

<論 文>

純粹 비틀림 應力の 光學的 測定法에 對한 研究

崔 善 浩*

(1977. 1. 31 接受)

A Study on the Optical Measurement of Torsional Stresses
Sun-Ho Choi

Abstract

It is well known fact that there is a theoretical analogous relationship in terms of differential equation between the stress distribution of a bar under pure torsional moment and the deflection of a membrane subjected to a uniform pressure. This relationship has been applied to the experimental determination of torsional stresses with troublesome and elaborative measuring procedure since Griffith's invention of the soap-film apparatus.

In this paper, the soap-film was replaced by a highly polished steel plate and whole-visualable deflectional contour-line-map was able to obtain by using Michelson Interferometer with Ne-He Gas Laser light source enabling to determine the stress distribution in the vicinity of the symmetrical inner-boundary in a section.

Experimental results were satisfactory and the margin of error in the measurement was lower than 1%.

1. 緒 論

任意型的 斷面을 가진 棒의 純粹 비틀림에 따른 剪斷 應力の 分布와 均一한 橫壓을 받는 薄膜의 變位方程式은 서로 物理的인 相似關係가 成立함은 이미 잘 알려진 事實이다. 이 相似理論에 따라 薄膜에다 均一壓力을 주어 그 Deflection을 測定하여 各位置에 따른 膜의 傾斜를 算出하여 剪斷應力을 決定하는 方法은 從來 다음의 세가지 方法으로 大別할 수 있다.

(1) 비누膜의 方法¹⁾

(2) 고무膜의 方法

(3) Meniscus의 方法

이들의 液體膜에 의한 測定은 주로 氣體壓에 의하여

均一한 膜張力을 얻을 수 있고 變形이 比較的 커서 機械的測定이 容易하며 嚴密히 境界條件을 만족하고 있음으로써 相當히 精密한 값을 구할 수 있다는 것이 長點이다.

한편 이들 方法의 共通인 缺點으로서의는 Griffith²⁾의 方法에서 보는 바와 같이 point by point의 測定만이 可能하여 全體的인 應力分布의 把握이 어렵고 特殊한 光源을 使用하면 變形의 等高線을 얻을수도 있으나,³⁾ 生成된 Fringe의 數가 적어 精密度를 缺하는 傾向이 없지 않다.

더우기 斷面內에 內部境界가 存在할 때는 測定이 매우 어렵다는 것이다.

本論文에서는 위의 缺點을 補完하기 위하여 研磨한 金屬片에다 干涉性이 강한 Coherent한 He-Ne Laser 光을 Michelson 干涉光學系로써 投射하여 全體的인 可視等高線을 얻음과 同時, 對稱型內部境界가 存在할 때

* 正會員, 嶺南大學校 工科大學 機械工學科
本 論文에 대한 討論은 1977年 11月 15日까지 本 學
會 事務室로 送付하여 주십시오.

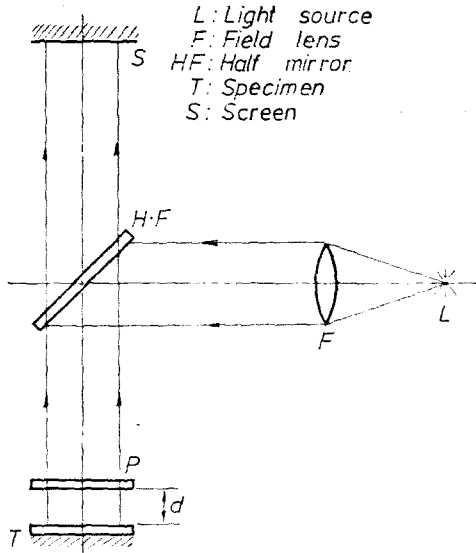


Fig. 1. Arrangement of Optical Apparatus using Optical Flat

에도 비틀림應力測定을 可能하게 할 수 있는 實驗法을 試圖해 보았다.

2. 實驗裝置

(1) 光學系

膜의 微小變位를 나타내는 干涉무늬(Fringe)를 얻는 光學系의 가장 原始的인 方法의 하나로서는 Fig.1과 같은 것을 들 수 있다. 즉 光彈性平面應力測定裝置에서 1/4 λ板, 偏光板, 檢光板을 除外하고 λ=6328Å의 Ne-He Gas Laser 혹은 λ=5893Å의 Natorium 光源을 使用하여 試片과 Optical Flat에서 反射되는 두 平行光線의 光路差에 의한 干涉을 生成시켜 任意 Fringe 사이의 垂直거리

$$d = (2n-1) \cdot \frac{\lambda}{4}, \quad n=1, 2, 3, \quad (1)$$

를 얻는 方法이다. 勿論 이 方法에 의하여서도 實驗裝置의 精密度만 充分히 높이면 깨끗한 變位等高線을 얻을 수 있겠으나 實驗上 다음과 같은 短點도 없지 않다.

(1) 試片의 初期 Fringe의 生成이 試片과 Optical Flat와의 微小한 Tilting에도 크게 늘어나, 實驗後에 이들 初期 Fringe를 除去하는 Plotting이 매우 번잡하다. Tilting의 調整은 荷重裝置의 相互位置가 固定되기 때문에 거의 不可能하다.

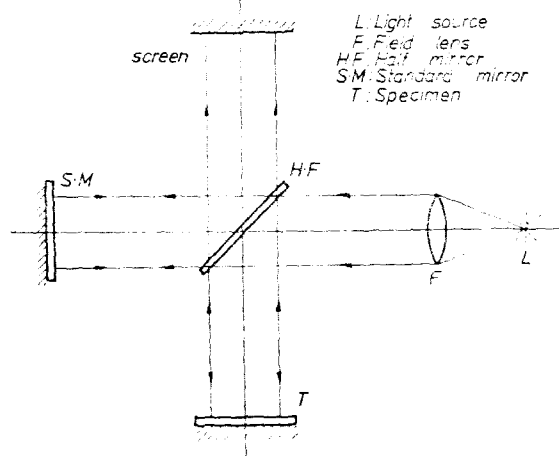


Fig. 2. Michelson Optical System

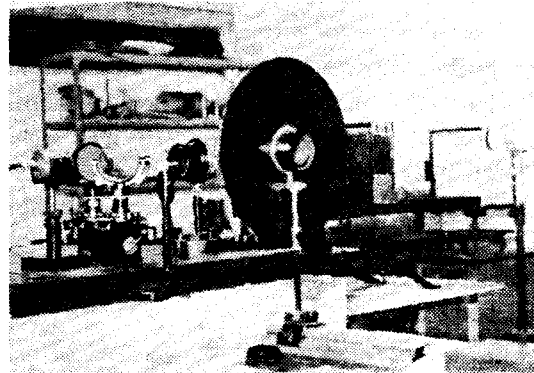


Fig. 3. Optical Apparatus

(2) 變位의 基準 Fringe (Closed Fringe)는 試片의 葉稱中心에 位置시킴이 바람직하나, 이 裝置로서는 여기에 對한 微小調整이 어렵다.

위의 條件에서 보면 Fig.2, Fig.2과 같이 Reference Beam을 Specimen Beam과 垂直으로 分離시키므로써, 즉 Michelson 光學系를 使用함으로써 이들을 解消시킬 수 있음을 쉽게 알 수 있을 것이다.

(2) 試 片

正確한 生成 Fringe의 分布를 얻기 위하여 試片의 表面은 初期 Fringe의 數를 4~5個로 抑制하는 것이 좋다. 試片의 研磨加工의 容易性을 감안하면 S35C 程度의 鋼板을 使用하는 것이 適當하다. 처음에 대충 다음

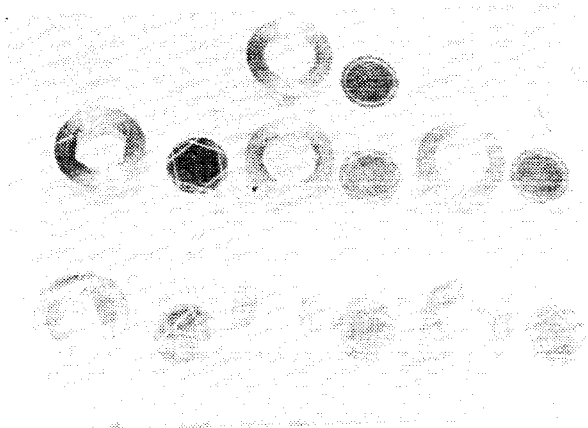


Fig. 4. Various Size of Specimen

질한 試片 Blank를 平滑한 定盤위에 #200의 샌드페이퍼를 발라 摺合研磨하고, 차례로 #400, #600, #800, 및 #1000의 順에 따라 乾式研磨한 다음 마지막으로 Tin-oxide粉으로써 마무리하면 3~6個의 同心閉曲線의 Fringe를 얻을 수 있다. 研磨過程에서 二個以上の 閉曲線이 나타나는 경우도 간혹 있으나 이는 實驗에서 除外시킨다. 研磨된 試片을 例示하면 Fig. 4와 같다.

(3) 負荷裝置

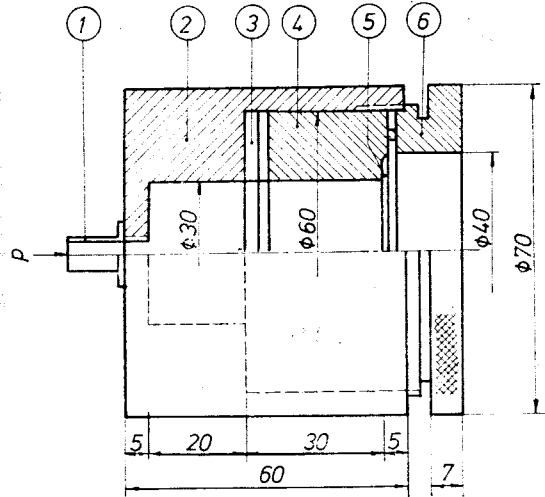
試片에 주는 負荷는 等分布荷重이어야 되니 空氣壓 또는 끝에 Sponge를 附着한 Rod로써 밀어 荷重을주는 方式을 擇한다. 空氣壓의 경우에는 試片의 지름 30~50 mmφ, 두께 0.8~0.5mm에 對하여 0.8~1氣壓이 適當하다. 生成되는 最大 Fringe 數는 40以上이면 測定하기가 어렵게 된다. 特히 內外境界條件의 하나인 End Moment Free를 充足시키기 위하여서는 Knife Edge로써 試片을 支持할 수도 있으나, 氣密을 주기가 힘들기 때문에 境界에 따라 試片두께 t의 1/2 程度의 깊이로 웨지홈 (wedge groove)를 주면 測定의 誤差限界以內로 좋은 結果를 얻을 수 있다.

試片과 加壓裝置의 固定은 Epoxy 接着劑를 使用하면 充分하다 (Fig. 5 參照).

3. 測定의 理論 및 測定誤差

(1) 膜의 相似理論

一般的으로 R領域內에 外部境界를 除外한 n個의 內部境界가 있을 때 自由端의 斷面에 주어진 剪斷力 P_x에



1. Air inlet 2. Body 3. Sealing rubber
4. Specimen holder ring
5. Specimen 6. Stopper's ring

Fig. 5. Specimen Mounting Ring and Loading Cylinder

對하여 Saint-venant의 應力函數⁽⁵⁾는

$$\varphi_i = -\frac{P_x}{2I_y} \int_0^s x_i^2 \cdot \frac{\partial y_i}{\partial s} \cdot ds - \frac{\mu P_x y_i^3}{6(1+\mu)} + k_i \quad (2)$$

로 表示되고 常數 k_i는 다른 境界에서 各기 다른 값을 取한다. (2)式에서 P_x=0라 놓은 純粹비틀림의 경우에는 다음의 關係가 成立한다.

$$V^2 \varphi = -2G\theta, \varphi \text{의 適合條件} \quad (3)$$

$$\varphi_i = k_i \quad (4)$$

$$\int_{c_i} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \cdot ds = 2G\theta A_i, \text{境界條件} \quad (5)$$

φ로 表示된 비틀림 moment M_x는

$$M_x = -\iint_R \left(x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dx dy \\ = 2 \iint_R \varphi dx dy - 2k_0 A_0 + 2 \sum_{i=1}^n k_i A_i \quad (6)$$

로써 相似置換이 이루어진다. 境界條件의 相似는

$$\xi_i = k_i', k_i' = \frac{p}{2G\theta \lambda_i^2 T} k_i \quad (10)$$

k_i를 決定하는데는

$$T \cdot \int_{c_i} \frac{\partial \xi}{\partial \nu_1} ds_i = p A_i' \quad (i=1, 2, n) \quad (11)$$

가 되며, 이들의 力學的均衡關係는 Fig. 5와 같다. 任意 斷面의 비틀림 應力은

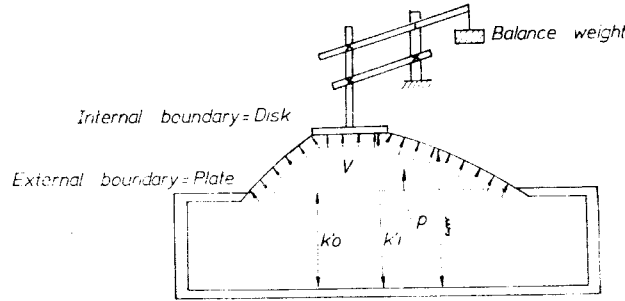


Fig. 6. Representation of Mechanical Balance of Membrane Analogy

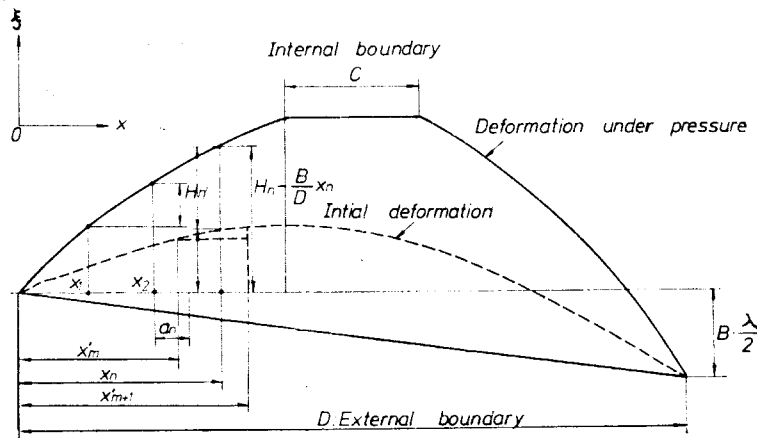


Fig. 7. Determination of Membrane Slope

$$\tau = -\frac{2G\theta\lambda_1 T}{p} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial \nu_1} \quad (12)$$

로表示되고 비틀림 剛性係數는

$$C = \frac{M_z}{\theta} \quad (7)$$

이 된다. 한편, 均一한 表面張力 T를 받는 얇은 膜에 垂直壓 p를 줄때 膜面(x1, y1)과 垂直方向의 變位 ξ에 對하여

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y_1^2} = -\frac{P}{T} \quad (8)$$

의 均衡方程式에서 膜과 實物의 縮尺比 λ1을 고려하면

$$\varphi = \frac{2G\theta}{p} \cdot \lambda_1^2 \cdot T \cdot \xi \quad (9)$$

로 나타내며, V를 膜으로 둘러싸인 體積이라 할 때

$$\tau = -\frac{M_z}{2\lambda_1^3 V} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial \nu_1} \quad (13)$$

으로表示된다.

(13)式에서 보는 바와 같이 斷面 R領域內의 點의 ν1

方向의 剪斷應力을 구하려면 Fig.6과 같은 機構에서 體積 V, 傾斜 ∂ξ/∂ν1을 實驗的으로 決定하면 된다는 것을 알 수 있다. 이 理論에 따라 Balance Mechanism가 必要치 않는 中實軸에 對하여서는 여러 實驗方法이 考案 되었으며 內部境界를 가지는 問題에 對하여서는 1/A0

$\int_{C_0} \frac{\partial \xi}{\partial \nu_1} ds_1$ 의 값과 $1/A_1 \int_{c_1} \frac{\partial \xi}{\partial \nu_1} ds_1$ 의 값이 서로 같아 지겠끔 Disk의 높이를 調節해보는 試行錯誤法이 提案되어 왔으나 實驗上 매우 까다로워 實用성이 적다. 이러한 點에서 Michelson 光學系에 의한 測定에서는 特히 對稱型內部境界를 가지는 경우, 이 部分에다 充分한 剛性만 주면 그대로 Fig.6의 力學的 關係가 成立하기 때문에 直視的測定이 可能함을 알 수 있다. 但, 境界周圍의 End moment Free의 條件은 鋼板膜의 두께 t의 1/2 길이로 sharp한 groove를 주어 만족시켜야 하며, 內部境界部位의 두께는 鋼板膜 t=0.8~0.5mm에 對하여 3mm 程度이면 充分한 剛性을 얻을 수 있음을 實驗結果

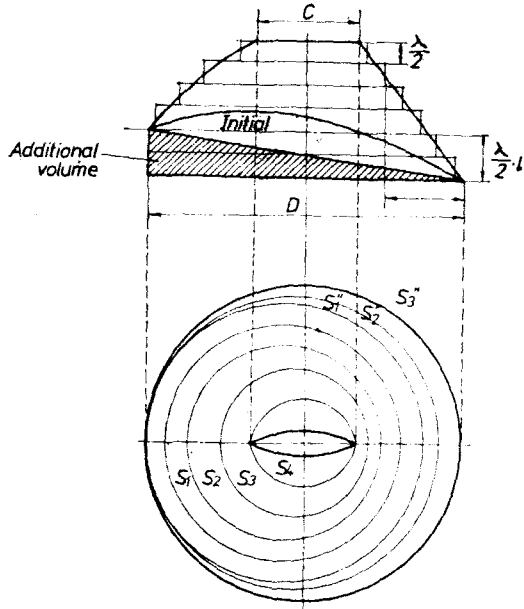


Fig. 8. Estimation of Deformed Volume

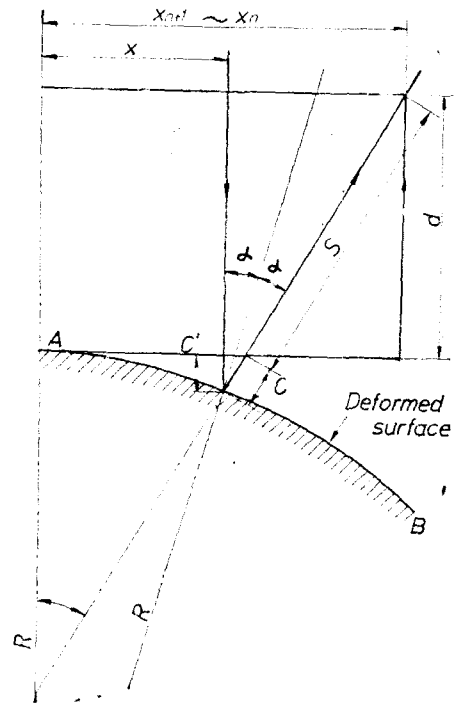


Fig. 9. Interference by Spherical Reflection

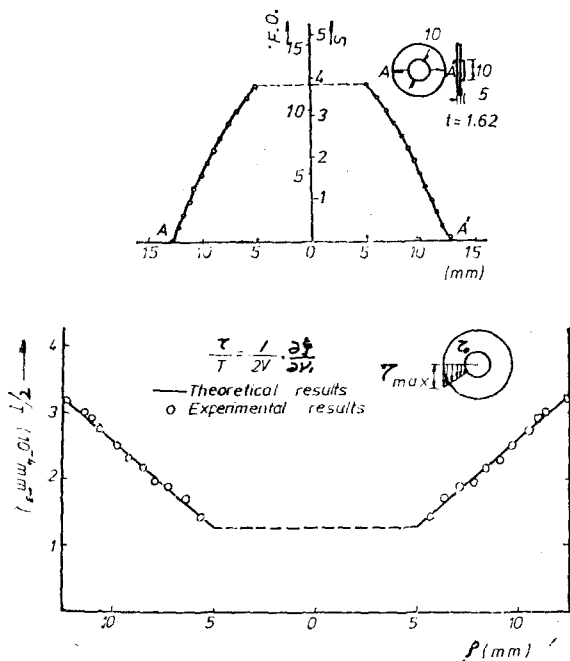


Fig. 10. Stress Distribution on a Hollow Cylinder

에서 알 수 있다.

(2) Fringe에 의한 비틀림應力의 解析

Michelson 光學系를 使用하여 얻은 各 Fringe 사이의 變位(高低差)도 (1)式으로써 주어짐은 쉽게 알 수 있다. 즉 $\lambda/4$ 의 奇數倍의 곳에서는 Dark Fringe가 이루어지고 따라서 Dark Fringe 사이의 高低差는 $\lambda/2$ 가 된다.

試片面에서 얻은 Fringe는 Optical Projector에 의하여 擴大投射되고, 이들 Trace한 等高線圖에서 (13)式의 傾斜 $\partial \epsilon / \partial v_1$ 은 다음과 같이 決定할 수 있다. (Fig. 7 참조).

지금 x_1, x_2, \dots, x_n 를 外部境界에서의 各 Fringe의 測定位置라 하고, x'_1, x'_2, \dots, x'_m 를 初期 Fringe에 對한 것이라 하면, x_n 點의 實地變位높이 H_n '는 다음과 같이 구할 수 있다. Tilting을 補正한 높이 H_n '는

$$H_n = (n-1) \frac{\lambda}{2} + \frac{B}{D} x_n \cdot \frac{\lambda}{2} \quad (14)$$

로 주어지고 이어서 初期 Fringe에 의한 높이를 빼면

$$\left. \begin{aligned} H_n' &= H_n - \frac{\lambda}{2} (m-1) - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{x_n - x'_m}{x_{m+1} - x'_m} \\ x'_m &\leq x_n \leq x'_{m+1} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

가 된다. 따라서 $x_{n+1} \sim x_n$ Fringe 사이의 實際높이의 差 H_n'' '는

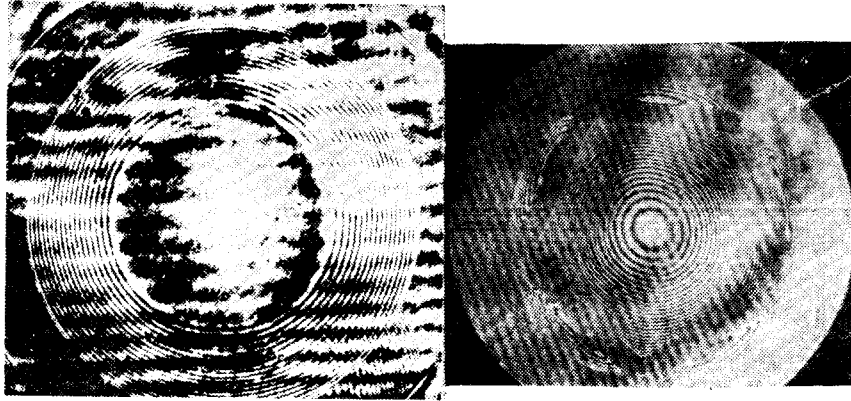


Fig. 10. Fringe Distribution on Hollow Cylinder

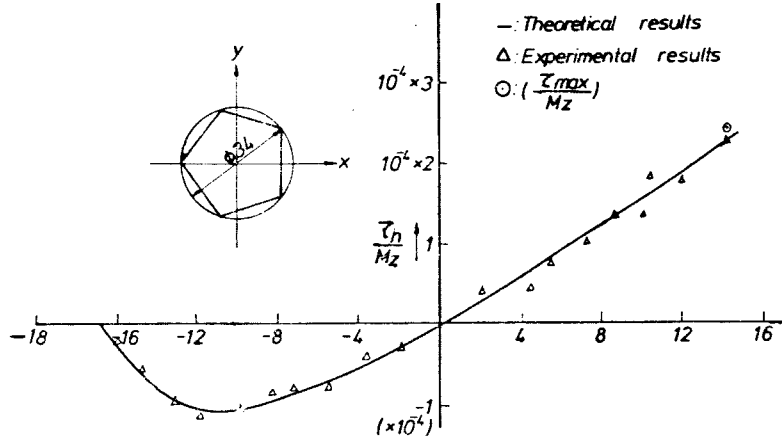


Fig. 11. The stress distribution of a regular-pentagen

$$H_n'' = H_n' - H'_{n-1} \quad (16)$$

로써 주어지고 内部境界尖端에서의 거리

$$x_n'' = \frac{1}{2}(D-C) - x_n + \frac{1}{2}(x_n - x_{n-1}) \quad (17)$$

의 點의 傾斜는 다음 式으로 주어진다.

$$\tan \phi_n = \frac{H_n''}{a_n}, \quad a_n = (x_n - x_{n-1}) \quad (18)$$

한편 (13)式的 膜의 變形體積 V 는 다음과 같이 하여 구할 수 있다. 지금 完全한 Fringe로 이루어지는 閉曲線의 各面積을 S_1, S_2, \dots, S_n 라 하고, 初期 Fringe에 對한 것들 S_1', S_2', \dots, S_n' 라 하면 Tilting를 除外한 體積 V' 는

$$V' = \frac{\lambda}{2} \left(\sum_{i=1}^n S_i - \sum_{i=1}^m S_i' \right) \quad (19)$$

가 된다. 여기서 Tilting에 對한 補正은 破斷曲線(外部境界에 의하여 끊겨진 Fringe)이 外部境界와 이루는 閉曲線의 面積을 各各 $S_1'', S_2'', \dots, S_n''$ 라 할 때 이들에 의한 體積 V'' 는(初期 Fringe에 對하여서도 같은 方法),

$$V'' = \frac{\lambda}{4} \cdot \sum_{i=1}^n S_i'' \quad (20)$$

로 주어지니 總變形體積은

$$V = V' + V'' \quad (21)$$

로 求할 수 있다. (Fig. 8 참조) 이들의 應力計算은 電子計算機에 의하여서 보다 간편하게 할 수 있다. 9)

(3) 測定誤差

이 光學系를 利用한 應力測定에서 豫想되는 測定誤差로서는 다음과 같은 것들을 들 수 있다.

- a. 試片의 加工에 의한 誤差
- b. 鋼板膜의 變形體積算定誤差
- c. 光學系自體에 內包되는 誤差

(球面反射로 因한 Fringe 結像位置의 不正確에 의한 誤差)

a.의 경우는 試片의 加工精度에 따라 左右된다. 表面의 平滑度에 의한 오차는 初期 Fringe에 對한 補正으로

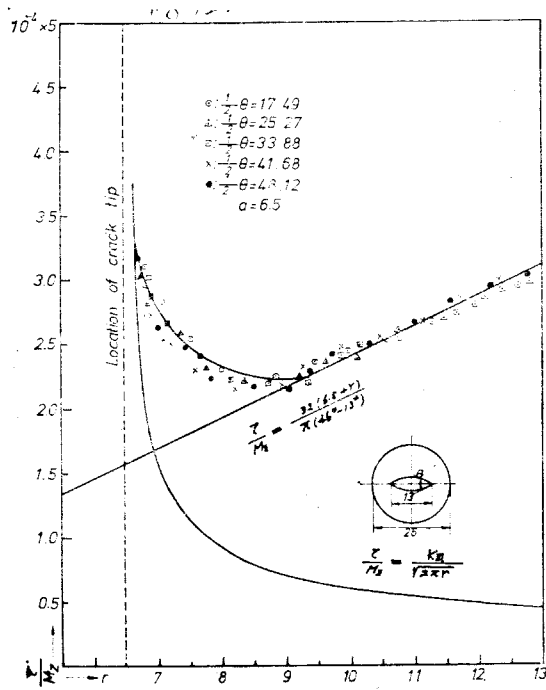


Fig. 12-a Torsional Stress Distribution on a circular cross section having the symmetrical crack

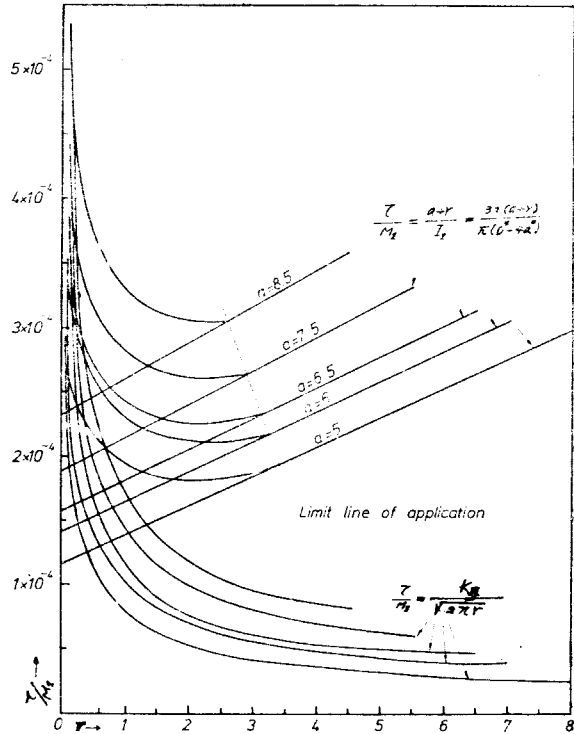
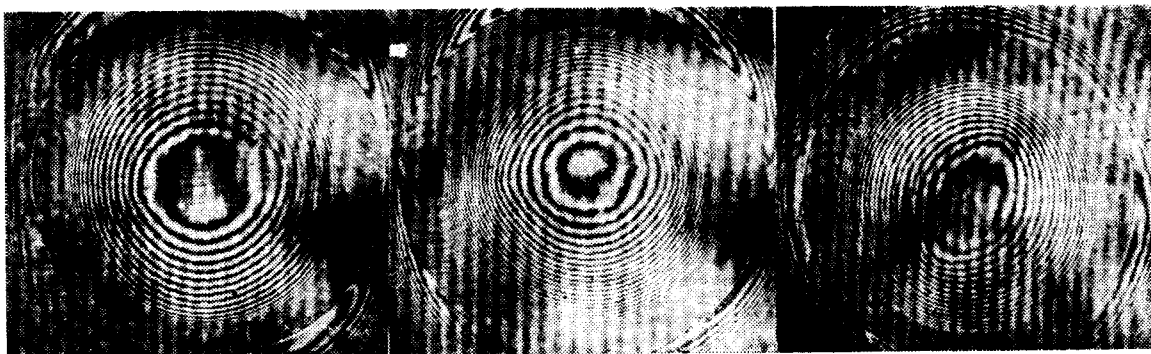


Fig. 12-b Contrast of Stress Distribution of various crack length



$p=0.75\text{Atm}$, $t=0.82\text{mm}$
 $\theta/2=43.58^\circ$, $2a=10\text{mm}$

$p=0.75\text{Atm}$, $t=1.05\text{mm}$
 $\theta/2=33.85^\circ$, $2a=13\text{mm}$

$p=0.6\text{Atm}$, $t=1.07\text{mm}$
 $\theta/2=52.64^\circ$, $2a=12\text{mm}$

Fig. 12-c

서 修正되나, 두께의 不均一은 精密한 加工만이 이를 Cover할수 있다. b.의 경우에서는 閉曲線의 Tracing을

10~20倍로 擴大된 投影像에서 얻으면 planimeter의 오차 1~3mm²를 감안하면 1/100~1/400mm²의 오차가 되

어 應力計算에 거의 영향을 주지 않는다. c 의 경우의 오차는 다음과 같은 光路計算에서 定量的으로 求할 수 있다. (Fig 9 참조)

Screen에 投影된 隣接 Fringe 사이의 거리 $x=x_n-x_{n-1}$ 에 對하여 試片위에서의 該高低差를 $\frac{\lambda}{2}$ 라 간주하였을 때 標準 Mirror와 試片의 두 反射光사이의 光路差는 變形試片위 x_n 에서의 曲率半徑을 R 라 할때

$$S+C=\frac{1-\eta}{\eta}R, \eta \text{는 結像의 倍率} \quad (22)$$

의 關係에서 標準 Mirror와 Screen 사이의 거리 d 및 曲面上的의 빛의 反射角 α 에 對하여

$$\lambda=c(1+\cos 2\alpha)+s-d \quad (23)$$

가 成立하고 $d=S\cos 2\alpha$ 를 代入하면

$$\lambda=c(1+\cos 2\alpha)+s(1-\cos 2\alpha) \quad (24)$$

가 된다.

$$R=\frac{x-(s+c)\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha} \quad (25)$$

가 되고 (22)式 및 (24)式에서

$$s+c=\frac{1-\eta}{\sin 2\alpha} \cdot x \quad (26)$$

를 연고, (25) 및 (26)式에서

$$c=\frac{\lambda}{2 \cos 2\alpha}-(1-\eta)\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 4\alpha} \cdot x \quad (27)$$

을 얻는다. 여기에서 $c'=c\cos 2\alpha$ 의 關係를 代入하면

$$c'=\frac{\lambda}{2}-\left(\frac{1-\eta}{2}\right) \tan \alpha \cdot x \quad (28)$$

가 되어 1 Fringe 마다의 마다의 高低差는 $\left(\frac{1-\eta}{2}\right) \tan \alpha \cdot x$ 로 表示되며 α 가 極히 작기 때문에 이들의 誤差는 거의 無視할 수 있다.

4. 測定の 實例

(1) 中空實軸의 비틀림 應力分布

우선 初步的 理論解를 가진 中空實軸에 對하여서는 Fig. 9에서 보는 바와 같이 매우 正確하게 理解解와 應力分布가 一致한다.⁷⁾ 오차는 1% 以內이다.

(2) 正 n 多角形의 應力解析

Fig. 10에 例示된 것은 正 5角形實軸에 對한 비틀림 應力 分布이다. 여기서 正 4角形에 對한 最大비틀림 應力은 Filon에 의하여

$$\tau_{\max}=F \cdot \frac{M_x}{I_p} \cdot R, \quad F=\left[\frac{A_0 R_0^2}{A_1 R_1^2}\right]^{\frac{1}{2}} \quad (30)$$

의 關係를 n 正多角形으로 擴張시키면

$$\left(\frac{\tau_{\max}}{M_x}\right)_n=0.001378 \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\tan \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{2\pi}{n} (1+\cos^2 \frac{\pi}{n})} \cdot \frac{1}{\lambda_1^3} \quad (31)$$

으로 表示되나, 이 式의 타당성은 이 測定法으로써 實證된다.⁸⁾ (Fig. 11 참조)

(3) 中心部에 對稱型 Crack를 가진 軸의 비틀림 應力 分布

純粹비틀림 moment가 作用하는 棒內의 中心對稱直線型 crack의 尖端應力擴大係數는 L. A. Wiggle worth 및 G. C. Sih⁹⁾에 의하여 다음의 式으로 주어진다.

$$\left. \begin{aligned} K_{III} &= \frac{k^4 K (1+c^2)^2}{2} \cdot \left[\frac{1-c^2}{1+c^2} \right]^{\frac{5}{2}} \\ &\cdot \left(\frac{1-c^2}{1+c^2} \right)^2 \left(1 - \frac{2c^2}{c^4} \right) - \left(\frac{E}{k} \right)^2 \\ &\cdot \frac{M_x}{8EK^2(E-k'^2) \left(1 - \frac{E}{K} \right) - \pi^2 k^2} \cdot a^{\frac{3}{2}} \\ k &= \frac{2c}{1+c^2}, \text{ 完全橢圓積分母數} \\ k' &= 1-k^2 \\ K &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}; \text{ 第1種橢圓積分} \\ E &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi; \text{ 第2種橢圓積分} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

開口角 θ , 길이 a 의 對稱型內部境界를 준 一連의 實驗에서 그 應力分布를 測定한 하나의 結果는 Fig. 12에 表示된 바와 같고

實驗式

$$\frac{\tau}{M_x}=(0.461 a-1.951) \times 10^{-6} \cdot e^{-(0.0037 a+1.298) a} + \left(\frac{a+r}{I_x} \right) \quad (33)$$

$$0.12 \leq r \leq 3.243-0.0857 a$$

에서 $r \leq 0.12 \text{ mm}$ 에서는 應力擴大係數에 의한 式이, 또한 $r \geq 3.423-0.0857 a$ 에서는 中空軸에 對한 一般式이 適用됨을 알 수 있었다.¹⁰⁾

5. 結 論

(1) Michelson 干涉에 의한 비틀림 應力測定은 從來의 薄膜測定法에 比하여 다음의 長點이 있다.

a) 全視野의 測定이 可能하다.

- b) 對稱型內部境界周邊의 應力測定에서 Balancing mechanism를 必要치 않는다.
- c) 膜의 壽命 및 初張力에 구애받지 않는다.

(2) 따로히 三次元應力凍結法¹⁰⁾에 의한 全視野的인 測定方法도 있으나,

- a) 內部境界에 sharp한 尖端이 存在할 때에는 이러한 구멍을 加工하기가 매우 어렵고
- b) 斜入法을 위한 slice를 오려내야하는 번거로움이 있다.

따라서 positive한 對稱內部境界를 줄 수 있는 本論文의 方法이 便宜한 것을 알 수 있다.

(3) 實際의 測定誤차는 알려진 理論解에 對하여 加工 精密度에 따라 1~0.7%임을 알 수 있었다.

6. 記號 및 參考文獻

(1) Symbols

- τ : Resultant shear stress
- M_z : Torsional moment
- r : Distance from crack tip
- a : Crack length
- θ : Crack opening angle
- M_z : Polar secondary moment
- ρ : Tip radius
- D : Diameter of specimen
- b : Radius of specimen
- φ, φ_i : Stress function
- θ : Torsional rigidity
- μ : Poisson's ratio
- Θ : Torsional angle per unit length
- T : Tensile force in membrane
- p : Pressure on membrane
- ξ : Perpendicular displacement
- ν : Distance, normal direction
- ν_1 : Ditto, in membrane
- G : Modulus of rigidity
- λ_1 : Scale ratio

- n : Number of fringe order
- B : Ditto, of broken fringes
- λ : Wave length, 6328Å
- n : Number of polyon
- F : Torsional factor ($=F' F_i$)
- R_i : Radius of largest inscribed circle in a cross section.
- I_p : polar 2ndary moment of section

(2) 參考文獻

1. M. Hetenyi: Hand book of Experimental stress Analysis. 1957. Jhon Wiley & Sons p. 725~731
2. A. A. Griffith & G. I. Taylor: The use of soap Films in Solving Torsion Problems. Great Brit. Rep and Mem. Aeronautical Research Comm.
3. Ken Ikeda: Soap Film Technique for Torsion Problems. Science Review, Vol. 2, No. 2, 1951.
4. 竹内洋一郎, 野田直剛: 各種異形板의 微小たわみの 測定. 日本機械工學會誌, Vol. 75, No. 625. 1971 p. 119~125.
5. 應力測定法: 應力測定技術研究會編: 朝倉書店. 1970 p. 444
6. 崔善浩: 對稱型中心노치를 가진 軸의 비틀림剪斷應力分布에 關한 研究: 嶺南大大學院論文. 1976. 2, p. 22
7. 崔善浩: Mickelson 干涉에 의한 순수비틀림 應力의 解析, 文教部研究費論文: 1975. 2.
8. 崔善浩, 黃在錫: 薄膜相似理論을 利用한 正多角形의 應力解析: 1976. 5 嶺大大學院 論文.
9. G. C. Sih, "Strength Singularities at crack tips for Flexural and Torsional problems". Jurnal of Applied Mechanics, Trans. ASME p. 419~425 Sept. 1963.
10. 辻二郎: 光彈性實驗法: 日刊工業出版部, p. 283~378