

“壓縮性 plasma內의 sheath로 쌓인 圓柱型 導體에
의한 波의 散亂”
(Scattering by a perfectly conducting circular cylinder
with a sheath immersed in a compressible plasma)

吳 明*
(Oh, Myung)

要 約

壓縮性 plasma內에서 sheath로 둘러쌓인 圓柱型導體에 의한 電磁波의 散亂에 關하여 解析的인 方法으로 조사하였다.

電磁波가 入射하는 경우에 대하여 total scattering cross section과 back scattering cross section을 求하였으며 computer로 計算한 수치결과를 graph로 제시하였다.

Abstract

The scattering of a electromagnetic wave by a perfectly conducting circular cylinder with a sheath immersed in a compressible plasma is treated.

The total scattering cross section and the back scattering cross section are obtained for the case of the incident electromagnetic wave. Numerical results are calculated by computer and presented in graphs together with discussions.

1. 서 論

우주선이나 missile 등이 電離層이나 太陽風內, 또는 惑星間의 공간과 같이 ion化된 氣體가 있는 領域을 通過할 때 생기는 通信 및 追跡에 關한 문제는 매우 重要하며 興味롭다.

plasma를 非壓縮性으로 생각하는 경우는 誘電體의 경우와 같이 간단히 취급할 수 있으나, 壓縮性 plasma인 경우는 橫波인 電磁波 外에 縱波인 plasma wave가 存在하며, plasma wave에 의한 에너지 손실이 따르게 되어 興味로운 結果를 보인다[1-5]. 특히 plasma frequency 보다 약간 높은 周波數 범위에서는 plasma mode가 두드러져 한층 興味롭다.

本論文에서는 壓縮性 plasma內에 導入된 圓柱型 導體와 그 주위에 形成되는 sheath가 波의 散亂에 미치

는 영향을 알아 보았다. 本論文에서는 電磁波入射의 경우만 취급하고 plasma wave入射의 경우는 省略하였다. plasma wave入射의 경우도 같은 方法으로 結果를 유도할 수 있다.

2. 問題의 設定

無限長 圓柱型 完全導體 周圍에 sheath가 形成되어 있고 그 밖은 plasma라 생각하자. plasma는 電子와 비교적 질량이 커서 plasma運動에 기여하지 않는 陽ion으로 구성되어 있으며, isotropic하고 loss가 없는 壓縮性 plasma라 가정한다.

入射된 波의 強度가 弱하고 $e^{-i\omega t}$ 의 형태를 가졌다고 가정하면 linearized plasma theory[6]에 의해 모든 波는 $e^{-i\omega t}$ 의 형태를 가지며, 流體運方程式, 狀態 및 連續方程式, Maxwell方程式들을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$-i\omega m N_0 \vec{V} = N_0 e \vec{E} - \nabla P \quad (1)$$

$$u^2 m N_0 \nabla \cdot \vec{V} = i\omega P \quad (2)$$

* 正會員, 陸軍士官學校 電子工學科
Dept. of Electronics Eng., Korea Military Academy

接受日字: 1976年 10月 12日

$$\nabla \times \vec{E} = i\omega\mu_0\vec{H} \quad (3)$$

$$\nabla \times \vec{H} = -i\omega\epsilon_0\vec{E} + N_0e\vec{V} \quad (4)$$

上式에서 \vec{E} , \vec{H} , \vec{V} 는 各各 電場, 磁場 및 電子의 速度이며, p 는 壓力의 平均値에 對한 變分이다. e 는 電子의 電荷, m 은 電子의 質量, N_0 는 電子의 平均密度, u 는 plasma wave의 速度, μ_0 및 ϵ_0 는 自由空間에서의 透電率이다.

(1)-(4)로 부터

$$\nabla^2 \vec{H} + K_e^2 \vec{H} = 0 \quad (5)$$

$$K_e^2 = K_0^2 \epsilon_r - \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \quad (6)$$

$$\omega_p = \sqrt{\frac{N_0 e^2}{m \epsilon_0}} \quad (7)$$

$$\nabla^2 p + K_p^2 p = 0 \quad (8)$$

$$K_p^2 = \frac{\omega^2}{u^2} \epsilon_r - \frac{\omega^2}{u^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right), \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_{EM} + \vec{E}_p \\ &= \frac{i}{\omega \epsilon_0 \epsilon_r} \nabla \times \vec{H} - \frac{e}{\omega^2 m \epsilon_0 \epsilon_r} \nabla P, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \vec{V}_{EM} + \vec{V}_p \\ &= -\frac{e}{\omega^2 m \epsilon_0 \epsilon_r} \nabla \times \vec{H} - \frac{i}{\omega m \epsilon_r N_0} \nabla P \end{aligned} \quad (11)$$

를 얻을 수 있다. 式에서 K_0 및 c 는 各各 自由空間에서의 電磁波의 傳播定數 및 速度이며, K_e 및 K_p 는 plasma內에서의 電磁波 및 plasma wave의 傳播定數이다. ϵ_r 은 非誘電率이며 ω_p 는 plasma frequency이다. (6)과 (9)로부터 波는 $\omega > \omega_p$ 일때만 進行하고 $\omega < \omega_p$ 이면 점차 소멸함을 알 수 있다. (10) 및 (11)의 첫 항은 發散은 0이고 回轉은 0이 아닌 項으로 EM-mode라 부르며 磁界에 起因하는 橫波이다. 둘째 항은 P-mode라 부르며 回轉이 0인 項으로 縱波이며 전하축적에 起因한다. 첨자 'EM' 및 'p'는 各各 EM-mode 및 P-mode임을 표시한다. EM-mode와 P-mode는 結合하지 않으므로 全體 power는 各各의 power를 求해서 合하면 된다[7].

導入된 圓柱가 無限長 完全導體이며 plasma와 vacuum sheath사이의 境界가 明確하다고 가정하면, 즉 境界面에서의 電子速度의 法線成分이 0이라고 가정하면, 아래와 같은 境界條件을 얻을 수 있다.

$$E_{\phi}^i(a, \phi) = 0 \quad (12)$$

$$H_z^i(b, \phi) + H_z^s(b, \phi) = H_z^t(b, \phi) \quad (13)$$

$$E_{\phi}^i(b, \phi) + E_{\phi}^s(b, \phi) = E_{\phi}^t(b, \phi) \quad (14)$$

$$V_{\rho}^i(b, \phi) + V_{\rho}^s(b, \phi) = 0 \quad (15)$$

式에서 'a'는 圓柱의 半徑, 'b'는 圓柱의 半徑에 sheath의 두께를 더한 길이이며, 첨자 'i', 's', 't'는 各各

入射波, 散亂波 및 sheath內의 波를 나타낸다.

3. Scattering Cross section

EM mode와 P mode는 結合하지 않으므로 入射波를 EM波 및 plasma波로 나누어 취급할 수 있다. 그러나 두 경우 모두 境界條件을 만족시키려면 散亂波는 EM mode 및 P mode를 포함하여야 한다.

入射波가 EM波만인 경우를 생각하자. 즉

$$H_z^i(\rho, \phi) = e^{i k_e \rho \cos \phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n e^{i n \phi} J_n(k_e \rho) \quad (16)$$

$$P^i(\rho, \phi) = 0$$

plasma 領域內의 散亂波는

$$H_z^s(\rho, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n i^n e^{i n \phi} H_n^{(1)}(k_e \rho) \quad (17)$$

$$P^s(\rho, \phi) = \frac{m\omega}{e} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n i^n e^{i n \phi} H_n^{(1)}(k_p \rho) \quad (18)$$

Vacuum sheath內의 散亂波는

$$H_z^t(\rho, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n e^{i n \phi} [C_n J_n(k_0 \rho) + D_n Y_n(k_0 \rho)] \quad (19)$$

$$P^t(\rho, \phi) = 0$$

로 표시할 수 있다. 式에서 J_n 및 Y_n 은 n 항의 제 1종 및 제 2종 Bessel函數를 말하며 A_n, B_n, C_n, D_n 은 未定係數들이다.

$$E_{\phi}^i = -\frac{i}{\omega \epsilon_0 \epsilon_r} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} - \frac{e}{\omega^2 m \epsilon_0 \epsilon_r} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \phi} \quad (20)$$

$$V_{\rho}^i = -\frac{e}{\omega^2 m \epsilon_0 \epsilon_r} \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{i}{\omega m \epsilon_r N_0} \frac{\partial P}{\partial \rho} \quad (21)$$

의 관계에 (16)-(19)를 대입하면

$$E_{\phi}^i(\rho, \phi) = -\frac{i k_e}{\omega \epsilon_0 \epsilon_r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n e^{i n \phi} J_n'(k_e \rho)$$

$$\begin{aligned} E_{\phi}^s(\rho, \phi) &= -\frac{i k_e}{\omega \epsilon_0 \epsilon_r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n i^n e^{i n \phi} H_n^{(1)'}(k_e \rho) \\ &\quad - \frac{i}{\omega \epsilon_0 \epsilon_r} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{\rho} B_n i^n e^{i n \phi} H_n^{(1)}(k_p \rho), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{\phi}^t(\rho, \phi) &= -\frac{i k_0}{\omega \epsilon_0} \\ &\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n e^{i n \phi} [C_n J_n'(k_0 \rho) + D_n Y_n'(k_0 \rho)], \end{aligned}$$

$$V_{\rho}^i(\rho, \phi) = -\frac{i e}{\omega^2 m \epsilon_0 \epsilon_r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{\rho} i^n e^{i n \phi} J_n(k_e \rho)$$

$$\begin{aligned} V_{\rho}^s(\rho, \phi) &= -\frac{i e}{\omega^2 m \epsilon_0 \epsilon_r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{\rho} A_n i^n e^{i n \phi} H_n^{(1)}(k_e \rho) \\ &\quad - \frac{i e k_p}{\omega^2 m \epsilon_0 \epsilon_r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n i^n e^{i n \phi} H_n^{(1)'}(k_p \rho) \end{aligned}$$

을 얻을 수 있다. 이들을 境界條件 (12)-(15)에 대입하여 풀이면 다음 連립방정식을 얻을 수 있다.

$$0 + 0 - J_n'(k_0 a) C_n - Y_n'(k_0 a) D_n = 0$$

$$H_n^{(1)}(k_e b) A_n + 0 - J_n(k_0 b) C_n - Y_n(k_0 b) D_n$$

$$= -J_n(k_e b)$$

$$H_n^{(1)}(k_e b) A_n + \frac{n}{k_e b} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} H_n^{(1)}(k_p b) B_n - \sqrt{\epsilon_r} J_n'(k_0 b) C_n - \sqrt{\epsilon_r} Y_n'(k_e b) D_n = -J_n'(k_e b) \quad (22)$$

$$nH_n^{(1)}(k_e b) A_n + k_p b H_n^{(1)'}(k_p b) B_n - 0 - 0 = -nJ_n'(k_e b)$$

따라서 未定係數 A_n 및 B_n 은 다음과 같아진다.

$$A_n = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -J_n'(k_0 a) & -Y_n'(k_0 a) \\ -J_n(k_e b) & 0 & -J_n(k_0 b) & -Y_n(k_0 b) \\ -J_n'(k_e b) & \frac{n}{k_e b} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} H_n^{(1)}(k_p b) & -\sqrt{\epsilon_r} J_n'(k_0 b) & -\sqrt{\epsilon_r} Y_n'(k_0 b) \\ -nJ_n(k_e b) & k_p b H_n^{(1)'}(k_p b) & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (23)$$

$$B_n = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -J_n'(k_0 a) & -Y_n'(k_0 a) \\ H_n^{(1)}(k_e b) & -J_n(k_e b) & -J_n(k_0 b) & -Y_n(k_0 b) \\ H_n^{(1)'}(k_e b) & -J_n'(k_e b) & -\sqrt{\epsilon_r} J_n' k_0 b & -\sqrt{\epsilon_r} Y_n'(k_0 b) \\ nH_n^{(1)}(k_e b) & -nJ_n(k_e b) & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (24)$$

여기서

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -J_n'(k_0 a) & -Y_n'(k_0 a) \\ H_n^{(1)}(k_e b) & 0 & -J_n(k_0 b) & -Y_n(k_0 b) \\ H_n^{(1)}(k_e b) & \frac{n}{k_e b} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} H_n^{(1)}(k_p b) & -\sqrt{\epsilon_r} J_n'(k_0 b) & -\sqrt{\epsilon_r} Y_n'(k_0 b) \\ nH_n^{(1)}(k_e b) & k_p b H_n^{(1)'}(k_p b) & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

통상 sheath의 두께는 Debye length정도로 아주 얇으므로, $T = \frac{b-a}{a}$ 라 하면, $T \ll 1$ 이므로, Taylor展開의 처음 두 항을 취하여

$$\begin{aligned} J_n(k_0 a) &= J_n(k_0 b) - T k_0 b J_n'(k_0 b) \\ Y_n(k_0 a) &= Y_n(k_0 b) - T k_0 b Y_n'(k_0 b) \\ J_n'(k_0 a) &= J_n'(k_0 b) - T k_0 b J_n''(k_0 b) \\ Y_n'(k_0 a) &= Y_n'(k_0 b) - T k_0 b Y_n''(k_0 b) \end{aligned}$$

을 얻을 수 있으며

$$A_n = - \frac{n^2 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} J_n(k_e b) - j \frac{c}{u} k_e^2 b^2 J_n'(k_e b) - j \frac{c}{u} k_e^3 b^3 J_n(k_e b) T(1-T) \left(1 - \frac{n^2}{k_0^2 b^2}\right)}{n^2 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} H_n^{(1)}(k_e b) - j \frac{c}{u} k_e^2 b^2 H_n^{(1)'}(k_e b) - j \frac{c}{u} k_e^3 b^3 H_n^{(1)}(k_e b) T(1-T) \left(1 - \frac{n^2}{k_0^2 b^2}\right)} \quad (25)$$

$$J_n(k_0 b) Y_n'(k_0 b) - J_n'(k_0 b) Y_n(k_0 b) = \frac{2}{\pi k_0 b}$$

$$J_n(k_0 b) Y_n''(k_0 b) - J_n''(k_0 b) Y_n(k_0 b) = -\frac{2}{\pi k_0^2 b^2}$$

$$\begin{aligned} J_n'(k_0 b) Y_n''(k_0 b) - J_n''(k_0 b) Y_n'(k_0 b) \\ = \frac{2}{\pi k_0 b} \left(1 - \frac{n^2}{k_0^2 b^2}\right) \end{aligned}$$

및 Hankel의 asymptotic expansion을 이용하여 A_n 및 B_n 을 다음과 같이 간단히 줄일 수 있다.

$$B_n = \frac{j \frac{2}{\pi} - n}{H_n(k_p b) \left[n^2 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} H_n(k_e b) - j \frac{c}{u} k_e^2 b^2 H_n^{(1)'}(k_e b) - j \frac{c}{u} k_e^3 b^3 H_n(k_e b) T(1-T) \left(1 - \frac{n^2}{k_0^2 b^2}\right) \right]} \quad (26)$$

Total scattering cross section은 入射波의 Poynting vector의 크기와 圓柱單位길이당 散亂된 波의 total power의 比로 定義된다. 入射電磁波의 Poynting vector의 크기가 $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon_r}}$ 이 되므로 EM波 入射時 散亂되는 EM mode의 total scattering cross section은

$$\sigma_{EM}^T = \frac{4}{k_e} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |A_n|^2 \quad (27)$$

EM波 入射時 散亂되는 P mode의 total scattering cross section은

$$\sigma_P^T = \frac{4}{k_e} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |B_n|^2 \quad (28)$$

이 된다. 全體 power는 上記 mode間에 結合이 일어나지 않으므로 各各을 합하면 된다.

Back scattering cross section은 radar detection分

野에 重要な 意味를 가진다, 入射 Poynting vector의 크기와 모든 ϕ 에 대해 $H_z^s(\rho, \phi) = H_z^s(\rho, \pi)$ 가 되는 등가적인 無指向性散亂體에 依해 散亂된 單位길이당 total power의 比로서 定義된다. EM波 入射時 EM mode의 back scattering cross section은

$$\sigma_{EM}^B = \frac{4}{k_e} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n A_n \right|^2, \quad (29)$$

EM波 入射時 Pmode의 back scattering cross section은

$$\sigma_P^B = \frac{4}{k_e} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n B_n \right|^2 \quad (30)$$

이 된다. 上式들에서 A_n 및 B_n 은 (23)(24) 또는 (25)(26)이다.

上記式들은 $k_0 a$ 가 작은 경우 수렴이 빠르므로 Com-

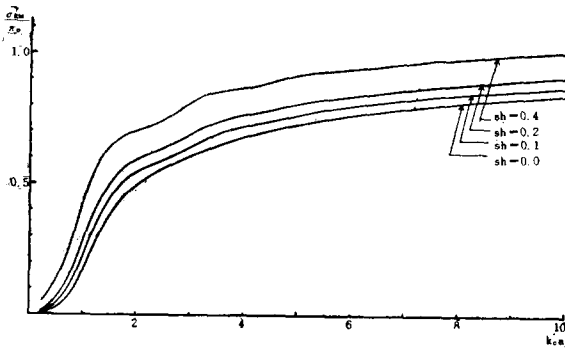


Fig. 1. sheath effect on the normalized total scattering cross section in the EM mode
 $(\frac{c}{u} = 10^4, \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 0.75)$

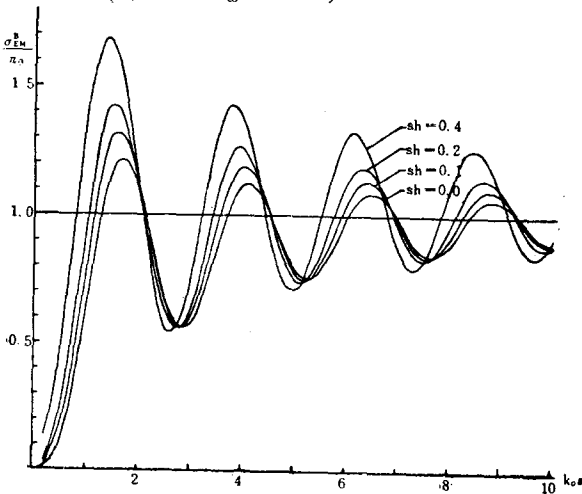


Fig. 3. sheath effect on the normalized back scattering cross section in the EM mode
 $(\frac{c}{u} = 10^4, \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 0.75)$

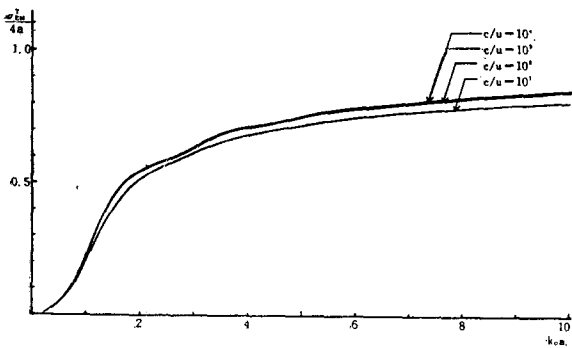


Fig. 4. sheath effect on the normalized total scattering cross section in the EM mode
 $(\frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 0.75, sh = 0.1)$

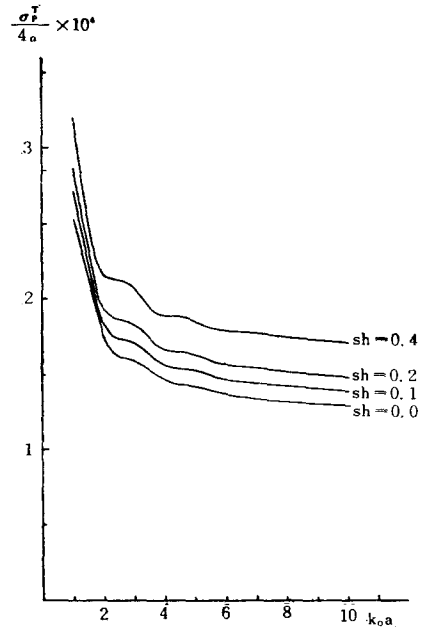


Fig. 2. sheath effect on the normalized total scattering cross section in the P mode
 $(\frac{c}{u} = 10^4, \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 0.75)$

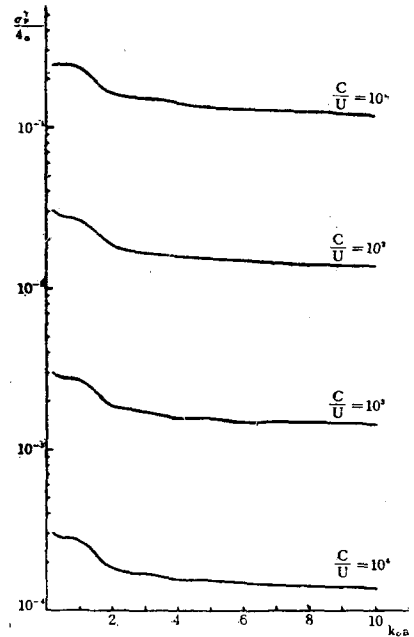


Fig. 5. sheath effect on the normalized total scattering cross section in the P mode
 $(\frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 0.75, sh = 0.1)$

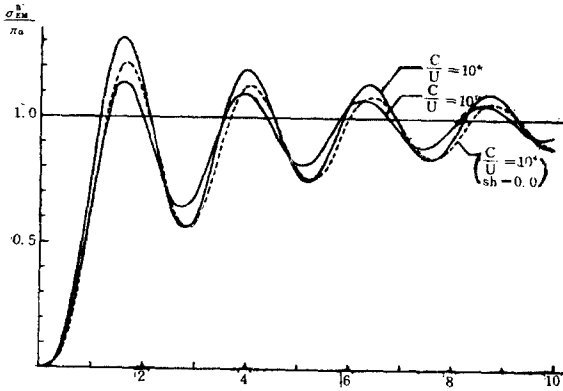


Fig. 6. sheath effect on the normalized back scattering cross section in the EM mode ($\frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 0.75, sh = 0.1$)

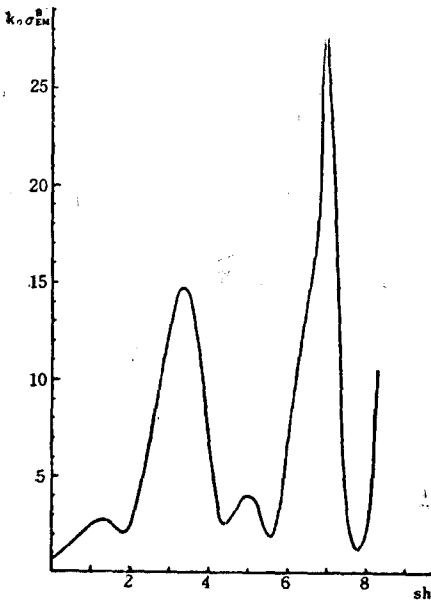


Fig.7. sheath effect on the back scattering cross section in the EM mode as a function of sheath thickness ($\frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 0.75, \frac{c}{u} = 10^4$)

puter로 數值解를 얻을 수 있다.

그림 1~3은 $\sigma_{EM}^T, \sigma_P^T$ 및 σ_{EM}^B 를 $\frac{c}{u} = 10^4, \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 0.75$ 인 경우 몇가지 sheath의 두께에 대해 $k_0 a$ 의 함수로 나타낸 것이다. sh 는 sheath의 두께와 半徑 a 의 비이다. 그림 4~6은 $\sigma_{EM}^T, \sigma_P^T$ 및 σ_{EM}^B 를 $\frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 0.75, sh = 0.1$ 인 경우 수개의 $\frac{c}{u}$ 에 대하여 $k_0 a$ 의 함수로 나

타낸 것이다. 그림 7은 σ_{EM}^B 를 $\frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 0.75, \frac{c}{u} = 10^4$ 인 경우 sheath두께의 함수로 나타내었다.

4. 結 論

壓縮性 plasma內에서 sheath로 둘러쌓인 圓柱型 導體에 의한 波의 散亂效果를 解析的인 方法으로 求하고 結果를 computer에 의해 計算하여 graph로 제시하였다.

Scattering cross section $\sigma_{EM}^T, \sigma_P^T$ 및 σ_{EM}^B 의 값은 sheath에 의해 증가됨을 알 수 있다. σ_{EM}^T 및 σ_{EM}^B 는 $\frac{c}{u}$ 의 증가에 따라 증가하였으나 σ_P^T 는 감소하였다. σ_P^T 는 $\frac{c}{u}$ 에 의해 크게 영향받음을 알 수 있다. Back scattering cross section σ_{EM}^B 의 값은 sheath의 두께가 커짐에 따라, 多重反射, 굴절 및 간섭 등의 복합적인 요인으로 매우 복잡한 變化를 하나, 주기적으로 최대치가 증가하였다.

參 考 文 獻

1. S. Seshadri, "Radiation from electromagnetic sources in a plasma," IEEE Trans. on AP, vol. AP-13, pp.79-88, January 1965.
2. S. Seshadri, I. Morris and R. Mailloux, "Scattering by a perfectly conducting cylinder in a compressible plasma," Can.J. Phys., vol.42, pp.465-467., March 1964.
3. G. Gal and W. Gibson, "Interaction of electromagnetic waves with cylindrical plasma," IEEE Trans. on AP, vol. AP-16, pp.468-475, July 1968.
4. S. Seikai and T. Shiozawa, "Scattering of EM waves by a rotating electron-plasma column," IEEE Trans. on AP, vol. AP-23, pp.75-83, January 1975.
5. C. Jiang, "Wave propagation and dipole radiation in a suddenly created plasma," IEEE Trans. on AP, vol. AP-23, pp.83-90, January 1975.
6. L. Oster, "Linearized theory of plasma oscillations," Rev. Mod. Phys., vol.32, pp.141-168, January 1960.
7. S. Seshadri, "Excitation of plasma waves in an unbounded homogeneous plasma by a line source," IRE Trans. on MTT, vol. MTT-11, pp.39-50, May 1964.