

<論 文>

# 板開口部應力集中에 關한 光彈性 實驗 및 有限要素解의 比較

孫 承 堯\*

(1978年 1月 20日 接受)

## Comparative Study on the Stress Concentration Around a Hole in Plates by the Photoelastic Experiments and by the Finite Elements Method

Seung Yo Son

### SUMMARY

A descriptive demonstration of the principles in the utilization of the two dimensional photoelasticimeter "TYPE ROBERT" is presented. This apparatus permits pointwise measures of the photoelastic characteristics in the birefringent materials. Two plate models are used to analyse the stress concentration effects around the hole, one in the state of plane stress, the other under the condition of distributed edge moments. For the latter case, stress freeze technique is adapted. Several slices are cut from the stress frozen model and photoelastically analysed. These same models are also analyzed by use of the finite element method. The photoelastic results show very good accordance with analytic solutions, while the finite element method looks less efficient for the particular problems treated.

### I. 序 論

開口部를 갖고있는 板에 荷重이 加해지면 開口部周圍에는 應力集中現象이 크게 일어난은 익히 알려진 事實이다. Kirsch<sup>1)</sup>, Howland<sup>2)</sup>, Savin<sup>3)</sup>, Stevenson<sup>4)</sup>, Filon<sup>5)</sup> 등은 無限長 또는 有限長의 薄板平面內에 荷重이 작용할 때 원형 또는 타원형 개구부주위의 응력집중에 관한 理論解를 求하였고 Green<sup>6)</sup>, Holgate<sup>7)</sup> 등은 平面內 또는 應曲荷重을 받는 薄板에 원형, 타원형, 矩形 또는 三角形의 開口部周圍의 應力集中현상을 複小數解로 일은 바있다. 本稿에서는 원형개구부를 가진 有限板의 平面內에 引張分布荷重이 작용하는 경우와 矩形開口部를 가진 矩形中厚板이 應曲分布荷重을 받을 때 開口部周圍의 應力分布狀態를 二次元 光彈性分析實驗結果와 有限要素解를 求하여 比較檢討한다.

### II. 光彈性 實驗

光彈性實驗은 Jobin et Yvon社 製作<sup>8)</sup> 二次元光彈性 分析機 Robert에 依하였는데 이기체는 分析結果를 직접 數値로 알려준다.

#### II. 1. 光彈性 分析機 Robert의 原理<sup>9)</sup>

單色光 波動特性은 다음 그림 1.a에 表示한 바와 같

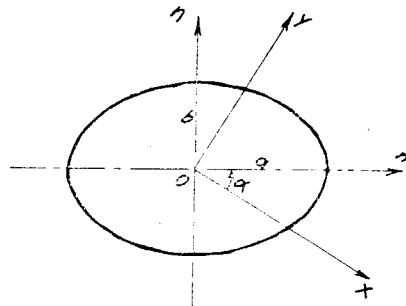


그림 1. a 단색광파동 타원

\* 正會員, 亞洲工科大學  
本 論文에 대한 討論은 1978年 5月 15日까지 本學  
會 事務室로 送付하여 주십시오.

이 基準水平軸OX와 長軸이  $\pi$ 範圍로 定義되는 타원 長短軸 $a, b$ 와 角 $\alpha$ 로 나타낼 수 있다. 그림 1.b에 표시한 Poincaré의 球를 사용하면 이 球面上의 한점과 주어

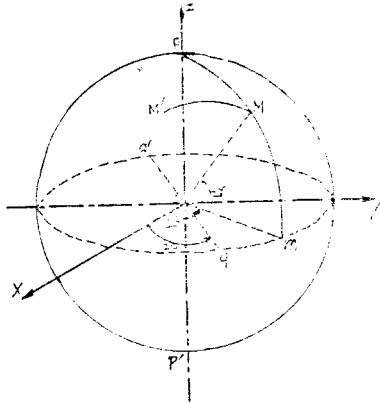


그림 1. b Poincaré의 구

진 光波動타원은 1대1 대응관계를 얻을 수 있다. 이 球는 單位半徑으로 中心을 O에 두고, 垂直軸 OZ가 球를 貫通하는 점 P와 P' 그리고 赤道平面 XOY로 정의 된다. 光波動타원과 Poincaré球와의 대응관계는 다음과 같다.

球面上의 한 점을  $m$ 이라 하고 이 점을 지나는 子午線이 赤道線과 만나는 점을  $m$ 이라 하자, 이때 각  $(\alpha, om)$ 이  $2\alpha$ 가 되고  $\tan \gamma = \frac{b}{a} \leq 1$ 이 되도록하면  $\angle moM = 2\gamma$ 인 관계를 얻을 수 있다. 이때  $2\gamma$ 는 上半球상에 있으면 陽의 값이고 代表點 M은 右波動이라 부르며 等緯度線들은 長, 短軸比와 方向이 같은 光波動을 表示하고 經度線들은 軸方向이 一致하는 光波動을 나타낸다. 赤道上에서 光波動은 線形이고 P와 P'점에서는 圓형 파동이 된다.

二重屈折성을 갖는 물체는 急進軸과 徐行軸의 두 波動軸을 갖는다. 이 두 軸을 따른 波動速度의 差는 두 波動性分間에 位相差  $\phi$ 를 주게 되는데 이 位相角  $\phi$ 는 두 主應力度의 差에 比例한다. 이러한 이중굴절성은 Poincaré球上에서는 赤道面上에 놓인  $qq'$ 축주위를  $\phi$ 만큼 회전하는 것으로 表示되는데 이들  $q$ 와  $q'$ 점은 OX軸과 急進 또는 徐行軸間의 交角 $\theta$ 의 두배에 해당한다. 따라서 이중 굴절체에 入射되는 光線  $m$ 은 이 M이  $qq'$ 軸 주위를  $\phi$ 만큼 회전한  $m'$ 점으로 나옴을 뜻한다. 逆으로 이중 굴절체에 入射하는 光線 $m$ 과 나오는 光線 $m'$ 을 알면 광선이 통과한 이중 굴절체의 성질을 類推해 낼 수 있음을 뜻한다. 예를 들어 入射光線이 P점에 놓였다 하고 (單色光이 右波動으로 圓편광된 경우)이 光線의 經路에 位相角  $\phi$ 가  $\frac{\pi}{2}$ 보다 적은 이중굴절체를 急進軸이 基準軸 OX와  $\theta$ 가 되게 놓았다 할 때 이중굴절

체에서 광선이 나오는 점은 入射點 P를  $qq'$ 軸주위를  $\phi$ 만큼 회전시켜 얻을 수 있음을 말한다. 이때 分光器 (Analyser)를 통하여 나오는 光線束은 다음 式으로 表示되는 에너지를 갖는다.

$$E = \frac{a^2 + b^2}{2} [1 + \sin \phi \cos 2(\beta - \alpha)] \quad (1)$$

단  $\beta$ 는 分光器와 基準軸과의 交角을 表示한다. 이때 分光器를 一定한 角速度 $\omega$ 로 회전 시키면 一定한 크기와 週期성을 갖는 두 光線束이 중첩된 결과를 얻는다.

即  $E_1 = \frac{a^2 + b^2}{2}, E_2 = \frac{a^2 + b^2}{2} \sin \phi \cos 2(\omega t - \alpha)$  (2) 만일 이 光束을 光電板에 投射시키면 各各  $E_1$ 과  $E_2$ 에 相應하는 電位差 ( $e_1, e_2$ )를 얻을 수 있는데 타원의 장 단축比를 나타내는  $\sin \phi$ 는 交番電位 $e_2$ 와 一定電位 $e_1$ 의 比로서 얻어진다. 分光器回轉速度의 2배에 해당하는 基準信號  $\cos 2\omega t$ 의 交番信號에 대한 位相  $2\alpha$ 는 廣타원에서 半長軸의 位置를 表示한다.  $\sin \phi$ 와 각  $2\alpha$ 를 알면 光이 통과한 이중 굴절체의 性質 즉 應력분포 상태를 파악할 수 있다. 또  $\sin \phi$ 로 부터  $\phi$ 를 결정하기 위하여는 시험모델의 應력상태를 알고 있는 점으로부터 연속적으로  $\sin \phi$ 를 측정하면 충분하다. 한편 각  $2\alpha$ 의 값은 기준축과 두 主應力度中 큰 應力度의 方向과의 交角  $\gamma$ 와를 관련시킬 수 있다. Poincaré球에 의하면 入射光線이 右波動 圓편광인 경우 廣타원의 長축은 이중 굴절체의 急進축을  $\phi$ 가  $0 < \phi < \pi$ 의 범위에서는  $-\frac{\pi}{2}$ 만큼  $\pi < \phi < 2\pi$ 의 범위에서는  $\frac{\pi}{2}$ 만큼 兩極(P, P')을 잇는 軸線주위를 회전시켜 얻을 수 있다. 이 결과는 入射光線이 左波動 圓편광인 경우에는 反對가 된다.

## II. 2. 平面內 應力實驗

### II. 2.1 實驗裝置

均一分布된 平面應力을 얻기 爲한 實驗모델은 그림 2에 표시한 바와 같다. 이에 使用한 材料는 光彈性係數가 4.1Brewster인 Altuglas M70으로 잔류이중굴절성을 거의 무시할 수 있는 것이다. 彈性係數는 6.5~7.5 daN/mm<sup>2</sup>의 引張強度에 대하여 280daN/mm<sup>2</sup> 정도이며 20°C의 常溫에서 탄성限界는 3daN/mm<sup>2</sup> 정도이다. 本試驗에 使用한 板은 300×150×4mm의 크기로서 판 중앙에 圓형구멍을 뚫었다. 그림 2와 같이 長方向으로 引張力이 分布되도록 하였으며 板의 크기를 一定히 하고 구멍의 크기를 바꾸면서 그 주위의 應력집중 현상을 측정하였다.

### II. 2.2 測 定

荷重과 모델의 對稱성을 이용하면 測定은 板의 1/4만으로 充分하다. 이 分部에 對하여 應力 Gradient가 큰 구멍부근은 잔 눈금의 格子를 만들고 기타 부분은 성근격자로 하여 각 격자의 交點에서 位相差  $\sin \phi$ 와 기준축과 廣타원 長축과의 交角  $2\alpha$ 를 읽었다. 이 測定에

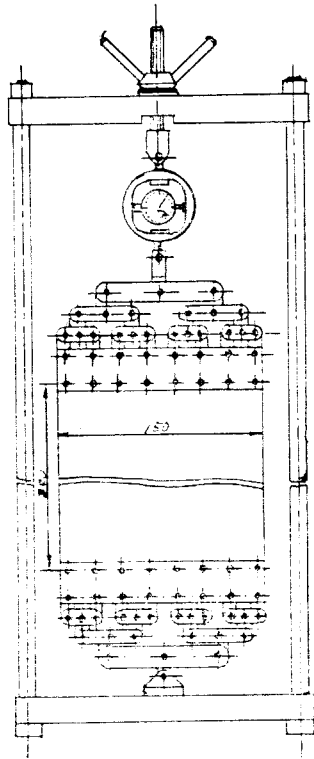


그림 2. 평면응력실험모델

사용한 光線은 波長 6328Å의 赤色 laser로서 焦點거리를 적절히 맞추면 약 1/100~2/100mm 직경의 點으로 試驗 板에 入射된다.

II.2.3 應力의 分離

다음 그림 3에서 보는 바와 같이 格子上的 한 점을  $M_i^j$ 라 하자. 添子  $i$ 는 橫線을,  $j$ 는 縱線을 表示한다. 勿論 間隔  $\Delta x, \Delta y$ 는 正確度에 따라 任意로 細分할 수 있다

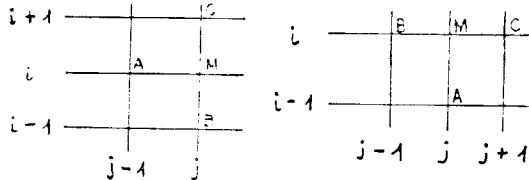


그림 3. 유한차 격자

直交座標系에서 平面應力度 平衡式은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

點  $M_i^j$ 에서 有限差(Finite Differences) 方法을 쓰면 윗 式은 다음과 같이 쓸 수 있다. 먼저  $ox$ 軸을 따라서

$$\frac{\sigma_{xi}^j - \sigma_{xi}^{j-1}}{x^j - x^{j-1}} = \frac{\tau_{i+1}^j - \tau_{i-1}^j}{y_{i+1} - y_{i-1}} \quad (4)$$

$$\text{또는 } \sigma_{xi}^j = \sigma_{xi}^{j-1} - (\tau_{i+1}^j - \tau_{i-1}^j) \frac{\Delta x}{2\Delta y} \quad (5)$$

$oy$ 軸을 따라서

$$\sigma_{yi}^j = \sigma_{yi}^{j-1} - (\tau_{i+1}^j - \tau_{i-1}^j) \frac{\Delta y}{2\Delta x} \quad (6)$$

Maxwell에 依하면 두 主應力度의 差는 位相差  $\phi$ 에 비례하고 式 (2)와 stress Invariant關係를 이용하여  $M_i^j$ 점에서의 剪斷應力度를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\tau_i^j = \frac{1}{2} \phi_i^j \sin 2\alpha_i^j \quad (7)$$

但  $\alpha'$ 은 式(1)의  $\alpha$ 에서 使用材의 擴탄성계수, 입사광선의 左右波動特性等에 따라 補正한 값이다.

그림 3에서 A점의  $\sigma_x$ 와 B와 C에서의  $\tau$ 를 알면 M점의  $\sigma_x$ 를 式(5)에서 구할 수 있고 마찬가지로  $\sigma_y$ 도 (6)식으로 구할 수 있다. 특히 試驗板의 自由境界에서는 윗 式 (5)와 (6)을 同時에 적용할 수가 없으므로 式(7)을 變形하여

$$\sigma_{xi}^j - \sigma_{yi}^j = \phi_i^j \cos 2\alpha_i^j \quad (8)$$

로부터 境界를 따라 한점에서 다른 境界점으로 계속하여 계산해 갈 수 있다. 따라서 式 (5), (6), (7), (8)을 이용하여 位相差  $\phi$ 와 각  $\alpha'$ 을 측정한 모든 점에서의 수직應力度를 계산하면 主應力度는

$$\sigma_I = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \phi}{2}, \quad \sigma_{II} = \frac{\sigma_x + \sigma_y - \phi}{2} \quad (9)$$

로 구할 수 있는데 이를 바꾸어 쓰면

$$\sigma_I - \sigma_{II} = \phi, \quad \sigma_I + \sigma_{II} = \sigma_x + \sigma_y \quad (10)$$

이 되므로 첫번째 식에서 두 주應력도중 어느 하나가 零이면 다른 하나는 바로 位相差  $\phi$ 와 일치함을 알 수 있다. 따라서 平面應力을 받고 있는 部材가 自由境界라든가 대칭關係등으로 어느 한 主應力度가 영이되는 경우 특히 本稿에서와 같이 開口部周圍의 應力集中度를 求하는 경우 位相差  $\phi$ 만으로 應력집중 계수를 구할 수 있음을 알 수 있다.

II.3 矩形板 應曲荷重實驗

板應曲問題를 光彈性法으로 실험하는 것은 前節의 平面應力의 경우처럼 간단치 않다. 왜냐하면 應曲部材의 引張과 壓縮은 板中立面에 대하여 대칭으로 일어나며 예를 들어 引張側에 入射되어 急進徐行 두 軸으로 偏光된 것이 壓縮側을 通過하면서 다시 入射時와 마찬가지로 원편광으로 되돌아오기 때문이다. 이러한 難點을 해결하기 위하여 Goodier<sup>(10)</sup>, Durelli<sup>(11)</sup> 등은 Sandwich method, Creep method 등의 특수한 실험方法을 고안한 바 있으나 本稿에서는 中厚板에 應曲荷重을 准後 이를 加熱爐에 넣고 臨界溫度까지 올렸다 내림으로써 應力凍結狀態를 얻고 이 板을 두께方向의 薄片(slices)으로 잘라 中立面에 平行한 方向으로 laser 光을 透過시킴으로서 引張側과 壓縮側의 應力狀態(即 이중굴절 정도)를 測定하였다.

II.3.1. 實驗 모델

本 實驗에 사용한 Araldite판의 諸元은 다음 그림과 같다.

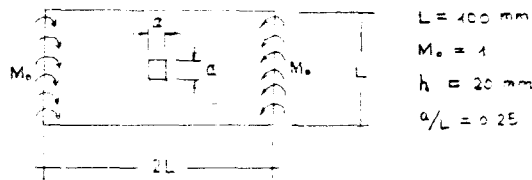


그림 4. 판 응곡 모델

板 兩端의 分布모멘트는 單純지지部 左右를 내다지板으로 하고 여기에 線荷重을 걸어 支持部에 均一 分布모멘트가 作用도록 하였으며 中央部 구멍은 Corner effect라 불리는 殘留二重屈折性を 避하기 爲하여 작은 半徑의 圓으로 했다. 또 材料自身이나 板 製作中에 包含될 수 있는 잔류응력을 除去하기 爲하여 試驗板을 載荷前에 加熱爐에 넣고 臨界溫度(約140°C)까지 서서히 (3~5시간에 10°C씩) 올렸다 내림으로서 Stress relaxation을 시켜 잔류응력여부를 재재식 광탄성기로 확인한 후 荷重을 걸어 應力凍結課程을 反復하였다. 한편 開口部周圍의 應力集中度를 比較하기 爲하여 위 試驗板과 同一한 諸元을 가지나 中央部에 구멍이 없는 板에 同一한 荷重을 걸어 應力凍結後 位相差를 측정하므로써 그림4에 보인  $M_0$ 에 해당하는 位相角을 얻었다.

II.3.2 測定

位相角 測定用 薄片은 3mm 두께로서 本稿에서는 便宜上 板 平面內의 두 主應力度中 하나(即  $M_0$ 에 平行한 應力)에 平行한 方向으로 잘라내었다. 이 薄片上의 어느 한 點에서 測定한 位相差는 中立面에 對하여 對稱을 이루며 그 一例를 그림5에 나타내었다. 여기서 注目할 것은 이와같이 測定하여 그린 位相角圖의 기울기 基壇으로 구멍이 있을 때와 없을 때의 임의점의 드넌트 比  $M/M_0$ 를 구할 수 있다는 점이다. 왜냐하면 구멍이 있을 때와 없을 때의 位相角圖의 기울기 比는  $M/M_0$ 에 비례하기 때문이다.

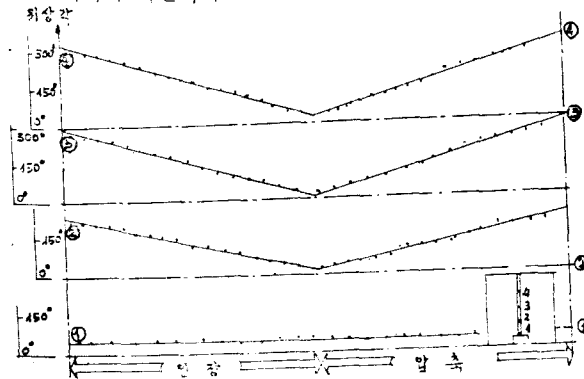


그림 5. 판두께에 대한 위상차(각도)

III. 有限要素 解

III.1. 平面應力型 有限要素

本稿에서 使用한 有限要素는 원형개구부주위를 쉽게 分割할 수 있는 3각형 평면응력형 有限요소로서 要素當 6個의 節點自由度를 가진 線型變位一 一定變形度要素 이다. 이 때 變位는 各 要素 境界面에서 連續이며 變形度는 收斂條件를 滿足한다(Ref.12, p.48)

III.2. 板應曲 有限要素

本稿에서는 中厚板 또는 厚板에서 볼 수 있는 수직전단응력도를 고려한 有限요소를 使用하였다. Son<sup>13)</sup>은 中厚板要素로서 要素當 20個의 節點自由度를 가진 矩形近似要素를 提案하였다. 이 要素의 特徵을 보면 要素間 變位連續條件을 近似的으로 滿足시키면서 收斂條件도 充分하여 아주 성균 格子分割에서도 매우 신속히 收斂하는 長點을 보여주고 있다. 다만 本稿의 問題처럼 應力集中度가 큰 경우, 矩形格子를 조밀히 分割하므로써 全體自由度가 너무 방대해져 컴퓨터 使用時間에 다소 無理가 있다.

IV. 實驗 및 計算結果 比較

IV.1. 平面應力問題

實驗結果는 開口部周圍의 應力集中係數  $k = \sigma/\phi_0/\phi_0$ 는

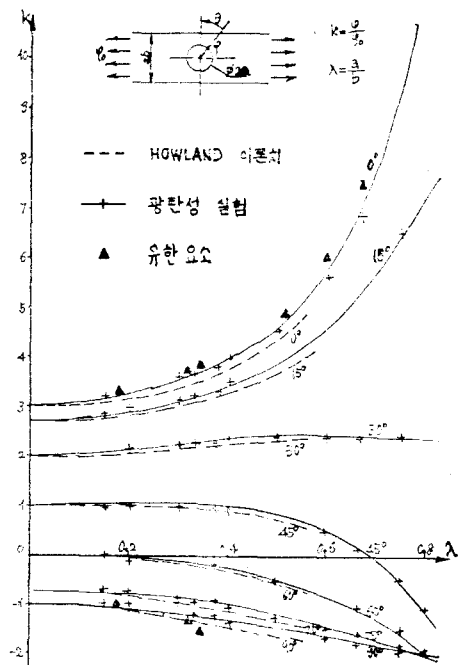


그림 6. 개구부 응력집중계수 변화(평면응력)

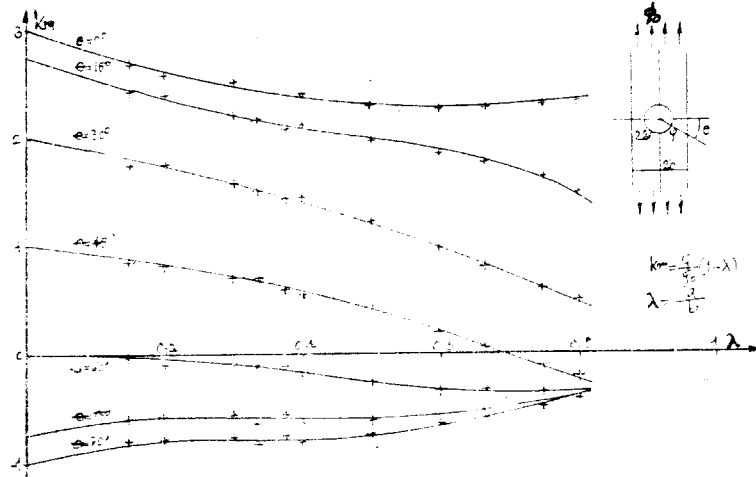


그림 7. 최고단면에 대한 개구부 응력집중계수변화

開口部가 없을 때의 位相角)를 求하여 이를 그림6에 나타내었다. 여기서 有限要素 結果는  $\theta=0^\circ$ 와  $\theta=90^\circ$ 인 경우만 표시하였는데  $90^\circ$ 의 경우 理論值나 實驗值로부터 큰 偏差가 있음을 볼 수있다. 그림7에는 板最小斷面 平均應力  $\sigma_m$ 에 대한 應力集中係數  $k_m$ 을 圖示하였는데 이는 다음式으로 간단히 계산할 수있다.

$$k_m = \frac{\phi}{\phi_0}(1-\lambda), \quad \text{但 } \lambda = \frac{a}{b} \quad (11)$$

이 結果를 그림6과 比較하면 매우 흥미있는 差異를 볼 수 있는데 집중계수가 최대치 3을 넘지 않는다. 또  $a$ 에 대한 집중계수의 變化曲線이 급격하지 않다.

IV. 2. 板應曲問題

實驗結果와 有限要素解를 그림8에 比較圖示하였다. 平面應力問題에서보다 實驗值와 數值解間에 큰 偏差를

보이는 것은 첫째 板加工, 應力凍結, 薄片細工, 그리고 이중굴절성측정에 비교적 人爲的誤差發生可能性이 있고 둘째 有限要素 格子구성에 있어서 開口部周圍의 細分制約으로 Stress Gradient에 알맞는 格子分割이 어려웠는데 基因되는 것 같다.

V. 結 論

laser에 의한 靚탄성 실험법은 현재 3차원 문제를 Pointwise로 측정할 수 있는 段階로 개발되고 있으며 특히나 模型全體의 應力狀態를 밝혀 낼 수있는 唯一한 實驗法이라 할 수 있으며 有限要素는 現在 구조물 應력해석 또는 설계에 가장 널리 사용되고있다. 다

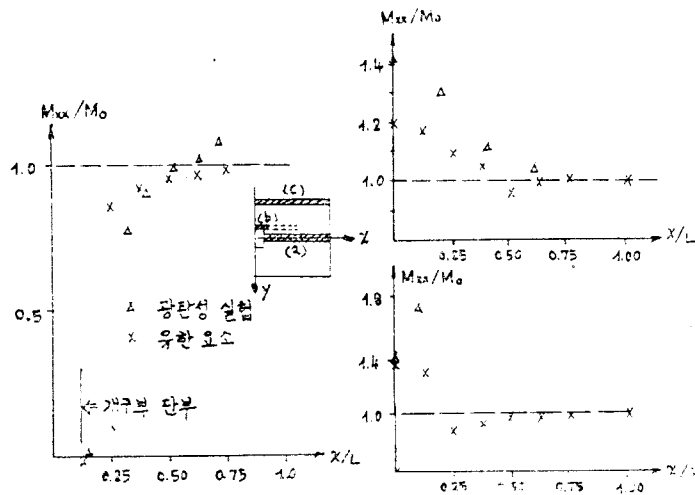


그림 8. 모멘트 비  $M_{xx}/M_0$ 의 비교

만 이 방법이 가지는 취약점이나 使用要素의 應答擧動에 대한 充分한 理解로서 特定問題해결에서 발생하기 쉬운 特殊性들을 說明하여야 할 것이다.

本 研究는 위 두가지 方法에 依한 應력해석 結果를 比較한 바 制限된 실험대상으로 일반적 結論을 내리기는 어려우나 모델化 과정에서의 적절한 판단은 충분히 精度 높은 結果를 얻을 수 있을 것으로 생각된다.

### 參 考 文 獻

1. Kirsch G., "Theory of Elasticity" (Timoshenko and Goodier)
2. Howland R.C.J. "On the Stress in the Neighbourhood of a Circular Hole in a Strip under Tension", *Phil. Transaction A*, Vol.229, 1930
3. Savin G.N., "Stress Concentration Around Holes", Pergamon Press, New York 1961.
4. Stevenson, "Theory of Elasticity" (Timoshenko and Goodier)에서 引用.
5. Filon, "Biharmonic Analysis in a Perforated Strip" (Howland)에서 引用. *Transaction Royal Soc. A*, Vol.201, 1903
6. Green A.E., "The Transverse Flexure of Perforated Isotropic Plates" (Holgate)에서 引用. *Proc. Roy. Soc. A* 180, 1942
7. Holgate. "The Transverse Flexure of Perforated Isotropic Plates", *Proc. Roy. Soc.* Vol.185A, 1946
8. Jobin, Yvon, *Instructions Pour L'utilisation Photoelasticimetre Bidimensionnel Automatique*
9. Robert A, "Methodes Nouvelles en Photoelasticimetre a Deux Dimensons Et a Trois Dimensons", *Memorial de L'artillerie Francaise T40*, 1<sup>er</sup> Fascicule 1966.
10. Goodier J.N. and Lee G.H., "An Extension of the Photoelastic Method of Stress Measurements to Plates in Transverse Bending", *Trans. ASME*63, 1941.
11. Durelli A.J. and Daniel I.M., Photoelastic Investigation of Residual Stress in Glass Plastic Composites", 16<sup>th</sup> Conf. *Reinforced Plastics Div.*, (19A), 1961.
12. Zienkiewicz O.C. "The Finite Element method in Engineering science", *McGraw Hill*, London 1971
13. Seung Yo Son "Contribution a L'etude du Comportement en Flexion des Plagues D'epaisseur Moyenne a L'aide de la Methode des Elements Finis" *These Docteur-Ingenieur*. Univ. de Nantes, 1977..