

< 論 文 >

有限두께를 가지는 圓形管內의 凝固過程의 熱傳導

李 文 柱* · 盧 承 卓**

(1978年 1月 25日 接受)

Heat Conduction of the Solidification Process in a Cylinder
with Finite Thickness

Moon Joo Lee and Sung Tack Ro

Abstract

The solidification process in a cylinder with finite thickness is studied by explicit finite difference method. The temperature distribution, the solidification front profile and the discharged latent heat for the process are obtained. It is found that the solidification front profile is almost linear except in the vicinity of the initiation of phase change. This result motivates us to use linear relations between the position of solidification and time for approximate calculations.

Nomenclature

- | | |
|---|---|
| <p>D: dimensionless discharged latent heat during solidification process defined by Eq. (9);</p> <p>k: thermal conductivity;</p> <p>K_0: parameter defined by Eq. (6);</p> <p>L: latent heat of solidification per unit mass</p> <p>Q_D: discharged latent heat during solidification process defined by Eq. (8);</p> <p>r: dimensional space coordinate;</p> <p>R_i: radius of inner boundary;</p> <p>R_o: radius of outer boundary;</p> <p>$s(t)$, dimensionless position of solidification front defined by Eq. (4);</p> <p>$S(\tau)$, dimensional position of solidification front;</p> <p>t, nondimensional time defined by Eq. (4);</p> <p>T, temperature;</p> <p>T_f, freezing temperature of the liquid;</p> | <p>x, dimensionless space coordinate; defined by Eq. (4);</p> <p>α, thermal diffusivity;</p> <p>β, thickness ratio defined by Eq. (7);</p> <p>ϵ, thickness ratio defined by Eq. (7a);</p> <p>θ, nondimensionalized temperature defined by Eq. (4);</p> <p>ρ, mass density;</p> <p>τ: time;</p> <p>τ_b: time for solidification beginning;</p> <p>Subscripts</p> <p>f: property at the solidification front;</p> <p>i: initial value;</p> <p>o: property at the outer boundary;</p> <p>1, variable associated with solid region;</p> <p>2, variable associated with liquid region;</p> <p>3, variable associated with outer vessel;</p> |
|---|---|

* 正會員, 서울대학교 대학원

** 正會員, 서울대학교 공과대학

本論文에 對한 討論은 1978年 5月 15日까지 本學
會 事務室로 送付하여 주십시오.

1. 서 론

Stefan의 극지방 얼음의 두께에 대한 소위 말하는

“Stefan의 문제”¹⁾를 시작한 이래 지난 수십년간 응고 또는 용해에 대한 연구가 많은 사람들에 의해 계속되었다. 특히 최근들어 태양열 이용이 점차 대두됨에 따라 냉난방용이나 발전소용의 축열장치의 연구가 활발히 진행되어 액체 금속을 포함한 물질의 잠열형태로서의 에너지 저장에 중요성을 띄게된 것이다.

상변화시의 열전달문제는 비정상, 비선형으로 되어 상당한 가정이 포함된 특수한 경우를 제외하고는 해석적인해가 얻어지기 곤란하므로 많은 근사해가 시도되기도 하였다. Pekeris 등에 의한 액체의 원통벽에서의 응고에 대한 근사해²⁾, 이동경계면에 대한 비정상해석³⁾, Tien과 Churchill⁴⁾에 의한 유한 차분법의에도 London 및 Seban⁵⁾, Shih 및 Tsay⁶⁾ 등이 여러 기하학적 형태 및 조건에 대하여 연구를 수행한 바있다. 최근에 Churchill과 Gupta⁷⁾는 2차 및 3차원을 포함한 각종 경계조건 및 기하학적 형태에 적용할 수 있는 근사법에 대한 모델을 제시하기도 하였다.

그러나 지금까지의 취급은 상변화물질만에 대한 열전달해석으로 실체는 축열계에 있어서 나타나는 축열조 축열교환기를 통한 열전달의 해석이 필요하게 된다. 또한 축열조 자체가 현열형태의 축열매질이 되므로 이를 포함한 해석역시 중요한 일로 생각된다. 여기서는 유한두께를 가진 원통내의 물질이 응고함에 있어 따르는 열전도 해석을 행하고자 한다.

2. 해 석

2.1 기본방정식

이 논문에서 취급된 계는 Fig. 1에 표시된바와 같다. 최초 T_i 의 균일한 온도에 있던 액체상태의 물질과 유한 두께의 원통이 원통외벽의 온도를 물질의 응점보다

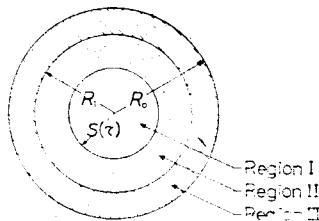


Fig. 1. Configuration of the system after the occurrence of the phase front.

낮은 T_o 로 변화시켜 유지시킬 때 원통내부에서 외부로 반경방향에 따른 열전달이 시작된다. 이 해석에서는 다음과 같은 가정이 사용되었다.

- (1) 각상에서의 물질의 상태는 등방성이고 균일하다.
- (2) 관계되는 열물성치는 각상에 대하여 균일하다.

(3) 액상에서 대류는 일어나지 않는다.

(4) 원통은 축방향으로 무한길이를 가져 양단부에 의한 영향은 없다.

이상과 같은 가정하에 다음과 같은 방정식이 성립된다.

$$\frac{\partial T_1}{\partial \tau} = \alpha_1 \left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_1}{\partial r} \right), \quad 0 \leq r \leq S(\tau) \quad (1a)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial \tau} = \alpha_2 \left(\frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_2}{\partial r} \right), \quad S(\tau) \leq r \leq R_i \quad (1b)$$

$$\frac{\partial T_3}{\partial \tau} = \alpha_3 \left(\frac{\partial^2 T_3}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_3}{\partial r} \right), \quad R_i \leq r \leq R_o. \quad (1c)$$

여기서 하첨자 1은 액체상, 2는 고체상, 3은 고체응기를 나타내고 α_i 는 각각의 열확산율이다. 또한 $S(\tau)$ 는 상변화가 일어난 고체상의 전면까지의 반경을 표시한다. 최초 특정 시간동안은 고체상의 출현이 없는 상태로 열전달이 진행되므로 고체상이 나타나기 전과 후에 대하여 이식들에 대한 경계조건은 두가지로 나누어 기술할 수 있다.

(1) 고체상이 발생하기 전

$$T_1 = T_3 = T_i \quad \tau < 0 \quad (2a)$$

$$T_3 = T_o \quad \tau \geq 0, r = R_o \quad (2b)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial r} = 0 \quad r = 0 \quad (2c)$$

$$rT_1 = T_3 = R_i \quad (2d)$$

$$k_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} = k_3 \frac{\partial T_3}{\partial r} \quad r = R_i \quad (2e)$$

(2) 고체상이 발생한 후

$$T_1 = T_2 = T_f \quad r = S(\tau) \quad (3a)$$

$$T_2 = T_3 \quad r = R_i \quad (3b)$$

$$k_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} = k_3 \frac{\partial T_3}{\partial r} \quad r = R_i \quad (3c)$$

$$T_3 = T_o \quad r = R_o \quad (3d)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial r} = 0 \quad r = 0 \quad (3e)$$

$$k_1 \frac{\partial T_1(S, \tau)}{\partial r} - k_2 \frac{\partial T_2(S, \tau)}{\partial r} = -\rho L \frac{dS}{d\tau} \quad (3f)$$

방정식 (1)과 경계조건 (2), (3)을 이용한 해는 먼저 원통내부에 고체상이 발생하는 시간 τ_0 를 방정식 (1)과 경계조건 (2)를 이용하여 찾아낸 후 시간 τ_0 에서의 온도 T_1, T_2, T_3 를 초기조건으로 시작하여 경계조건 (3)을 이용하여 해결할 수 있다.

2.2 방정식의 무차원화

응용의 범위를 일반화하기 위하여 적합한 기준상태를 잡아 방정식 및 경계조건을 무차원화 한다. 축 길이, 시간 및 온도의 기준을 $R_o, \frac{R_o^2}{\alpha_1}, T_i - T_o$ 로 잡아 다음의 무차원화된 방정식이 구하여진다.

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \theta_1}{\partial x}, \quad 0 \leq x \leq s(t) \quad (4a)$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial t} = \alpha_{12} \left(\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \right), \quad s(t) \leq x \leq \varepsilon \quad (4b)$$

$$\frac{\partial \theta_3}{\partial t} = \alpha_{13} \left(\frac{\partial^2 \theta_3}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \theta_3}{\partial x} \right), \quad \epsilon \leq x \leq 1, \quad (4c)$$

여기서 $\theta = \frac{T - T_0}{T_2 - T_0}$,

$$x = r/R_0,$$

$$t = \tau / (R_0^2 / \alpha_1),$$

$$\epsilon = R_i / R_0,$$

$$\alpha_{12} = \alpha_2 / \alpha_1,$$

$$\alpha_{13} = \alpha_3 / \alpha_1,$$

$$s(t) = S(\tau) / R_0$$

이다. 이에 수반되는 경계조건은 다음과 같다.

(1) 고체상이 발생하기 전

$$\theta_1 = \theta_3 = 1 \quad t < 0 \quad (5a)$$

$$\theta_3 = 0 \quad t \geq 0, \quad r = R_0 \quad (5b)$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial x} = 0 \quad x = 0 \quad (5c)$$

$$\theta_1 = \theta_3 \quad x = \epsilon \quad (5d)$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial x} = k_{13} \frac{\partial \theta_3}{\partial x} \quad x = \epsilon \quad (5e)$$

여기서 $k_{13} = k/k_1$ 을 표시한다.

(2) 고체상이 발생한 후

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 \quad x = s(t) \quad (6a)$$

$$\theta_2 = \theta_3 \quad x = \epsilon \quad (6b)$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial x} = k_{23} \frac{\partial \theta_3}{\partial x} \quad x = \epsilon \quad (6c)$$

$$\theta_3 = 0 \quad x = 1 \quad (6d)$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = 0 \quad x = 0 \quad (6e)$$

$$\frac{\partial \theta_1(s, t)}{\partial x} - k_{12} \frac{\partial \theta_2(s, t)}{\partial x} = -K_0 \frac{ds}{dt} \quad (6f)$$

여기서 $k_{12} = k_2/k_1$

$$k_{23} = k_3/k_2$$

$$K_0 = \frac{\rho L \alpha_1}{k_1 (T_i - T_0)} \text{ 이다}$$

2. 3유한차분법에 의한 수치해

무차원화 된 방정식과 경계조건(4)~(6)은 표준적인 유한 차분법에^{8),9)} 의하여 explicit difference equations으로 상변화가 발생하기 전과 후의 2가지로 나누어 계산되었다. 식 (4a)(4c)와 (5)에서 빙점에 해당되는 온도가 발생하기까지 계산을 행하고 이때의 시간 t_b 로부터 식 (4) 및 (6)을 이용하여 전 구간이 응고하기까지 계산이 수행되었다.

반경방향의 무차원 길이에 대한 node의 수는 16개로 고정하였으며 시간축에 대한 node수는 계산상의 안정성을 고려하여 정하여 졌으며 그수는 4000-10000에 이르렀다.

식 (4)~(6)에 표시되어 있듯이 온도분포 $\theta = \theta(x, t)$

는 기하학적형상에 대한 파라미터 뿐 아니라 물성치와 연관된 파라미터의 수가 6개에 이르러 결과치의 도식적 표현은 사실상 불가능하거나 대단히 어렵게 된다. 따라서 특정히 제시된 물성치의 파라미터군 3가지에 대하여 기하학적 형상파라미터인

$$\beta = (R_0 - R_i) / R_i \quad (7)$$

$$\text{즉} \quad \beta = 1 - \epsilon \quad (7a)$$

의 값변화에 따른 영향을 조사하였다. 사용된 파라미터군은 Table 1과 같다

Table 1. Parameters used for computation

	case 1	case 2	case 3
$k_{12} = k_2/k_1$	2.00	1.19	2.11
$k_{14} = k_3/k_1$	3.27	0.719	1.16
$\alpha_{12} = \alpha_2/\alpha_1$	2.42	1.12	2.23
$\alpha_{13} = \alpha_3/\alpha_1$	6.46	0.276	0.242
K_0	0.230	1.10	1.39

Table 1 에 표시된 세 경우는 원통의 재료를 철로하였을 때 case 1은 강 또는 이에 대응하는 성질을 갖는 재료의 경우 case 2는 나트륨(Na), case 3은 칼리움(K)의 경우로 생각할 수 있다.

3. 결과 및 토론

방정식 (4)~(6)으로부터 계산된 무차원온도 θ 가 case 1~3에 대하여 Fig 2~4에 원통의 무차원 두께 $\beta = 0.125, 0.25, 0.375$ 및 0.5 를 파라미터로 표시되었다. 그림에서 수평으로 나타난 부분은 상변화과정을 나타낸다. case 1에서 응고과정이 완료되는 시간은 β 가 증가됨에 따라 감소되고 case 2 및 3에서는 반대로 두께가 큰 원통의 경우 시간이 길어짐을 알 수 있다.

Figure 5~7에 응고전면의 위치가 시간의 함수로 표시되어 있다. 응고전면의 진척은 상변화초기를 제외하고는 거의 직선적으로 변화함을 알 수 있다. 이로서 근사해를 요하는 경우 응고전면 속도를 직선함수로 가정한 해가 실용적으로 적용될 수 있을 것으로 생각된다. Figure 8~10은 방사되는 잠열의 양을 시간의 함수로 case 1~3에 대하여 무차원화하여 표시한것이다. 응고가 시작된 후부터 시간 τ 사이에 방출된 열량은

$$Q_D = - \int_{\tau_0}^{\tau} \rho L \frac{dS}{d\tau} 2\pi S d\tau \quad (8)$$

로 표시되므로 무차원 방출량 D 를 총방출량에 대한 시간 τ 에서의 방출량 Q_D 로 정의하면

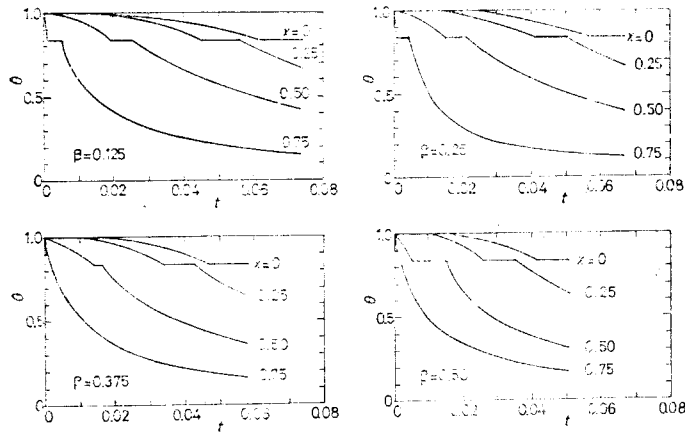


Fig. 2. Dimensionless temperature vs. dimensionless time for the case (1)

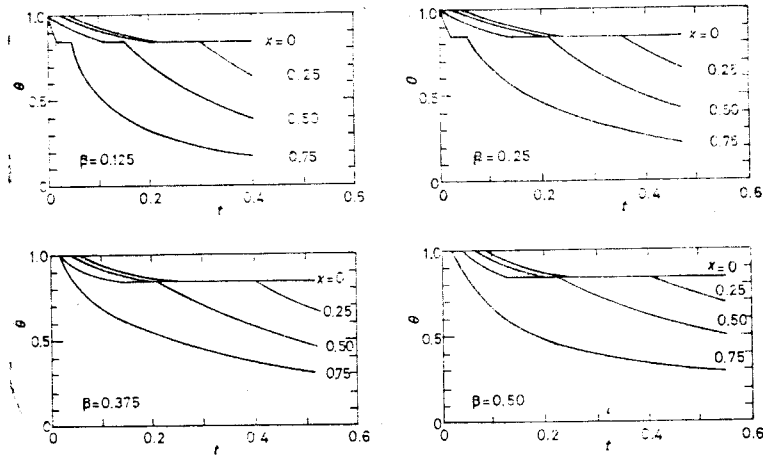


Fig. 3. Dimensionless temperature vs. dimensionless time for the case (2)

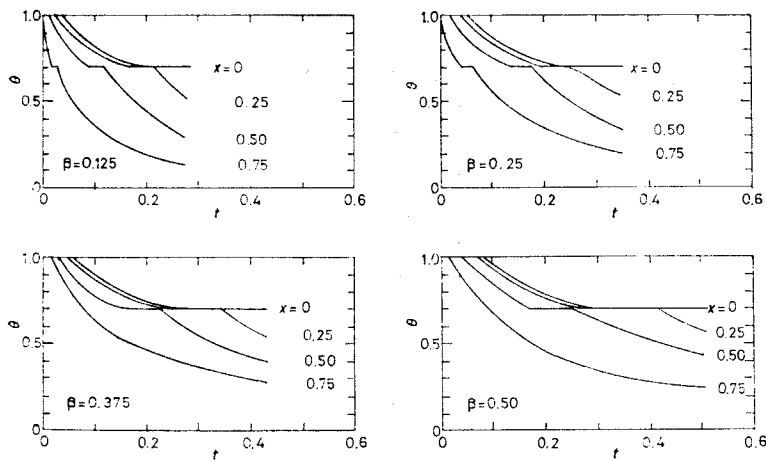


Fig. 4. Dimensionless temperature vs. dimensionless time for the case (3)

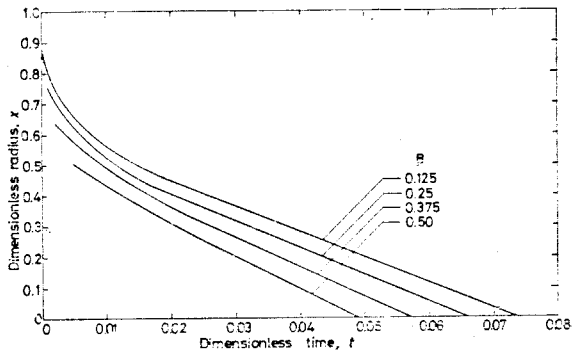


Fig. 5. Solidification front profile for the case (1)

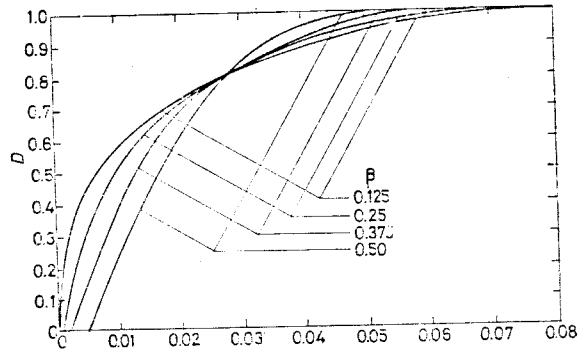


Fig. 8. Dimensionless discharged latent heat vs. dimensionless time for the case (1)

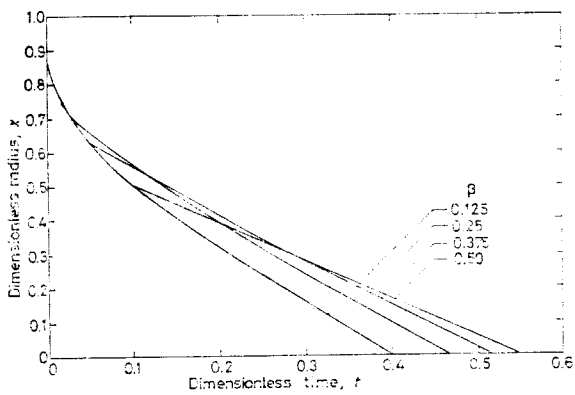


Fig. 6. Solidification front profile for the case (2)

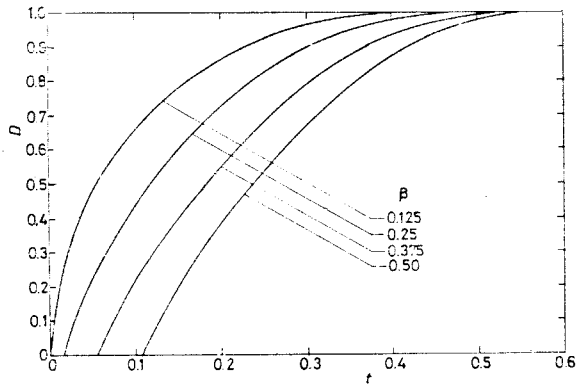


Fig. 9. Dimensionless discharged latent heat vs. dimensionless time for the case (2)

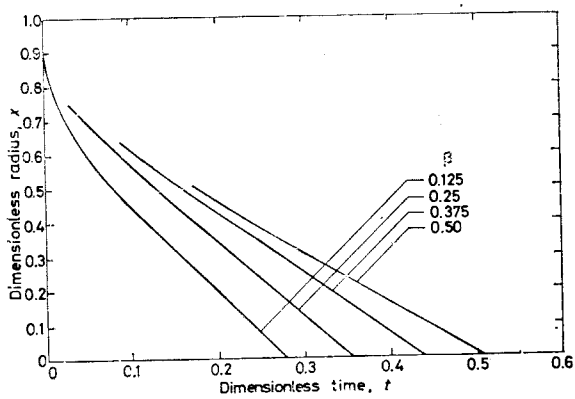


Fig. 7. Solidification front profile for the case (3)

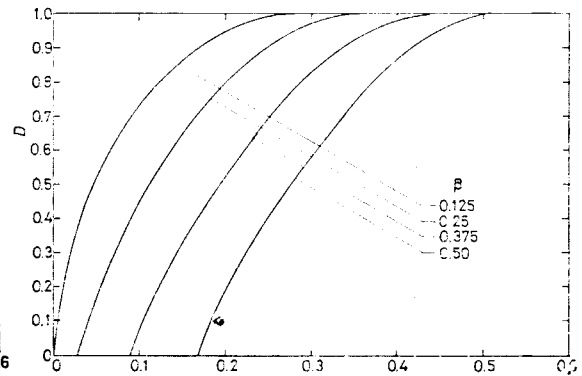


Fig. 10. Dimensionless discharged latent heat vs. dimensionless time for the case (3)

$$D = -\frac{2}{\epsilon^2} \int_0^t s \frac{ds}{dt} dt = 1 - \left(\frac{s}{\epsilon}\right)^2 \quad (9)$$

으로 표시된다. 빙출열량은 응고전면 좌표의 제곱과 연관되어 대체로 포물선의 형태는 이루게 된다. 상변화시의 잠열을 이용한 축열조의 설계에 있어서는 전체 축열량은 물론 축열시간이 중요한 인자가 되므로 축열열교환기설계의 기초자료가 될것으로 생각된다.

참 고 문 헌

1. J. Stefan, *Annln Phys. Chem.* **42**, 269 (1891).
2. C.L. Pekeris and L.B. Slichter, *J. Appl. Phys.* **10**, 135 (1939).
3. A. Mori and K. Araki, *Int. Chem. Eng.* **16**, 734 (1976).
4. L.C. Tien and S.W. Churchill, *A.I. Ch. E.J.* **11**, 790 (1965).
5. A.L. London and R.L. Selan, *Trans. ASME* **65**, 771 (1943).
6. Yen-Fing Shih and Sun-Yuan Tsay, *Chem. Eng. Sci.* **16**, 809 (1971).
7. S.W. Churchill and J.I. Gupta, *Int. J. Heat. Mass Transfer* **10**, 1251 (1977).
8. R.D. Richtmyer, *Difference methods for initial value problems*, Interscience, 1964.
9. Moon Ju Lee, "Heat Conduction of the Solidification Process in a Cylinder with Finite Thickness", *M.S. Thesis*, Seoul National University (1977).

Erratum

Pyung Hoon Chang and Sun-Whi Cho, Optimal Control of Electrohydraulic Actuator System, *Transactions of the Korean Society of Mechanical Engineers*, Vol.1, No.3, pp.131 ~140, 1977.

The following mistakes occurred in this paper:

Page 137 Figs. 6-7 should read,

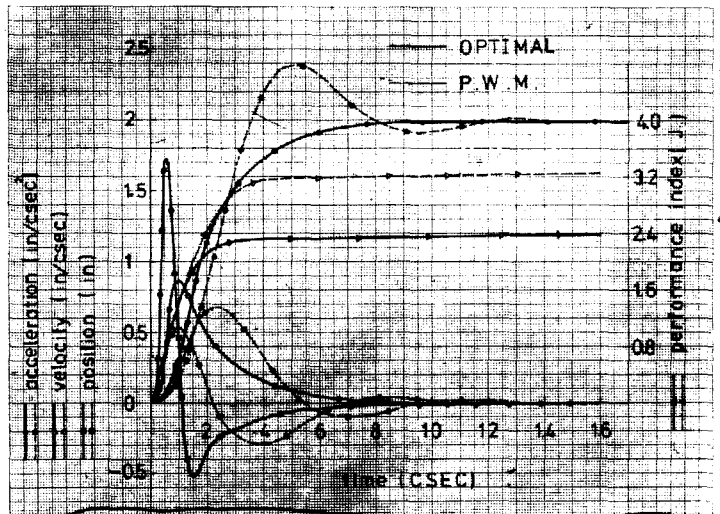


Fig. 6. Transient responses when $q_{11}=2$, $q_{22}=-5$

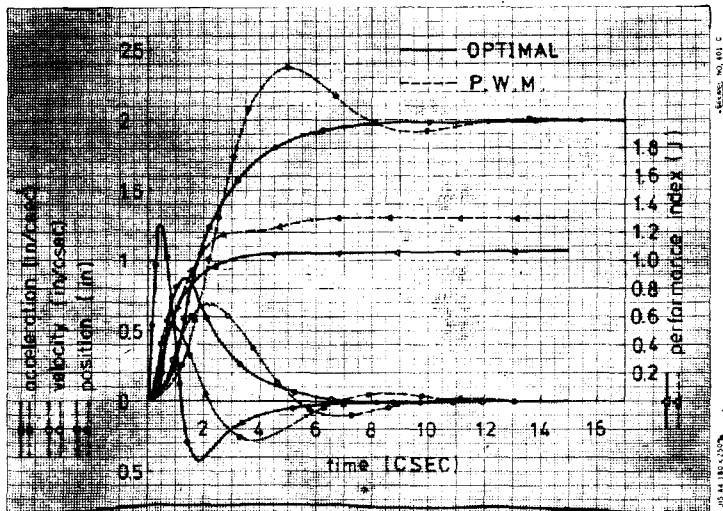


Fig. 7. Transient responses when $q_{11}=5$, $q_{22}=15$