양의 함수로도 얼마든지 지정할 수 있는 것이며, 여기에서 지정한것만이 사용될 수 있는것은 아니다.

$$u(x)=m+nx,\quad v(x)=p+q(x)$$

이 식에 경계조건 $u(0)\varDelta_1$, $u(a)=\varDelta_3$와 $v(0)=\varDelta_2$, $v(a)=\varDelta_4$를 대입하고, 상수 m, n, p, q를 구하여 윗식에 대입하면 다음과 같이 된다.

$$\left.\begin{aligned}u(x)&=\varDelta_1+\frac{\varDelta_3-\varDelta_1}{a}x\\ v(x)&=\varDelta_2+\frac{\varDelta_4-\varDelta_2}{a}x\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

2-3. 포텐셜 에너지 U, V.

트러스 구조물의 부재는 축 하중만을 받기 때문에 트러스 유한요소의 탄성 에너지는 축, 하중에 의한것만 고려된다. 두 절점의 자유도 $\varDelta_i$, $_{i=1\sim4}$가 그림 (1)과 같이 지정 되었을 때 요소의 축 방향 변형 δ와 변형율 ε은 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned}\delta=a\varepsilon&=\sqrt{[a+(u_2-u_1)]^2+(v_2-v_1)^2}-a\\ &=\sqrt{a^2+2a(u_2-u_1)+(u_2-u_1)^2+(v_2-v_1)^2}-a\end{aligned}$$

여기에서 a는 유한요소의 길이이다. 변형이 퍽 적은 탕이라고 가정하는 소량변형리론(Small Deflection Theory)에 의하여 변형의 고차항을 무시하고 다음과 같이 한다.

$$a\varepsilon \fallingdotseq \sqrt{a^2+2a\ (u_2-u_1)}-a$$

2항정리로 전개하고 (u_2-u_1)의 고차항을 다시 무시 하여 다음과 같이 한다.

$$a\varepsilon=a+(u_2-u_1)-a=u_2-u_1$$

따라서

$$\varepsilon=\frac{1}{a}(u_2-u_1)=\frac{1}{a}(-u_1+0+u_2+0)$$

$$=\frac{1}{a}\lceil -1\ 0\ 1\ 0 \rfloor \begin{Bmatrix} u_1\\ v_1\\ u_2\\ v_2\end{Bmatrix}=\frac{1}{a}\lceil -1\ 0\ 1\ 0 \rfloor \begin{Bmatrix} \varDelta_1\\ \varDelta_2\\ \varDelta_3\\ \varDelta_4\end{Bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}\text{즉}\quad \varepsilon&=\frac{1}{a}\lceil f \rfloor \{\varDelta\}\\ \lceil f \rfloor &\equiv \lceil -1\ 0\ 1\ 0 \rfloor\\ \lceil \varDelta \rfloor &=\lceil \varDelta_1\ \varDelta_2\ \varDelta_3\ \varDelta_4 \rfloor\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

식 (3)의 유도는 직관적으로도 가능하지만 여기에서는 정도(正道)를 따랐음을 보여준 것이다.

탄성 에너지 U는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}U&=\int_V \frac{\varepsilon\sigma}{2}dV=\int_V \frac{E\varepsilon^2}{2}dV=\frac{EA}{2}\int_0^a \varepsilon^2 dx\\ &=\frac{EA}{2}\int_0^a\left(\frac{1}{a}\lceil f \rfloor\{\varDelta\}\right)^2 dx\\ &=\frac{EA}{2a^2}\int_0^a(\lceil \varDelta \rfloor\ \{f\}\ \lceil f \rfloor\ \{\varDelta\})\,dx\\ &=\frac{EA}{2a^2}\cdot a\ \varDelta\ [\overline{K}]\ \{\varDelta\}\end{aligned}$$

$$\text{즉}\quad U=\frac{EA}{2a}\lceil \varDelta \rfloor\ [\overline{K}]\ \{\varDelta\} \tag{4}$$

$$\text{여기에서}\quad [\overline{K}]=\{f\}\ \lceil f \rfloor=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\lceil -1\ 0\ 1\ 0 \rfloor$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{4'}$$

외력에 의한 포텐셜 에너지 V는 다음과 같이 된다.

$$V=-\int (X_1\ \delta u_1+Y_1\ \delta v_1+X_2\ \delta u_2+Y_2\delta v_2)$$

$$=-\int \lceil X_1\ Y_1\ X_1\ Y_2 \rfloor \begin{Bmatrix}\delta u_1\\ \delta v_1\\ \delta u_2\\ \delta v_2\end{Bmatrix}=-\int \lceil p_1\ p_2\ p_3\ p_4 \rfloor$$

$$\begin{Bmatrix} \delta\Delta_1 \\ \delta\Delta_2 \\ \delta\Delta_3 \\ \delta\Delta_4 \end{Bmatrix}$$

$$\text{즉} \quad V=-\int\lceil p \rfloor \, \delta\{\Delta\} \tag{5}$$

여기에서 $\lceil p \rfloor$, $\lceil \bar{p} \rfloor$는 식 (1′), (1)에 주어져 있다.

따라서 계의 전 포텐셜 에너지 π는 다음과 같이 된다.

$$\pi=U+V=\frac{EA}{2a}\lceil \Delta \rfloor \, [\overline{K}] \, \{\Delta\}-\int\lceil p \rfloor \, \delta\{\Delta\} \tag{6}$$

2-4. 매트릭스 통제방정식

식 (6)의 포텐셜 에너지 π에 최소일의 원리(Minimum Potential Energy Theorem) $\delta\pi=0$를 적용하면 다음 식이 얻어진다.

$$\{p\}=\frac{EA}{a}[\overline{K}] \, \{\Delta\} \tag{7}$$

또는 기호를 양성화해서

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{a}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{Bmatrix}$$

식 (7)이 트러스 유한요소 하나에 대한 정역학적 해석에 있어서의 매트릭스 통제방정식이며 이 식은 유한요소의 축선이 x축과 일치 할 때에만 적용될 수 있음을 강조한다. 식 (7)은 물론 물리학적 개념을 토대로 스프링 계수의 정의로 부터 쉽게 도출되는 것이지만 여기에서는 유한요소법의 정도를 따랐다. 또 식 (7)은 일반화된 훅의 법칙을 뒤집어 놓은 식임을 부언해둔다.

3. 變換 매트릭스

트러스 구조물은 절점에서 여러개의 부재가 서로 어떤 각을 이루면서 연결되기 때문에 계의 기준 좌표를 모든 부재의 축선과 일치 하도록 설정 하지 못한다. 따라서 일반적인 경우에 적용하기 위해서는 식 (7)을 유한요소의 축선과 x축이 어떤 각을 이룰 때의 식으로 변환해야 한다. 그러함으로서만 각 부재에 대한식을 중첩하여 구조물 전체에 대한 식을 형성 할 수 있다.

그림 (2)와 같이 기준좌표축 x와 θ인 각을 이루는 트러스 유한요소의 기준축에 대한 매트릭스 통제방정식을 유도한다.

$\bar{x}, \bar{y}$ 좌표계에 대한 통제 방정식은 식 (7)과 같이 다음

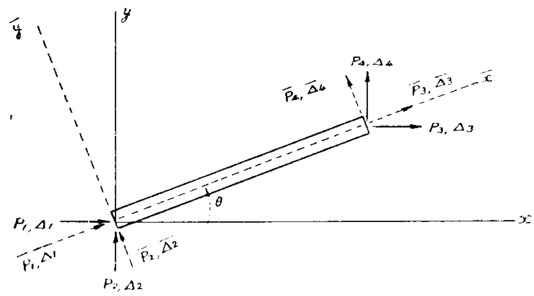


그림 2. 좌표축과 각을 이루는 트러스 유한요소

식으로 표시된다.

$$\{\bar{p}\}=\frac{EA}{a} \quad [\overline{K}]\{\overline{\Delta}\} \tag{7′}$$

그림 (2)에서 기하학적으로 다음 관계식이 성립함을 쉽게 알 수 있다.

$$\begin{aligned} \{\bar{p}\}&=[T] \, \{p\} \\ \{\overline{\Delta}\}&=[T] \, \{\Delta\} \end{aligned} \tag{8}$$

$$\text{여기서} \quad [T]=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

식 (8)에 주어진 매트릭스 $[T]$가 트러스 유한요소의 방향변환에 따르는 변환매트릭스이며, 이 경우는 2차원 직각 좌표계의 회전에 따르는 변환매트릭스와 같다. 식 (7′)에 식 (8)을 대입해서 다음과 같이 한다.

$$[T] \, \{p\}=\frac{EA}{a} \, [\overline{K}] \, [T] \, \{\Delta\}$$

$$\{p\}=\frac{EA}{a} \, [T]^{-1} \, [\overline{K}] \, [T] \, \{\Delta\}$$

$$\text{즉} \quad \{p\}=\frac{EA}{a} \, [K] \, \{\Delta\} \tag{9}$$

여기에서 (K)는 다음과 같다.

$$[K]=[T]^{-1} \, [\overline{K}] \, [T]=\begin{bmatrix} \lambda & -\lambda \\ -\lambda & \lambda \end{bmatrix}$$

$$[\lambda]=\begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix} \tag{10}$$

식 (10)의 결과는 식 (7)의 $[\overline{K}]$와 식 (8)의 $[T]$ 값을 실제 대입하여 계산하므로서 쉽게 얻어진다. 식 (8)의 변환매트릭스는 굴절을 이루는 보를 다룰 때도 사용된다.

4. 數値計算例

독자의 이해를 돕기 위하여 실제문제를 풀어본다. 통

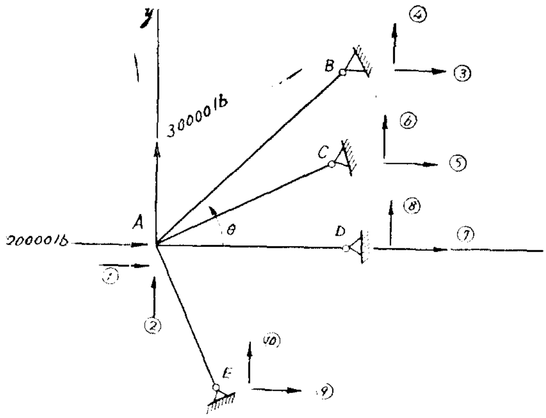


그림 3. 부정정 트러스

부재	θ (0)	길이 a (in)	단면적 A (in²)	E (lb/in²)
AB	45	70	3.5	10^6
AC	30	55	1.1	10^6
AD	0	50	2.0	10^6
AE	−60	40	2.0	10^6

제방정식이 식 (10)과 같이 선형일 때는 유한요소 하나 하나에 대한 매트릭스식을 중첩하므로서 구조물 전체에 대한 매트릭스식이 도출된다. 지면상 여러 문제를 다룰 수 없으니 정역학적으로 정정인 문제는 그냥 스치고 정역학적으로 부정정인 문제를 하나 택한다.

그림과 같은 트러스 구조물에 있어서 각 부재의 내력과 A점의 변위를 구하여 본다. 필요한 수치는 표에 주어져 있다.

4-1. 매트릭스식의 구성

그림과 같이 기준 좌표축을 설정하고, 각 절점에 있어서의 자유도를 그림과 같이 번호를 붙인다. 계의 자유도가 10개 이니 구조물 전체에 대한 식에는 10×10 매트릭스가 다루될 것이며, 이 매트릭스의 요소는 각 부재에 대한 4×4매트릭스의 요소가 적이 중첩되어 형성될 것이다. 첫째로 각 부재에 대하여 식 (9) 및 (10)에 주어진 매트릭스식을 세운다.

i) 부재 AB; $\theta=45°$ 이기에 식 (10)에 주어진 매트릭스 $[\lambda]$는 다음과 같다.

$$[\lambda]=\begin{bmatrix} .5 & .5 \\ .5 & .5 \end{bmatrix}$$

또 $\dfrac{AE}{a}=\dfrac{3.5}{70}\times10^6=.5\times10^5$ 이다. 이 값들을 갖고 식 (9), (10)을 참조 하면서 부재 양단의 자유도를 고려하여 다음 식을 얻는다.

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix}=10^5\begin{bmatrix} .25 & .25 & -.25 & -.25 \\ .25 & .25 & -.25 & -.25 \\ -.25 & -.25 & .25 & .25 \\ -.25 & -.25 & .25 & .25 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{Bmatrix} \quad \text{(i)}$$

ii) 부재 AC; $\theta=30°$ 이기에

$[\lambda]=\begin{bmatrix} .750 & .433 \\ .433 & .250 \end{bmatrix}$, 또 $\dfrac{AE}{a}=.2\times10^5$ 이들 값을 갖고 양단의 자유도 번호에 유의 하면서 다음 식을 얻는다

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_5 \\ p_6 \end{Bmatrix}=10^5\begin{bmatrix} .15 & .0866 & -.15 & -.0866 \\ .0866 & .05 & -.0866 & -.05 \\ -.15 & -.0866 & .15 & .0866 \\ -.0866 & -.05 & .0866 & .05 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \end{Bmatrix} \quad \text{(ii)}$$

iii) 부재 AD; $\theta=0$ 이기에 $[\lambda]=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 또 $\dfrac{AE}{a}=.4\times10^5$. 따라서 다음 식을 얻는다.

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_7 \\ p_8 \end{Bmatrix}=10^5\begin{bmatrix} .4 & 0 & -.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -.4 & 0 & .4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_7 \\ \Delta_8 \end{Bmatrix} \quad \text{(iii)}$$

iv) 부재 AE; 마찬가지 방법으로 다음식을 얻는다.

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_9 \\ p_{10} \end{Bmatrix}=10^5\begin{bmatrix} .125 & -.216 & -.125 & .216 \\ -.216 & .375 & .216 & -.375 \\ -.125 & .216 & .125 & -.216 \\ .216 & -.375 & -.216 & .375 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_9 \\ \Delta_{10} \end{Bmatrix} \quad \text{(iv)}$$

위의 4개식 (i), (ii), (iii), (iv)를 적이 중첩하여 구조물 전체에 대한 매트릭스식을 구성하는 일은 다음과 같이 한다. 10×10 크기의 매트릭스를 사이에 두고 등호의 좌우변에 하중벡터 $\{p\}$와 자유도벡터 $\{\Delta\}$를 놓은 다음 (i)∼(iv) 식의 매트릭스 요소를 10×10 매트릭스의 적소에 기입 가산한다. 예를 들면 (iv)식의 3행, 4열에 속하는 요소 −.216은 p_9, Δ_{10}에 관계 되므로 10×10 매트릭스의 9행 10열의 위치에 기입한다. 물론 전자계산기로 계산할 때는 굳이 기입할 필요가 없다.

식 (11)의 10×10 크기의 매트릭스에서 요소 (1,1), (1,2), (2,1), (2,2)는 각각 4개의 수치가 중첩되어야 한다. 이것은 그림 (3)의 구조물의 4개부재가 모두 자유도 $\Delta_1\Delta_2$와 관계를 갖는다는 것을 의미한다. 영인 요소는 해당 p와 Δ가 관계가 없다는 것을 의미 한다. 예를 들어 요소 (8,5)는 영인데 이것은 p_8과 Δ_5는 아무 상관이 없다는 의미이다. 이 사실은 그림 (3)으로 쉽게 납득 될 것이다.

$$
\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \hline P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \\ P_9 \\ P_{10} \end{Bmatrix}
= 10^5
\left[\begin{array}{cc|cccccccc}
\begin{smallmatrix} .25 \\ .15 \\ .4 \\ .125 \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} .25 \\ .0866 \\ 0 \\ -.216 \end{smallmatrix} & -.25 & -.25 & -.15 & -.0866 & -.4 & 0 & -.125 & .216 \\
\begin{smallmatrix} .25 \\ .0866 \\ 0 \\ -.216 \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} .25 \\ .05 \\ 0 \\ .375 \end{smallmatrix} & -.25 & -.25 & -.0866 & -.05 & 0 & 0 & .216 & -.375 \\
\hline
-.25 & -.25 & .25 & .25 & & & & & & \\
-.25 & -.25 & .25 & .25 & & & & & & \\
-.15 & -.0866 & & & .15 & .0866 & & & & \\
-.0866 & -.05 & & & .0866 & .05 & & & & \\
-.4 & 0 & & & & & .4 & 0 & & \\
0 & 0 & & & & & 0 & 0 & & \\
-.125 & .216 & & & & & & & .125 & -.216 \\
.216 & -.375 & & & & & & & -.216 & .375
\end{array}\right]
\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \hline \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \\ \Delta_7 \\ \Delta_8 \\ \Delta_9 \\ \Delta_{10} \end{Bmatrix}
\quad \cdots\cdots (11)
$$

4-2. 경계 조건의 적용과 해법

그림 (3)에 보는 바와 같이 식 (11)과 함께 제시되는 경계조건은 다음과 같다.

$\Delta i,\ i=3\sim10=0$

$p_1=20000,\quad p_2=30000$

처음 조건을 감안하고 식 (11)을 툭한 실선에 의하여 분활하면 다음 두식이 얻어 진다.

$$
\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = 10^5 \begin{pmatrix} .925 & .121 \\ .121 & .675 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix}
$$

$$
\begin{Bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \\ p_8 \\ p_9 \\ p_{10} \end{Bmatrix} = 10^5 \begin{pmatrix} -.25 & -.25 \\ -.25 & -.25 \\ -.15 & -.0866 \\ -.0866 & -.05 \\ -.4 & 0 \\ 0 & 0 \\ -.125 & .216 \\ .216 & -.375 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} \qquad (12)
$$

첫째식에서 A점의 변위 Δ_1, Δ_2를 다음과 같이 구한다.

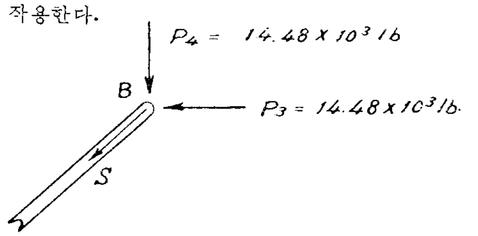
$$
\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} = 10^{-5} \begin{bmatrix} .925 & .121 \\ .121 & .675 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 20000 \\ 30000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} .162 \\ .414 \end{Bmatrix}''
$$

위의 $\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix}$ 값을 둘째식에 대입하여 p_i, $_{i=3\sim10}$ 은 다음과 같이 구해진다.

$$
\begin{Bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \\ p_8 \\ p_9 \\ p_{10} \end{Bmatrix} = 10^3 \begin{Bmatrix} -14.48 \\ -14.48 \\ -6.04 \\ -3.49 \\ -6.48 \\ 0 \\ 6.98 \\ -12.14 \end{Bmatrix} \text{1b}
$$

이 반력들이 그림 (3)에서 $2\hat{F}x=0$, $2\hat{F}y=0$를 만족함을 쉽게 검사할 수 있다. 적은 오차는 소수 계산과정에서 유발된 것이다.

부재의 내력은 $p_3\sim p_{10}$로서 쉽게 구해진다. 부재 AB의 내력을 예로서 구해 보인다. 그림 (3)을 상기 하면 위에서 구한 p_3, p_4는 부재 AB의 B단에 아래 그림과 같이 작용한다.



부재의 인장내력을 S라 하면 위의 그림과 같이 표시되며, 여기에서 $S=-20478$ 1b. 가 얻어진다.