兩端固定 變斷面 圓弧아—치의 數値解析에 關한 研究

Numerical Analysis of Tapered Circular Arch with Fixed Ends

朴 文 浩* · 李 炳 求**
Moon Ho Park, Byoung KooLee

Summary

The governing differential equations for the tapered circular arch with fixed ends have been derived, and a numerical procedure for the solution of these equations have been developed.

The governing differential equations were solved numerically by an initial value integration procedure and Shooting Methods for boundary value problems. The Runge-Kutta fourth order integration technique was used. The methods was programmed for a Cyber 73-18 computer System, and all esults were obtained on this computer.

A detailed study has been made for a fixed arch with an angle of opening equal to 0.7 radian, and the results are presented in detail in tables and curves.

It is hoped that the results presented herein is applied to the deformations of given point from the tri-axial direction of tapered circular arch with fixed ends, bending moment, and torsional moment, and that at the same time results to be used for archwise structures in steel structure.

Ⅰ. 序 論

1. 概 要

變斷面 構造物은 等斷面 構造物에 比해 斷面의 性質과 力學的인 解析이 훨씬 複雜하고 難解하다. 그러나 變斷面을 使用한 構造物은 同一許容應力을 갖는 等斷面 構造物 보다 材料의 節約的인 面에서 훨씬 經濟的이다. 특히 面內荷重에 대하여 兩支持點에 水平反力이 생기는 變斷面 아-치橋는 長大支間의 構造로 利用할 수 있는 力學的인 面, 經濟的인 面에서 理想的인 構造物이다.

高剛度 材料의 發達과 더불어 最近에는 長大支間

*慶北大學校 工科大學 專任講師
**韓國科學技術研究所 研究員

의 아-치橋를 架設할 수 있게 되었으며 이에따라 幅員과 支間의 比가 작아져 橋軸에 垂直인 風荷重과 같은 面外荷重을 받는 아-치와 曲線보(Curved beam)의 問題가 重要하게 되었다.

아-치와 曲線보에 관련된 연구의 연혁과 동향을 살펴보면 1943年 剛本舜三[1]는 軸線을 포함하는 面에 수직한 荷重을 받는 圓形曲線보에 관하여 平面的解析을 하였으며 1951年 Welsh, J.G.[2]는 曲線보의 面內, 面外荷重은 아-치橋의 面外, 面內荷重과 매우 恰似하다는 理由를 들어 曲線보의 彈性曲線式을 아-치橋에 도입하여 荷重이 아-치의 面에 垂直으로 作用하는 問題를 取扱하였다. 이어 1954年 Lars Östlund[3]는 橫方向의 보강재를 갖는 아-치橋의 水平安定度에 관하여 硏究하였다. 그후 1960年代의 약 10년간에 아-치와 曲線보의 剛度와 變位에 관한 연구가 집중되었다. 이에 관련된 代表的인 論文을 들면 1961年 倉西茂[4]는 아-치部材의 Bending torsion을 考慮해서 兩支點의 Warping이 完全히 拘束되어 있는 경우의 水平橫荷重을 받는 아-치橋에 관한 論文과 1961年 Philip T.A. Donald와 William G. Godden[5]의 橫方向으로 非지지된 포물선 아-치의 橫擧動에 관한 論文, Alfred L. Prame과 Eugene P. Holland[6]의 變斷面의 두께를 갖는 포물선 아-치의 擧動에 대한 論文 및 Chen pang Tan과 Sidney Shore[7], 黃鶴周[8]氏 等의 論文을 들 수 있다, 1970年代에 이르러서는 콤퓨터기술과 수학적기법의 급격한 發展과 高剛度 材料의 發達에 자극을 받아 아-치와 曲線보의 經濟的 設計에 관한 硏究가 대두되었다. 이에 관한 國內外의 代表的인 硏究동향을 살펴보면 1970年 Lansford C. Bell과 Conrad P. Heins[9]의 Curred Girder橋의 解析에 대한 論文, Sritawat Kitipornchai와 Nicholas S. Trahair[10]의 等斷面과 變斷面構造物의 經濟性을 제시한 變斷面 I 型보의 彈性安定에 관한 論文, 1973年 朴文浩[11]의 兩端固定 變斷面 圓弧 ARCH에 관한 硏究, 李炳求[12]의 1974年 兩端固定 圓弧 아-치의 振動에 관한 硏究[12]等을 들 수 있다

이에 本 論文에서는 長大支間의 橋梁에서 問題가 되는 經濟性(材料節約)을 고려한 變斷面 원호 아-치를 擇하였다. 또한 力學的으로는 아-치의 安定條件에 가장 不利한 아-치 頂點(Crown)에 面內荷重과 面外荷重을 作用하였을 境遇의 兩端固定 變斷面 圓弧 아-치의 彈性曲線의 微分方程式을 誘導하여 三軸方向의 任意의 點에 대한 變位, 비틈각, 휨모멘트, 비틀림 모멘트의 一般解를 求하였다. 또한 이들의 數値解를 얻을 수 있도록 一聯의 數値解析 過程을 展開하였다.

本 論文의 目的은 兩端固定變斷面 圓弧 아-치의 基本微分方程式을 誘導하여 그 一般解를 求하고 이를 電子計算機를 利用하여 數値解析하므로서 복잡한 兩端固定變斷面 圓弧아-치 構造物의 力學的 諸問題 解決과 長大支間의 아-치斷面을 縮少하여 材料의 節約을 기하고자 함과 一般 實技術者가 손쉽게 經濟的인 아-치橋를 設計하는데 直接 利用할 수 있도록 하는데 그 目的이 있다.

2. 記 號

本 論文에서 使用한 記號는 다음과 같다.

英文字

E 彈性係數

G 剪斷彈性係數

H_a 水平反力

h 初期點으로 부터의 微少增分

I_y, I_z Y軸 및 Z軸의 慣性모멘트

I_p 極慣性모멘트

I_w Warping 常數

I_t St. Venant torsion 常數

M_a Y軸의 端모멘트

M_{0a} Z軸의 端모멘트

$M_{y(\varphi)}$, $M_{z(\varphi)}$ Y軸 및 Z軸의 아-치軸上의 휨모멘트

P 垂直荷重

Q 水平橫荷重

R 아-치의 半徑

T_{0a} 비틀림 端모멘트

$T_{(\varphi)}$ 아-치軸上의 비틀림모멘트

u, v, w X軸, Y軸 및 Z軸의 變位

V_a 垂直反力

X, Y, Z 直交座標系

希臘文字

α 아-치中心角의 半內角

β X軸의 斷面廻轉角

γ Y軸의 斷面廻轉角

θ 아-치의 端部로부터 任意 아-치軸上 까지의 角

φ 水平軸으로부터 任意 아-치軸上까지의 角

Ⅱ. 基本微分方程式과 境界條件

1. 基本假定

本 論文은 다음과 같은 假定下에서 理論을 展開하였다.

(1) 아-치의 材料는 同一體이며, 彈性係數와 剪斷彈性係數는 一定하며, Hooke의 法則을 滿足한다.

(2) 아-치斷面의 中心軸線은 圓弧의 一部分이다.

(3) 圓弧의 形狀은 外力에 의하여 크게 變하지 않는다.

(4) 斷面의 各 軸方向의 成分은 線形으로 變한다.

(5) 아-치는 頂點에 대하여 完全對稱이다.

위의 假定에 의하여 그림 1과 같이 圓弧아-치는 中心角이 2α, 半徑이 R이고, A 및 B點에서 固定되어 있으며, 各 軸方向 變位와 廻轉角 等은 화살표 方向을 陽(+)의 方向으로 한다.

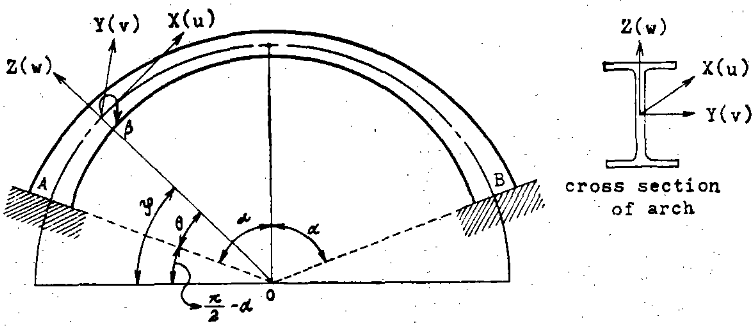

Fig. 1. Coordinate and displacement notations

2. 變斷面 보의 斷面性質

그림 2는 變斷面 보를 나타낸 것으로 여기서 X, Y, Z는 直交座標系의 3軸을 나타낸다. 變斷面 보의 흘렌지幅(flange width)과 腹板의 높이(web depth)가 X軸에 대하여 線形으로 變한다고 假定하면 變斷面 보의 任意斷面에 대한 性質(cross-sectional properties of the beam)은 다음과 같다[18].

$$I_{y(x)}=I_{y_2}x^3/(a+L)^3 \qquad (1\cdot a)$$

$$I_{z(x)}=I_{z_2}x^3/(a+L)^3 \qquad (1\cdot b)$$

$$I_{w(x)}=I_{w_2}x^5/(a+L)^5 \qquad (1\cdot c)$$

$$I_{p(x)}=I_{p_2}x^3/(a+L)^3 \qquad (1\cdot d)$$

$$I_{s(x)}=I_{s_2}x(a+L) \qquad (1\cdot e)$$

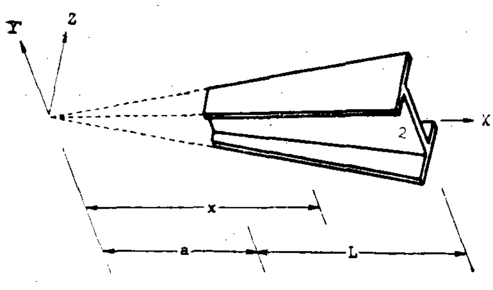

Fig. 2. Tapered-Beam Section

3. 아-치의 荷重條件 및 解析

本 論文에서 생각하는 아-치의 荷重條件은 그림 3—1과 같이 아-치의 頂點에 面內 및 面外의 集中荷重 P와 Q가 同時에 作用하는 境遇이다.

그림 3—1의 集中荷重 P와 Q는 그림 3—2와 그림 3—3과 같이 面內 및 面外의 두가지 荷重條件으로 分離할 수 있으며 이들 荷重條件은 重疊의 原理를 利用하여 解析할 수 있다.

그림 3—2의 境遇에는 對稱條件 및 castigliano의 定理에 의하여 兩端의 垂直反力, 水平反力 및 Y軸의 휨모멘트를 求할 수 있다.

$$V_a=\frac{1}{2}P \qquad (2\cdot a)$$

$$H_a=V_a\left(\frac{1}{2}\sin 2\alpha-\sin\alpha-\frac{\alpha}{4}\cos 2\alpha+\frac{\alpha}{4}\right)\Big\backslash\left(\sin^2\alpha-\frac{\alpha}{4}\sin 2\alpha-\frac{\alpha^2}{2}\right) \qquad (2\cdot b)$$

$$M_a=\Big\{-V_aR\left(-\frac{\alpha}{2}\sin 2\alpha-\frac{3}{4}\cos 2\alpha+\cos\alpha-\frac{1}{4}\right)+V_aR\left(\frac{1}{2}\sin 2\alpha-\sin\alpha-\frac{\alpha}{4}\cos 2\alpha+\frac{\alpha}{4}\right)\times\left(-\frac{3}{4}\sin 2\alpha+\alpha\cos^2\alpha+\frac{\alpha}{2}\right)\Big\backslash\left(\sin^2\alpha-\frac{\alpha}{4}\sin 2\alpha-\frac{\alpha^2}{2}\right)\Big\}\Big\backslash(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha) \qquad (2\cdot c)$$

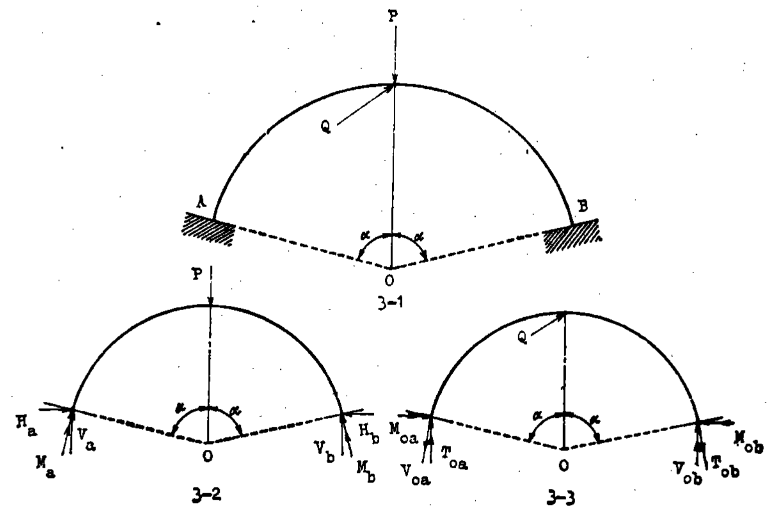

Fig. 3. Applied loads and its analysis

마찬가지로 그림 3—3에서는 固定端의 橫方向反力, Z軸의 端모멘트와 端部비틀림모멘트를 求할 수 있다.

$$V_{0a}=\frac{1}{2}Q \qquad (3\cdot a)$$

$$M_{0a}=\frac{Q}{2}(1-\cos\alpha) \qquad (3\cdot b)$$

$$T_{0a}=\frac{1}{2}QR\sin\alpha-\Big\{QR\sin^2\alpha\Big\backslash 2EI_z+QR\Big(\frac{3}{4}-\cos\alpha+\frac{1}{4}\cos 2\alpha\Big)\Big\backslash GI_p\Big\}\Big\backslash\Big\{(2\alpha+\sin 2\alpha)\Big\backslash 2EI_z+\Big(\alpha-\frac{1}{2}\sin 2\alpha\Big)\Big\backslash GI_p\Big\} \qquad (3\cdot c)$$

끝으로 任意 아-치軸上에 대한 Y軸, Z軸의 휨모멘트와 비틀림모멘트는 式(2·a)~(3·c)로부터 求할 수 있다.

$$T_{(\varphi)}=K_1\sin\varphi+K_2\cos\varphi+K_3 \qquad (4.\ a)$$

$$M_{y(\varphi)}=K_4\sin\varphi-K_5\cos\varphi+K_6 \qquad (4.\ b)$$

$$M_{z(\varphi)}=K_7\sin\varphi-K_8\cos\varphi \qquad (4.c)$$

여기서

$$K_1=M_{0a}+V_{0a}R\cos\alpha$$

$$K_2=T_{0a}+V_{0a}R\sin\alpha$$

$$K_3=-V_{0a}R$$

$$K_4=-H_aR$$

$$K_5=-V_aR$$

$$K_6=H_aR\cos\alpha+V_aR\sin\alpha+M_a$$

$$K_7=-T_{0a}+V_{0a}R\sin\alpha$$

$$K_8=-M_{0a}+V_{0a}R\cos\alpha$$

4. 圓弧아-치의 基本微分方程式

圓弧아-치의 彈性曲線式의 基本微分方程式[14)]은 다음과 같다.

$$M_y=-EI_y\Big(w''+\frac{u'}{R}\Big) \qquad (5.\ a)$$

$$M_z=-EI_z\Big(v''+\frac{\beta}{R}\Big) \qquad (5.\ b)$$

$$T_\varphi=GI_p\Big(\beta'-\frac{v'}{R}\Big) \qquad (5.\ c)$$

$$T_w=-EI_w\Big(\beta'''-\frac{v'''}{R}\Big) \qquad (5.\ d)$$

$$\gamma=\beta-\frac{v}{R} \qquad (5.\ e)$$

여기서 프라임(′)은 아-치의 圓周 s에 대한 微分을 나타낸다. $ds=Rd\varphi$이므로 式(5.a)~(5.e)의 ds, ds^2과 ds^3은 $Rd\varphi$, $Rd\varphi^2$과 $Rd\varphi^3$으로 各各 置換할 수 있다.

假定 (3)으로부터 $u'-w/R=0$[11)]을 얻을 수 있고 $ds=Rd\varphi$이므로

$$u'=w \qquad (6,\ a)$$

여기서 프라임(′)은 φ에 대한 微分을 나타낸다.

式(1.a), (4.a) 및 (5.a)로부터 다음 式을 얻을 수 있다.

$$w''+w=T_1\varphi^3\sin\varphi+T_2\varphi^3\cos\varphi+T_3\varphi^3 \qquad (6.\ b)$$

式(1.b), (4.b), (5.e) 및 (5. b)로부터

$$v''+v=T_4\varphi^3\sin\varphi+T_5\varphi^3\cos\varphi-R\gamma \qquad (6.\ c)$$

마지막으로 式 (1.c), (1.d), (4.c), (5.c) 및 (5.d)로부터 다음 式을 求할 수 있다.

$$\gamma'''+T_6\varphi^2\gamma'=T_7\varphi^5\sin\varphi+T_8\varphi^5\cos\varphi-T_9\varphi^5 \qquad (6.d)$$

여기서

$$T_1=-RK_4/E\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 I_{yc}$$

$$T_2=-R^2K_5/E\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 I_{yc}$$

$$T_3=-R^2K_6/E\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 I_{yc}$$

$$T_4=-R^2K_7/E\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 I_{yc}$$

$$T_5=R^2K_8/E\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 I_{zc}$$

$$T_6=T_{60}/T_{70}$$

$$T_7=K_1/T_{70}$$

$$T_8=K_2/T_{70}$$

$$T_9=K_3/T_{70}$$

$$T_{60}=G\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 I_{pc}/R$$

$$T_{70}=-E\left(\frac{\pi}{2}\right)^5 I_{wc}/R^3$$

式(6.a)~(6.d)가 兩端固定 變斷面 圓弧아-치의 彈性曲線式에 대한 基本微分方程式이다.

5. 境界條件

基本微分方程式(6.a)~(6.d)에 대한 境界條件은 다음과 같다.

아-치의 固定端部($\varphi=\frac{\pi}{2}-\alpha$)에서는 式(7.a)~(7.e)의 境界條件을 滿足시킨다.

$$u=0 \tag{7. a}$$

$$v=0 \tag{7. b}$$

$$w=0 \tag{7. c}$$

$$\gamma=0 \tag{7. d}$$

$$\gamma''=0 \tag{7. e}$$

아-치의 頂點($\varphi=\frac{\pi}{2}$)에 대한 境界條件은 다음과 같다.

$$v'=0 \tag{7. f}$$

$$w'=0 \tag{7. g}$$

$$\gamma'=0 \tag{7. h}$$

Ⅲ. 基本微分方程式의 數値解析

1. Runge-Kutta積分技法

大部分의 工學的인 問題에 있어서 많은 式들은 前節에서 誘導한 바와 같이 微分方程式으로 表示된다. 이들 微分方程式을 解析하기 위해서는 代數的 解法과 數値解析的 方法을 들 수 있다.

代數的 解法은 微分方程式의 解를 求하기 위해서 많은 時間과 勞力이 必要하며 또 一般解가 存在하지 않는 境遇에는 그 解를 求할 수 없다. 그러나 數値解析的 方法은 一般解가 存在하지 않더라도 그 解를 求할 수 있으며, 最近 電子計算機의 急速한 發展과 더불어 尨大한 量의 計算을 數十秒以內에 計算이 可能하므로 工學的 問題에서 數値解析的 方法이 많이 利用되게 되었다.

微分方程式의 數値解析的 方法에는 Euler's Methods, Taylor Expansion Methods, Runge-Kutta Methods, Multistep Methods等 여러 方法이 있으나 Runge-Kutta Methods가 다른 方法에 比하여 그 精度가 높으므로 本 論文에서는 微分方程式을 積分하기 위하여 Runge-Kutta Methods를 採擇하였다. Runge-Kutta積分技法[15,16]을 簡單히 說明하면 다음과 같다.

初期條件 $y(x_i)=y_i$를 滿足하는 微分方程式

$$y'=f(x,y) \tag{8}$$

이 주어져 있다. 이微分方程式을 풀기위해서 初期點 (x_i, y_i)에서 X軸에 대한 微少增分 $\triangle x_i$에 대하여 Y軸에 대한 增分 $\triangle y_i$를 求하면 $(x_i+\triangle x_i, y_i+\triangle y_i)$를 얻을 수 있으며 이를 反復施行하면 微分方程式의 數値解를 求할 수 있다. 4次 Runge-Kutta 積分技法(fourth-order Runge-Kutta formula)에 의한 $\triangle y_i$를 求하는 過程은 다음과 같다.

$$\triangle' y_i=hf(x_i,\ y_i) \tag{9. a}$$

$$\triangle'' y_i=hf\left(x_i+\frac{h}{2},\ y_i+\frac{1}{2}\triangle' y_i\right) \tag{9. b}$$

$$\triangle''' y_i=hf\left(x_i+\frac{h}{2},\ y_i+\frac{1}{2}\triangle'' y_i\right) \tag{9. c}$$

$$\triangle'''' y_i=hf(x_i+\ h,\ y_i+\triangle''' y_i) \tag{9. d}$$

$$\triangle y_i=\frac{1}{6}(\triangle' y_i+2\triangle'' y_i+2\triangle''' y_i+\triangle'''' y_i) \tag{9. e}$$

여기서는 h는 $\triangle x_i$와 같다.

工學的인 問題에 있어서 大部分의 微分方程式은 聯立微分方程式으로 이루어져있으며, 이러한 聯立微分方程式도 역시 Runge-Kutta積分技法에 適用시킬 수 있다. 例를 들어서 聯立微分方程式을 第2次 Runge-Kutta 積分技法에 適用한 例는 다음과 같다[17].

주어진 聯立微分方程式

$$y'=f(x,y,z),\quad z'=g(x,y,z),$$

$$y(x_i)=y_i,\ z(x_i)=z_i \tag{10}$$

은 다음의 數値解析 過程에 의하여 그 解를 求할 수 있다.

$$\triangle' y_i=hf(x_i,\ y_i,\ z_i)\ ;\ \triangle' z_i=hg(x_i,\ x_i,\ z_i) \tag{11. a}$$

$$\triangle y_i = hf(x_i + \frac{h}{2},\ \ y_i + \frac{1}{2}\triangle' y_i,\cdot z_i + \frac{1}{2}\triangle' z_i) \tag{11. b}$$

$$\triangle z_i = hg(x_i + \frac{h}{2},\ \ y_i + \frac{1}{2}\triangle' y_i,\ \ z_i + \frac{1}{2}\triangle' z_i) \tag{11. c}$$

$$y_{i+1} = y_i + \triangle y_i;\ \ z_{i+1} = z_i + \triangle z_i \tag{11. d}$$

2. 微分方程式의 境界條件問題

Runge-Kutta積分技法을 微分方程式에 適用하기 위해서는 式(8)에서와 같이 初期點(initial point)에서 모든 初期境界條件을 알아야 한다. 그러나 大部分의 微分方程式에서는 式(7. a)~(7. e)에서 보는 바와 같이 部分的인 初期境界條件을 알 수 있으며, 反面 初期點에서 未滿된境界條件을 初期點이 아닌 다른 點에서 그 境界條件을 알 수 있다. 이러한 微分方程式을 境界條件問題(boundany value problem)라 하며 이러한 微分方程式은 다음에서 說明하는 Shooting Methods[18]에 의해서 數値解析할 수 있다.

式 (8)을 境界條件問題에서 다시 생각하면

$$y' = f(x,\ y) \tag{12}$$

式(12)의 微分方程式에서 初期點에서의 境界條件 $(x_i,\ y_i)$는 알려져 있지 않고 反面 任意 다른 點에서의 境界條件 $(x_n,\ y_n)$이 알려져 있다.

初期點 $y(x_i)$의 값이 未知이므로 $y(x_i)=\alpha$로 假定하여 Runge-Kutta積分技法에 의하여 $y(x_n)$을 求할 수 있으나, 여기서 計算된 $y(x_n)$은 α를 假定한 結果로 境界條件 y_n과 一致하지 않는다. 따라서 初期値 $y(x_n)$를 α_0 및 α_1로 各各 假定하여 Runge-Kutta積分技法에 의하여 그 各各에 대한 $y(\alpha_0\ ;\ x_n)$ 및 $y(\alpha_1\ ;\ x_n)$을 求하여 境界條件 y_n과 比較한다.

그림 4—1은 初期點에서 積分을 始作하는 初期條件問題(initial value problem)의 解를 나타낸 것이고 그림 4—2는 α의 函數로 $y(\alpha\ ;\ x_n)$을 나타낸 것이다. 初期點을 α_0, α_1으로 假定하여 計算된 $y(\alpha_0\ ;\ x_n)$과 $y(\alpha_1\ ;\ x_n)$은 境界條件 y_n과 比較하여, y_n에 더 近接된 初期値 α_2를 假定하기 위하여 다음의 補揷法[19]을 利用한다.

$$\alpha_2 = \alpha_0 + (\alpha_1 - \alpha_0)\frac{y(x_n) - y(\alpha_0\ ;\ x_n)}{y(\alpha_1;\ x_n) - y(\alpha_0; x_n)} \tag{13}$$

다시 α_1 및 α_2에 의하여 $y(\alpha_1\ ;\ x_n)$과 $y(\alpha_2\ ;\ x_n)$을 計算하고 $y(x_n)$과 比較하여 α_3를 다시 假定하여 一定한 精度를 얻을때까지 反復施行하여 初期點을 滿足시키는 境界條件을 찾는다.

3. 數値解析 過程

위에서 說明한 Runge-Kutta積分技法과 Shooting Methods를 利用하여 基本微分方程式(6. a)~(6. d)를 數値解析하기 위한 過程은 다음과 같다.

1) 微分方程式의 分離型

基本微分方程式을 Runge-Kutta積分技法에 適用하기 위해서는 다음 式과 같은 一次微分方程式으로 變換하여야 한다.

$$u' = w \tag{14}$$

$$w' = wA \tag{15. a}$$

$$wA' = -w + T_1\varphi^3 \sin\varphi + T_2\varphi^3 \cos\varphi + T_3\varphi^3 \tag{15. b}$$

$$v' = vA \tag{16. a}$$

$$vA' = -v + T_4\varphi^3 \sin\varphi + T_5\varphi^3 \cos\varphi - R\gamma \tag{16. b}$$

$$\gamma' = \gamma A \tag{17. a}$$

$$\gamma A' = \gamma B \tag{17. b}$$

$$\gamma B' = -T_6\varphi^2\gamma A + T_7\varphi^5 \sin\varphi + T_8\varphi^5 \cos\varphi + T_9\varphi^5 \tag{17. c}$$

2) 初期條件의 假定

Runge-Kutta積分技法에 適用하기 위해서 모든 初期條件을 假定하며, Shooting Methods에 適用하기 위하여 두쌍의 初期値를 假定한다.

3) Runge-Kutta積分技法의 適用

假定한 初期條件을 利用하여 Runge-Kutta積分技法에 의하여 아-치軸上의 任意點에 대하여 變位 및 비틀림角을 計算한다.

4) 아-치頂 境界條件의 檢討

만일 假定된 初期値가 微分方程式을 滿足시키는 初期値라면 計算된 아-치頂의 境界條件은 式(7. f)~(7. h)를 滿足하여야 한다. 그러나 計算된 아-치頂의 條件이 正確하게 式(7. f)~(7. h)를 滿足할 수 없으므로 一定한 基準을 設定하여 이를 滿足하면 收斂한 것으로 하였다. 本 論文에서 使用한 收斂의 基準은 다음과 같다.

$$\left| vA\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| < 10^{-10} \tag{18. a}$$

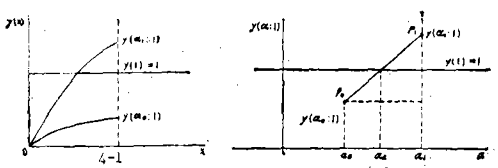

Fig. 4. Shooting Methods

$$\left|wA\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|<10^{-10} \qquad (18.\ b)$$

$$\left|\gamma A\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|<10^{-10} \qquad (18.\ c)$$

5) Shooting Methods의 適用

만일 式(18. a)~(18. c)를 滿足하지 않으면 새로운 初期値를 式(13)의 Shooting Methods에 의하여 計算하여 다시 Runge-Kutta積分技法을 適用한다.

는 그림 5와 같다.

73—18 電子計算機를 利用하였으며 電算處理過程圖 Shooting Methods의 收斂基準은 式(19)와 같다.

$$\left|\frac{\alpha_n-\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right|<10^{-5} \qquad (19)$$

만일 收斂의 基準이 式(19)를 滿足하지 않으면 1)의 過程으로 還流한다.

以上의 數値解析은 韓國科學技術硏究所의 Cyber

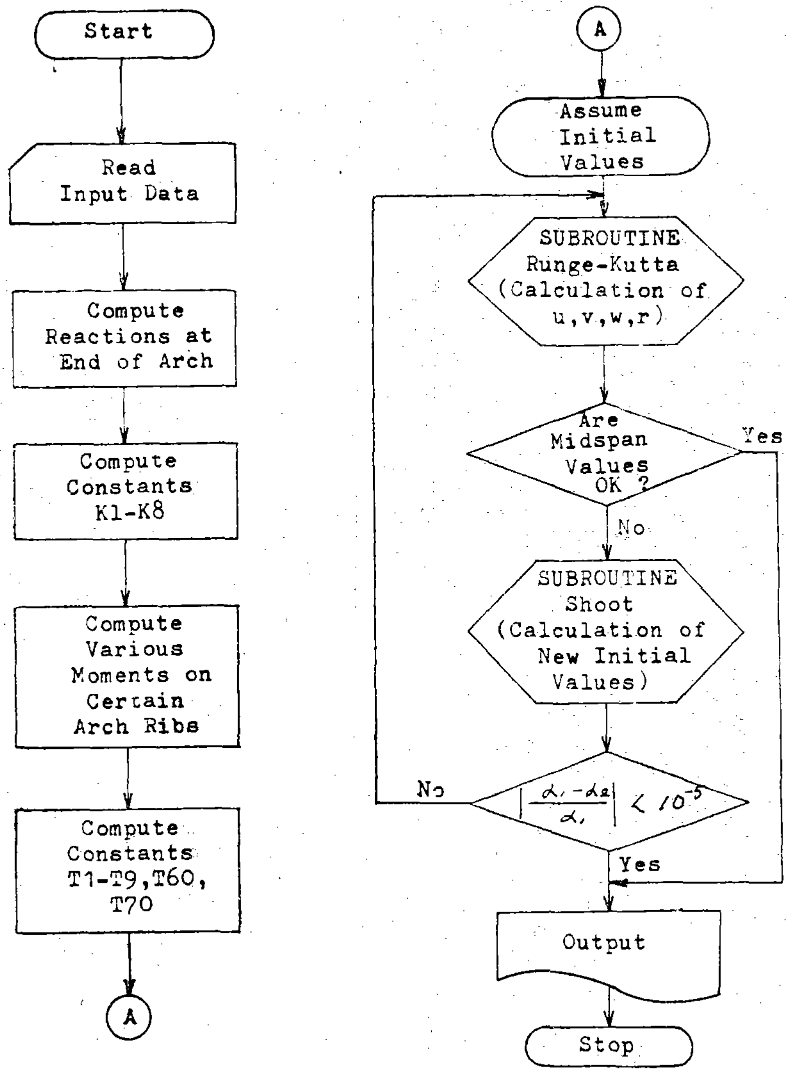

Fig. 5. Flow Chart

Ⅳ. 數値解析例題

1. 例題의 荷重條件 및 아-치條件

$Q=5$ ton
$P=9$ ton
$\alpha=0.7$ radian
$R=80$ m
$E=2.1\times10^{6}$ kg/cm²
$G=8.1\times10^{5}$ kg/cm²
$I_{ye}=9.92\times10^{8}$ cm⁴
$I_{ze}=4.12\times10^{7}$ cm⁴
$I_{pe}=3.76\times10^{4}$ cm⁴
$I_{we}=9.18\times10^{13}$ cm⁶

2. 數値解析 結果

1) 兩端反力 및 모멘트

위의 荷重條件과 아-치條件으로 計算된 兩端反力 및 모멘트는 다음과 같다.

$V_a=4.5$ ton
$H_a=11.52$ ton
$V_{oa}=2.5$ ton
$M_a=32.25$ t·m
$M_{oa}=47.03$ t·m
$T_{oa}=75.45$ t·m

또한 아-치軸上 任意 點에서의 各種 모멘트는 그림 6과 같다.

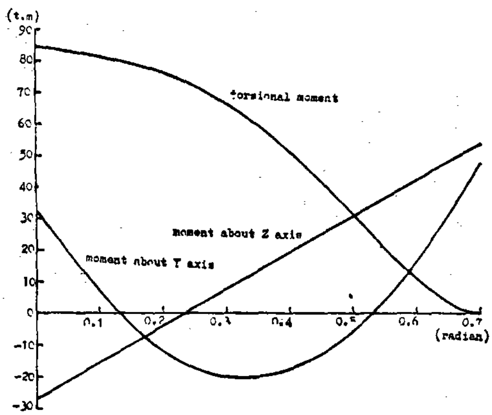

Fig. 6. Various moments

數値解析 例題에 使用한 荷重條件 및 아-치條件은 다음과 같다.

2) 數値解의 收斂

表 1은 아-치中心角의 半內角(α)의 分割數에 따른 數値解의 收斂을 나타낸 것이다. 여기서 아-치의 分割數는 Runge-Kutta積分技法에 適用할 $\triangle x_i$ 즉 h를 決定하는 數値이다.

變位 u, v, w 및 비틀림角 γ는 아-치의 分割數가 커질수록 數値解가 收斂하는 것을 볼 수 있다. 이 例題에서는 u 및 γ는 小數以下 6자리까지의 精度를 가질 때 아-치의 分割數는 15이며, v 및 w는 分割數 10에서 小數以下 有效자리수 6자리까지의 精度를 갖는다. 아-치의 分割數 15에서 充分한 精度를 갖고 收斂한다는 事實은 本 論文에 收錄된 例題以外의 例題에서도 成立한다는 것이 많은 例題의 數値解析에서 確認되었다. 따라서 實際의 兩端固定 아-치橋의 設計應用에 있어서 試行錯誤(erial and error)를 거치지 않고 直接 아-치의 分割數 15를 利用할 수 있다.

本 論文에서 表와 그림에 나타낸 變位 u, v, w 및 비틀림角 γ와 β는 모두 아-치의 分割數를 15로 하여 計算한 것이며, 表 1에서 보는 바와 같이 아주 높은 精度의 數値解가 收斂하는 것을 보여 준다..

表 1. 數値解의 收斂

아-치의* 分割數	u(cm)**	v(cm)**	w(cm)**	$\gamma\times10^{-9}$** (radian)
5	0.238804	0.481669	0.546488	1.026304
10	0.238868	0.481684	0.546497	1.026395
15***	0.238883	0.481684	0.546497	1.026402
20	0.238883	0.481684	0.546497	1.026402
25	0.238883	0.481684	0.546497	1.026402
30	0.238883	0.481684	0.546497	1.026402

* 아-치中心角의 半內角의 分割數
** 아-치頂의 變位 및 비틀림 角
*** 모든 結果는 아-치의 分割數를 15로하여 計算하였음.

3) 아-치軸上의 變位 및 비틀림角

本 例題의 數値解析으로 計算된 變位 u, v, w 및 비틀림角 γ와 β를 表 2와 그림 7과 그림 8에 나타내었다.

表 2. 아—치軸上의 變位 및 비틀림角

θ (radian)	u(cm)	v(cm)	w(cm)	$\gamma\times10^{-9}$ (radian)	$\beta\times10^{-6}$ (radian)
0.	0.	0.	0.	0.	0.
0.05	0.0015	0.0425	0.0594	0.1331	0.5317
0.10	0.0059	0.0858	0.1176	0.2628	1.0721
0.15	0.0132	0.1295	0.1740	0.3861	1.6183
0.20	0.0233	0.1733	0.2284	0.5006	2.1667
0.25	0.0361	0.2170	0.2802	0.6045	2.7124
0.30	0.0513	0.2600	0.3291	0.6965	3.2496
0.35	0.0689	0.3017	0.3745	0.7761	3.7709
0.40	0.0886	0.3414	0.4160	0.8433	4.2676
0.45	0.1104	0.3784	0.4529	0.8988	4.7294
0.50	0.1338	0.4115	0.4826	0.9433	5.1442
0.55	0.1588	0.4398	0.5105	0.9780	5.4978
0.60	0.1848	0.4620	0.5300	1.0036	5.7744
0.65	0.2116	0.4765	0.5423	1.0202	5.9556
0.70	0.2389	0.4817	0.5465	1.0264	6.0209

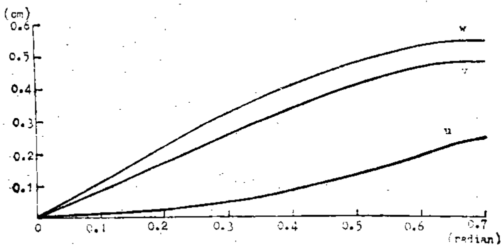

Fig. 7. Deflection of neutral axis on certain arch ribs

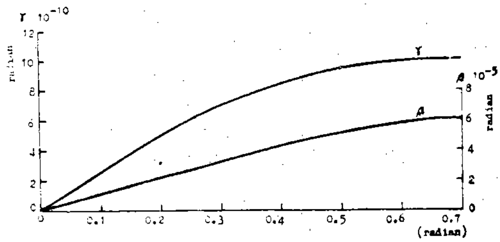

Fig. 8. Rotations of cross section on certain arch ribs

V. 結　　論

本 論文은 兩端固定 變斷面 圓弧아-치의 變位 및 비틀림角을 計算하는 實際的인 方法에 관한 研究로서 그 結論은 다음과 같다.

1. 兩端固定 變斷面 圓弧아-치의 彈性曲線의 基本微分方程式을 誘導하였다.
2. 基本微分方程式은 境界條件을 利用하여 Runge-Kutta 積分技法에 의하여 數値解析될 수 있었다.
3. 아-치의 數値解는 아-치中心角의 半內角을 15 分割하였을 때 充分한 精度를 갖고 收斂하였다.

參　考　文　獻

1. 岡本舜三, "軸線を含む面に垂直なる荷重を受ける圓形曲り梁の研究", 日本土木學會誌, 19卷 3號, 1943.
2. Welsh, J.G., "Lateral Load on High Arches", J.I.C.E. No. 10, 1951.
3. Lars Östlund, "Lateral Stability of Bridge Arches Braced with Transverse Bars", Transaction of The Royal Institute of Technology Stockholm, Sweden, Nr 84, 1954.
4. 倉西茂, "水平横荷重を受けるテーチ橋について", 日本土木學會論文集, 第73號, 1961.
5. Philip T.A. Donald and William G. Godden, "The transverse behaviour of laterally unsupported Parabolic arches", The Structural Engineer, Vol. 41, No. 6, June 1963.
6. Alfred L. Prame and Eugene P. Holland, "Parabolic Arches of Variable Thickness", ASCE transaction, Vol. 90, No. ST6, 1964.
7. Chen Pang Tan and Sidney Shore, "Response of horizontally curved bridge to moving load", ASCE, 6125, No. ST. 6, Sep., 1968, pp. 2135～2151.
8. 黃鶴周, "水平横荷重을 받는 Arch의 水平變位에 대하여", 대한트목학회지, 제16권 2호, 1968.
9. Lansford C. Bell and Conrad. P. Heins, "Analysis of Curved Girder Bridges", ASCE, 7462,

No, ST. 8, August, 1970, pp. 1658~1673.

10. Stritawat Kitipornchar & Nicholas S. Trahair, "Elastic Stability of Tapered I-Beams", ASCE, ST.2, 1972, pp. 713~729.
11. 朴文浩, "兩端固定 變斷面 圓弧아-치에 관한 硏究", 碩士學位論文, 延世大學校大學院, 1973.
12. 李炳求, "兩端固定 圓弧아-치의 振動에 관한 硏究", 碩士學位論文, 延世大學校大學院, 1974.
13. Charles G. Culver and Stephen M. Preg, Jr., "ELASTIC STABILITY OF TAPERED BEAM-COLUMNS", Journal of the structural division, ASCE, Vol. 94, No. ST2, Feb. 1968, pp. 456~457.
14. Philip T.A. Donald and Willian G. Godden: op. cit.,
15. Dorn, W.S. and McCracken, D.D., Numerical Methods with FORTRAN Ⅳ Case Studies, Tohn Wiley ane Sons, Inc., 1972, pp. 366~374.
16. John M. McCormick and Mario G. Salvadori, Numerical Methods in FORTRAN, Prentice-Hall Inc., 1964, pp. 100~102.
17. John M. McCormick and Mario G. Salvadori: op. cit., pp. 103~104.
18. S.D. Conte, Elementary Numerical Analysis, McGraw-Hill, Inc., 1965, pp. 168~269.
19. William G. Godden, Numerical Analysis of Beam and Column Structures, Prentice-Hall, Inc., 1965, pp. 199~200.