

非線型離散值系の 最適時間制御에 관한 研究

論 文
26~2~5

A Study of Time Optimal Control for Nonlinear Sampled-data Control Systems

千 熙 英*
(Hee Young Chun)

Abstract

In this paper we apply the maximum principle to design of time optimal nonlinear sampled-data control systems. We introduce the general design procedures and the mathematical formulas for time optimal processes and trajectories. Then we show the application of the technique to determine the optimal control signal, control sequence, switching time and sampling period to the given 4th order process.

1. 序 論

最近 制御系에서 不連續值制御의 重要性은 디지털計算機와 디지털制御器의 使用으로 加一層 增加되고 있다.

不連續值制御系는 넓은 뜻에서 디지털系(digital system)과 離散值系(sampled-data system)를 말한다. 不連續值는 制御系內에서 自然이 생기는 경우와 人工의으로 強制로 發生케 하는 두가지 경우가 있다. 強制 샘플링動作은 現代制御系에서 高感度, 最適應答과 特性 및 時間分擔 등을 얻기 위하여 數 많이 適用되고 있다.

1960年以來 制御系分野에서는 狀態變數導入⁶⁾과 應用數學의 應用으로 그 設計法과 設計技術에 急激한 變化를 가져왔고 最適制御論은 不連續值系의 設計에도 革命的인 變化를 가져왔다.

本論文에서는 非線型離散值系에 대한 最適時間制御設計問題¹⁾⁴⁾⁷⁾⁸⁾를 Pontryagin의 最大原理²⁾³⁾⁴⁾를 適用하여 그의 一般의인 最適設計節次를 論한다. 다음에 最近 모든 系統이 複雜化됨에 따라 漸次 그 次數가 높아지는 傾向에 비추어 아직 細部의인 設計資料가 提示되고 있지 않은 4次系에 대하여 위의 一般의인 最適設計節次를 適用하여 最適過渡特性和 最適軌跡에 관한 數式을 誘導하고 아울러 最適制御信號와 制御시이퀀스 등 必要한 設計資料와 이것을 구하는 技法을 提示코져

한다.

2. 本 論

2-1. 一般의인 設計節次

그림 1과 같은 모델의 離散值系에 대하여 주어진 初期狀態에서 가장 짧은 時間內에 最終平衡狀態에 到達하는 最適制御信號를 얻기 위한 最適時間制御問題를 設計에 有用한 最大原理를 適用한다.

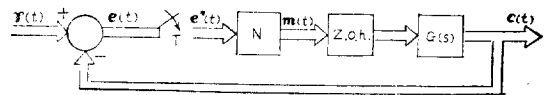


그림 1. 非線型離散值系の 블럭線圖
Fig 1. Block diagram of nonlinear sampled-data control system

線型制御工程이 다음 動方程式으로 表示되는 것으로 한다.

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + Bm(t) \\ C(t) = DX(t) \end{cases} \quad (1)$$

$$m(t_k) = m(t) \quad (t_k \leq t < t_{k+1}) \quad (2)$$

(1)式에서 $X(t)$ 는 狀態變數, $m(t)$ 는 制御信號, $C(t)$ 는 出力, A, B, D 는 係數行列이고, 그림 1에서 N 은 amplitude dependent 特性의 非線型要素, z. o. h.는 zero order hold이다.

簡便하게 解를 얻기 위하여 위 狀態方程式을 相似變換¹⁾⁵⁾하고 새로운 狀態變數 $Y(t)$ 를 導入하면 (1)式의 狀態方程式은 다음과 같다.

$$\dot{Y}(t) = Q^{-1}AQY(t) + Q^{-1}\Gamma m(t) \quad (3)$$

* 正會員: 高大 理工大教授(工博·當學會 財務理事)
接受日字: 1977年 1月 26日

여기서

$$A = P^{-1}AP, \quad \Gamma = P^{-1}B, \quad Y(t) = Q^{-1}P^{-1}X(t) \quad (4)$$

(3)式으로 表示되는 系에 最適制御信號 $m(t)$ 를 얻기 위하여 最大原理를 適用하면 Hamiltonian $H^{(5)}$ 는 다음과 같다.

$$H = \sum_{i=1}^n p_i(t) \dot{y}_i \quad (5)$$

여기서 y_i 는 狀態벡터 $Y(t)$ 의 要素이다.

p_i 는 costate vector $P(t)$ 의 要素이며 $P(t)$ 는 (6)式과 같이 定義되고 Hamilton標準型 (7)式을 滿足한다.

$$P(t) = [p_1(t) \ p_2(t) \ \dots \ p_n(t)] \quad (6)$$

$$\dot{p}_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial y_i} \quad (7)$$

(7)式에서 얻은 微分方程式을 풀고 $p_i(t)$ 를 Hamiltonian H 에 代入하면 最適制御信號를 定하는 時間函數가 얻어진다. 同時에 最大 스위칭回數도 定해진다. 系에 주어진 非線型要素의 拘束條件에 따라 制御信號 $m_i(t) = \sigma$ 가 定해지면 $y_i(t)$ 의 解가 얻어지고 $y_i(t)$ 에서 連續되는 스위칭時間間隔 T_i 와 制御시이퀀스 $m_i(\sigma, -\sigma, \sigma, \dots)$, 그리고 最適軌跡과 最適過渡特性도 定해진다.

非線型要素의 特性에서 拘束條件⁸⁾이 주어지면 $m(t)$ 의 크기는 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} e^*(t) \geq M \text{ 이면 } m(t) &= M \\ e^*(t) \geq M \text{ 이면 } m(t) &= -M \\ e^*(t) = 0 \text{ 이면 } m(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

萬一 最適入力信號를 要求하는 경우 그림 1에서 最適入力은 다음과 같다.

$$r(t) = e(t) + X(t)$$

샘플링動作에서는 샘플링瞬間의 $r(t)$ 만이 問題視되므로 入力 $r(t)$ 가 샘플링瞬間에 適切한 값에 維持되는 限이면 最適形態를 取할 수 있다. 만일 $r(t)$ 가 一連의 階段函數形態를 取한다면 $r(t)$ 는 다음과 같이 定해진다.

$$\left. \begin{aligned} m(t) = M \text{ 이면 } r(t) &\geq m + \max. X(t) \\ m(t) = -M \text{ 이면 } r(t) &\leq -M + \min. X(t) \\ m(t) = 0 \text{ 이면 } r(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

2-2. 4次系에 대한 最適時間制御設計

線型制御工程의 傳達函數 $G(s)$ 가 다음과 같이 주어지는 4次系에 대하여 2-1의 一般設計節次에 따라 最適時間制御設計를 한다.

$$G(s) = \frac{K}{s^2(s+a)} \quad (10)$$

지금 系가 單一入力과 單一出力이라 假定하면 이 離散值系에 대한 狀態線圖는 그림 2와 같다. 이 系의 狀態方程式 $\dot{X}(t) = AX(t) + Bm(t)$ 는 다음과 같이 表示된다.

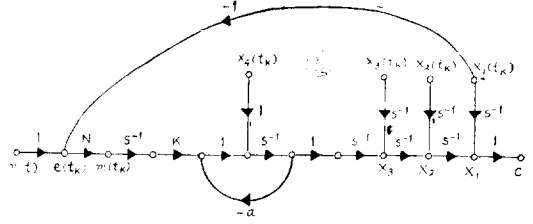


그림 2. 4次系의 狀態線圖

Fig 2. A state diagram of the system with 4th order process.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ K \end{pmatrix} m(t_k) \quad (11)$$

여기서 $t_k \leq t < t_{k+1}$ 에서는 $m(t) = m(t_k)$ 이다. 相似變換을 하기 위하여 P 를 다음과 같이 定하면 $G(s)$ 는 세계의 같은 固有值를 가지므로 A 는 Jordan의 標準型¹⁾이 된다.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{a^3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a^2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a \end{pmatrix}$$

$$\Gamma = P^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{K}{a^3} \\ -\frac{K}{a^2} \\ \frac{K}{a} \\ K \end{pmatrix}$$

새로운 變數 $Y[y_1, y_2, y_3, y_4]$ 를 導入하면 (3)式의 狀態方程式은 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ -a \\ a \\ a \end{pmatrix} m(t) \quad (12)$$

$X(t)$ 와 $Y(t)$ 는 다음 關係가 있다{(4)式 참조}.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a^4}{K} & 0 & 0 & \frac{a}{K} \\ 0 & \frac{a^3}{K} & 0 & -\frac{a}{K} \\ 0 & 0 & \frac{a^2}{K} & \frac{a}{K} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a}{K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad (13)$$

最適信號를 얻기 위한 Hamiltonian H 는 다음과 같다.

$$H = \sum_{i=1}^4 p_i(t) \dot{y}_i = a p_1(t) y_2(t) + a p_2(t) y_3 - a p_4(t) y_4(t) + am(t) \{ p_1(t) - p_2(t) + p_3(t) + p_4(t) \}$$

最大原理에 의하여 H 를 最大로 하는 制御信號 $m(t)$ 는 다음과 같다.

$$m(t) = \text{Sign} \{ p_1(t) - p_2(t) + p_3(t) + p_4(t) \} \quad (14)$$

costate vector $\dot{p}_i(t)$ 는 (7)式을 滿足하기까 $p_i(t)$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} p_1(t) &= c_1 \\ p_2(t) &= c_2 - ac_1 t \\ p_3(t) &= c_3 - ac_2 t + a^2 c_1 \frac{t^2}{2} \\ p_4(t) &= c_4 e^{at} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

여기서 $c_i = p_i(0)$ 이다.

따라서 (14)式의 制御信號 $m(t)$ 는 다음과 같다.

$$m(t) = \text{Sign} \left[c_1 - c_2 + ac_1 t + c_3 - ac_2 t + a^2 c_1 \frac{t^2}{2} + c_4 e^{at} \right]$$

函數 $\left[c_1 - c_2 + ac_1 t + c_3 - ac_2 t + a^2 c_1 \frac{t^2}{2} + c_4 e^{at} \right]$ 는 最大 세번의 스위칭을 할 수 있고 制御信號 $m(t)$ 는 계속 세번의 스위칭으로 交替한다.

지금 $m(t) = \sigma = \pm 1$ 로 놓고 (12)式의 微分方程式을 풀면 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} y_1(t) &= y_1(0) + a \{ y_2(0) + \sigma \} t + \frac{a^2}{2} \{ y_3(0) - \sigma \} t^2 + \frac{1}{6} a^3 \sigma t^3 \\ y_2(t) &= y_2(0) + a \{ y_3(0) - \sigma \} t + \frac{a^2}{2} \sigma t^2 \\ y_3(t) &= y_3(0) + a \sigma t \\ y_4(t) &= [y_4(0) - \sigma] e^{-at} + \sigma \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

(16)式에서 t 를 消去하면

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= y_1(0) + \left\{ 1 + \frac{1}{\sigma} y_2(0) - \frac{1}{2\sigma^2} y_3^2(0) \right\} \{ y_3 - y_3(0) \} - \frac{1}{2\sigma} \{ y_3^2 - y_3^2(0) \} + \frac{1}{6\sigma^2} \{ y_3^3 - y_3^3(0) \} + \frac{1}{\sigma} y_3 y_3(0) \\ y_2 &= y_2(0) - \{ y_3 - y_3(0) \} + \frac{1}{2\sigma} \{ y_3^2 - y_3^2(0) \} \\ y_4 &= \{ y_4(0) - \sigma \} e^{-\frac{1}{\sigma}(y_3 - y_3(0))} + \sigma \\ y_2 &= y_2(0) + [\sigma - y_3(0)] \ln \left| \frac{y_4 - \sigma}{y_4(0) - \sigma} \right| + \frac{\sigma}{2} \left[\ln \left| \frac{y_4 - \sigma}{y_4(0) - \sigma} \right| \right]^2 \\ y_1 &= y_1(0) - [y_2(0) + \sigma] \ln \left| \frac{y_4 - \sigma}{y_4(0) - \sigma} \right| + \frac{1}{2} [y_3(0) - \sigma] \ln \left[\ln \left| \frac{y_4 - \sigma}{y_4(0) - \sigma} \right| \right]^2 - \frac{\sigma}{6} \left[\ln \left| \frac{y_4 - \sigma}{y_4(0) - \sigma} \right| \right]^3 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

다음에 連續되는 스위칭의 時間間隔 T_i 와 制御시이켄스를 정한다.

t_1, t_2, t_3 를 각각 첫번째, 두번째, 세번째 스위칭時間 t_f 를 最終時間이라 하면 스위칭時間間隔 T_i 는 다음과 같다.

$$T_1 = t_1, T_2 = t_2 - t_1, T_3 = t_3 - t_2, T_4 = t_f - t_3$$

우선 세번의 스위칭이 있고 制御시이켄스가 다음과 같으면

$$mm = \{ \sigma, -\sigma, \sigma, -\sigma \}$$

$t=0$ 에서 初期狀態點 $N_0 \{ y_1(t_0), y_2(t_0), y_3(t_0), y_4(t_0) \}$ 는 첫번째 制御信號 $m = \sigma$ 로 다음 스위칭點 $N_1 \{ y_1(t_1), y_2(t_1), y_3(t_1), y_4(t_1) \}$ 으로 移動한다.

$$\left. \begin{aligned} y_1(t_1) &= y_1(0) + a \left\{ y_2(0) + \sigma \right\} T_1 + \frac{a^2}{2} \left\{ y_3(0) - \sigma \right\} T_1^2 + \frac{a^3}{6} \sigma T_1^3 \\ y_2(t_1) &= y_2(0) + a \left\{ y_3(0) - \sigma \right\} T_1 + \frac{1}{2} \sigma a^2 T_1^2 \\ y_3(t_1) &= y_3(0) + \sigma a T_1 \\ y_4(t_1) &= [y_4(0) - \sigma] e^{-\sigma T_1} + \sigma \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$t=t_1$ 에서 두번째 制御信號 $m = -\sigma$ 로 두번째 스위칭點 $N_2 \{ y_1(t_2), y_2(t_2), y_3(t_2), y_4(t_2) \}$ 는 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} y_1(t_2) &= y_1(t_1) + a \{ y_2(t_1) - \sigma \} T_2 + \frac{a^2}{2} \{ y_3(t_1) + \sigma \} T_2^2 + \frac{a^3}{6} \sigma a^2 T_2^3 \\ y_2(t_2) &= y_2(t_1) + a \{ y_3(t_1) + \sigma \} T_2 + \frac{1}{2} \sigma a^2 T_2^2 \\ y_3(t_2) &= y_3(t_1) - \sigma a T_2 \\ y_4(t_2) &= [y_4(t_1) + \sigma] e^{-\sigma T_2} - \sigma \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

세번째 스위칭으로 스위칭點 $N_3 \{ y_1(t_3), y_2(t_3), y_3(t_3), y_4(t_3) \}$ 은 아래와 같다.

$$\left. \begin{aligned} y_1(t_3) &= y_1(t_2) + a \{ y_2(t_2) + \sigma \} T_3 + \frac{a^2}{2} \{ y_4(t_2) - \sigma \} T_3^2 + \frac{1}{6} \sigma a^2 T_3^3 \\ y_2(t_3) &= y_2(t_2) + a \{ y_3(t_2) - \sigma \} T_3 + \frac{1}{2} \sigma a^2 T_3^2 \\ y_3(t_3) &= y_3(t_2) + \sigma a T_3 \\ y_4(t_3) &= [y_4(t_2) - \sigma] e^{-\sigma T_3} + \sigma \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

最終 스위칭點 $N_4 \{ y_1(t_f), y_2(t_f), y_3(t_f), y_4(t_f) \}$ 는 平衡點인 原點에 있어야 하므로

$$\left. \begin{aligned} y_1(t_f) &= 0 = y_1(t_3) - a \{ y_2(t_3) - \sigma \} T_4 + \frac{a^2}{2} \{ y_3(t_3) + \sigma \} T_4^2 - \frac{1}{6} \sigma a^2 T_4^3 \\ y_2(t_f) &= 0 = y_2(t_3) + a \{ y_3(t_3) + \sigma \} T_4 - \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{2} \sigma a^2 T_4^2 \\ & y_3(t_f) = 0 = y_3(t_3) - \sigma a T_4 \\ & y_4(t_f) = 0 = \{y_4(t_3) + \sigma\} e^{-\sigma T_4} - \sigma \end{aligned} \right\} (21)$$

(18)~(20)式에서 $Y(t_1)$, $Y(t_2)$, $Y(t_3)$ 등을 消去하면

$$\left. \begin{aligned} & y_3(0) + \sigma a \{T_1 - T_2 + T_3 - T_4\} = 0 \\ & \{y_4(0) - \sigma\} e^{-a(T_1+T_2+T_3+T_4)} + 2\sigma e^{-a(T_2+T_3+T_4)} - 2\sigma e^{-a(T_3+T_4)} + 2\sigma e^{-aT_4} - \sigma = 0 \\ & y_2(0) + a \{y_3(0) - \sigma\} (T_1 + T_3) \\ & \quad + a \{y_3(0) + \sigma\} (T_2 + T_4) + \frac{1}{2} \sigma a^2 \\ & \quad (T_1^2 - T_2^2 + T_3^2 - T_4^2) + \sigma a^2 (T_1 T_2 \\ & \quad + T_1 T_3 + T_1 T_4 - T_2 T_3 - T_2 T_4 + \\ & \quad T_3 T_4) = 0 \\ & y_1(0) + a (T_1 + T_2 + T_3 + T_4) y_2(0) \\ & \quad + \frac{a^3}{2} (T_1 + T_2 + T_3 + T_4)^2 y_3(0) \\ & \quad + \sigma a (T_1 - T_2 + T_3 - T_4) \\ & \quad - \frac{1}{2} \sigma a^2 (T_1^2 - T_2^2 + T_3^2 - T_4^2) \\ & \quad - \sigma a^2 (T_1 T_2 - T_2 T_3 + T_3 T_1 \\ & \quad + T_1 T_4 - T_2 T_4 + T_3 T_4) \\ & \quad + \frac{1}{6} \sigma a^2 (T_1^3 - T_2^3 + T_3^3 - T_4^3) \\ & \quad + \frac{1}{2} \sigma a^3 \{ (T_2 + T_3 + T_4) T_1^2 + (T_1 \\ & \quad - T_3 - T_4) T_2^2 + (T_1 - T_2 + T_4) T_3^3 \\ & \quad + (T_1 - T_2 + T_3) T_4^2 + 2T_1 T_2 T_3 \\ & \quad - 2T_2 T_3 T_4 + 2T_3 T_4 T_1 \\ & \quad + 2T_4 T_1 T_2 \} = 0 \end{aligned} \right\} (22)$$

(22)式에는 T_1, T_2, T_3, T_4 에 관한 네개의 方程式이 있으므로 T_1, T_2, T_3, T_4 를 정할 수 있다.

주어진 初期狀態에 따라 스위칭이 한번 또는 두번만 으로 平衡點에 到達하는 경우의 時間間隔 T_i 도 (22)式에서 구할 수 있다.

일단 T_1, T_2, T_3, T_4 가 정해지고 또 OST와 位相面 그리고 非線型要素의 拘束條件(amplitude dependent)에서 σ 가 정해지면 最速過渡特性은 각 區間에서 각각 다른 初期條件에서 $y_i(t)$ 가 정해지고 制御시이켄스 $m(t) = \{\sigma, -\sigma, \sigma, -\sigma\}$ 도 정해진다. 系가 平衡點에 到達하면 制御信號 $m(t)=0$ 가 된다.

萬一 最速入力 $r(t)$ 가 要求된다면 다음과 같이 정해진다.

$$\left. \begin{aligned} & m(t) = \sigma \text{이면 } r(t) \geq \sigma + \max. x_i(t) \\ & m(t) = -\sigma \text{이면 } r(t) \leq -\sigma + \min. x_i(t) \\ & m(t) = 0 \text{ 이면 } r(t) = 0 \end{aligned} \right\} (23)$$

샘플링週期 T_s 는 T_i 의 共通因數로 정해진다.

2-3. 計算例

線型制御工程 $G(s)$ 가 다음과 같으며 入力은 一連의 單一階段入力を 내며 單一出力으로 應答하는 系를 생각한다. 非線型要素는 $M = \pm 1$ 의 飽和特性을 가진다고 한다.

$$G(s) = \frac{1}{s^3(s+1)}$$

初期狀態 $X(0) = (-1.69, 1, 0, 0)$ 이고 要求되는 平衡狀態는 狀態空間의 原點이다.

(13)式에서 $Y(0) = (-1.69, 1, 0, 0)$ 이 된다.

OST (optimum switching trajectory)¹⁾와 一定制御信號 $m = \pm 1$ 에 의한 $y_2 - y_3$ 狀態空間面에서 $\sigma = -1$ 과 두번의 스위칭으로 平衡狀態에 到達함을 알 수 있다. 따라서 最速制御시이켄스 $m(t)$ 는 다음과 같다.

$$m(t) = \{-1, 1, -1, 0\}$$

두번의 스위칭으로 $T_4=0$ 이니가 (22)式에서 $T_1 = 1.125(s)$, $T_2 = 1.641(s)$, $T_3 = 0.516(s)$. 얻어지고 平衡點에 到達하는 時間은 3.286(sec)임을 알 수 있다.

狀態空間의 初期點에서 平衡點까지의 스위칭點을 (16)式에서 구하면 다음과 같다.

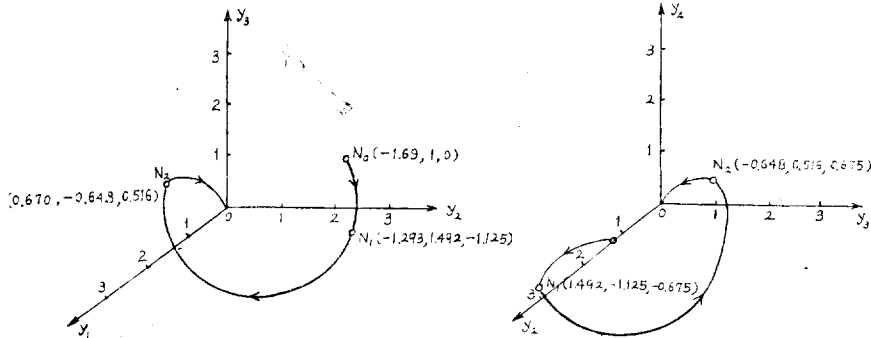


그림 3. 例題의 狀態空間에서의 最速時間軌跡

Fig 3. Time optimal trajectory in the state space for given example

$$\begin{aligned}
 t=0 & N_0(-1.69, 1, 0, 0) \\
 t=T_1 & N_1(-1.293, 1.492, -1.125, -0.675) \\
 t=T_1+T_2 & N_2(0.670, -0.648, 0.516, 0.675) \\
 t=T_1+T_2+T_3 & N_3(0, 0, 0, 0)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1.125 \leq t \leq 2.766 \quad \sigma=1 \quad r(t) \geq 1 + \max. x_1(t) \\
 \therefore r(t)=1 \\
 2.766 \leq t < 3.282 \quad \sigma=-1 \quad r(t) \leq -1 + \min. x_1(t) \\
 \therefore r(t)=-1.1 \\
 t > 3.282 \quad r(t)=0
 \end{aligned}$$

3次狀態空間에서의 스위칭점을 그림 3에 나타낸다.
 (13)~(16)式에서 $t=0$ 에서부터 平衡點에 到達하는 期間동안의 $X(t)$ 를 구할 수 있다. 지금 $x_1(t)$ 를 表示하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 0 \leq t \leq 1.125 \quad x_1(t) &= -0.69 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3 - e^{-t} \\
 1.125 \leq t \leq 2.766 \quad x_1(t) &= -2.293 + 2.492(t-1.125) \\
 &\quad - 2.125(t-1.125)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{6}(t-1.125)^3 \\
 &\quad + 1.675e^{-(t-1.125)} \\
 2.766 < t \leq 3.282 \quad x_1(t) &= 1.670 - 1.648(t-2.766) \\
 &\quad + \frac{1.561}{2}(t-2.766)^2 \\
 &\quad - \frac{1}{6}(t-2.766)^3 \\
 &\quad - 1.675e^{-(t-2.766)}
 \end{aligned}$$

위의 각 時間區間에서 x_1 의 最大值, 最小值를 구하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned}
 0 \leq t \leq 1.125 \quad \min. x_1(t) &= -0.619 \\
 1.125 \leq t \leq 2.766 \quad \max. x_1(t) &= -0.005 \\
 2.766 \leq t \leq 3.282 \quad \min. x_1(t) &= -0.005
 \end{aligned}$$

最適入力 $r(t)$ 은 (9), (23)式과 위의 關係에서 一連의 階段函數形態라면

$$\begin{aligned}
 0 \leq t \leq 1.125 \quad \sigma=-1 \quad r(t) &\leq -1 + \min. x_1(t) \\
 \therefore r(t) &= -1.7
 \end{aligned}$$

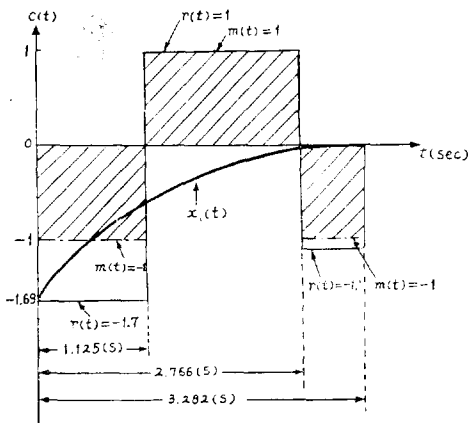


그림 4. 例題에 대한 最適制御信號 $m(t)$, 最適入力 $r(t)$ 및 $x_1(t)$ 의 最適時間過渡特性.

Fig 4. Time optimal transient process of $x_1(t)$, the desired input $m(t)$, and desired system input $r(t)$ for example.

3. 結 論

本論文에서는 離散值系에 非線型要素가 있고 拘束條件을 가지는 경우의 最適時間 制御問題에 最大原理를 適用하였다. 先 設計節次에 대한 一般論을 다루고 다음에 比較의 次數가 높은 4次系에 대하여 最適制御信號, 制御시이퀀스, 스위칭間隔, 스위칭點 샘플링週期, 最適入力 등을 定하는 數式과 技法을 提示하고 아울러 最適軌跡 및 過渡特性에 관한 式도 誘導하였다.

最適制御信號와 制御시이퀀스는 最適스위칭軌跡(OST)와 一定制御信號의 狀態空間面에서 求解되며 스위칭時間間隔은 制御系가 n 次이면 스위칭間隔에 관한 聯立方程式도 n 개가 되어 電子計算機에 의하여 그 近似解를 구하여야 한다. 또 最適入力は 制御信號에 대한 拘束條件과 각 스위칭區間內의 要求되는 狀態變數의 最大值 또는 最小值로 定해진다.

本論文에서는 特定한 4次系에 대하여 위의 여러 設計資料를 구하는 技法의 計算例도 提示하였다.

參 考 文 獻

- 1) B.C. Kuo: "Discrete-data control systems" Prentice Hall INC. 1970.
- 2) B.C. Kuo: "Automatic control systems" 3rd edition, Prentice Hall INC. 1975.
- 3) S.M. shinners: "Modern control system and application", Addison-Wesley Publishing Co. 1972.
- 4) D.E. Kirk: "optimal control theory an introduction" prentice Hall INC. 1970.
- 5) Tou, J.T.: "Modern control theory" McGraw-Hill, 1964.
- 6) Ogata: "State space analysis of control systems" Prentice Hall INC. 1967.
- 7) Desoer, A., and Wing, J., "An optimal strategy for a saturating sampled-data system", IRE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-6, February, pp. 5~15.
- 8) Nagata, A. et al: "Time optimal discrete control system with bounded state variable" IEEE Trans. on Automater Control, Vol. AC-10, April 1965, pp. 155~164.