# 信号処理(I)—数学基礎 · Covariance로서 나타난 한 信号의 特質

# (Signal Processing(I) — Mathematical Basis and Characterization of Signals by Covariance Functions)

安 秀 桔*
(ANN, Souguil)

要 約

科學의 發達에 따라 더욱 遠距離의, 그리고 더욱 接近하기 어려운 곳에서 일어나는 現象을 다루게 됨에 따라 몹시 弱한 信號까지 取扱하기를 願하게 되었다. 遍在하고 있는 noise속에 찾기 어려운 정도의 弱한 信號를 다루게 됨에따라 random process를 取扱 할 줄 알아야 하게 되었고 今來 급격히 發達하고 있는 信號處理技術을 위해서는 이와 關聯된 分野가 차지하는 相互位置를 把握하기가 어렵게 되었다.

信號處理의 立場에서 이러한 관련성과 本質의 再把握을 꾀하여 보았다. 이글은 우선 數學과 random 과정 分析의 基礎에 限定되겠다.

**Abstracts**

Recent progresses in the signal processing technique in digital domain as well as that of analogue, impose a heavy burden on scientists and engineers intending to study this discipline. we surveyed basic tools for these vast branches to help those who have concerns on this field without being buried in detailed techniques. The first article is naturally confined to the basic tools namely random process analysis, state space analysis and characterization of random signal by covariance functions.

## 1. 序 論

땅은 어떠한 책이 배워 줄 수 있는 知識보다 더 많은 것을 우리에게 가르쳐 준다. 왜냐하면 大地는 우리에게 抵抗하기 때문이다. 人間은 障害物과 맞설때 自己自身을 알게 된다. 抵抗에 맞설려면 道具가 必要하다 대패가 또는 쟁기가 必要하다. 農夫는 耕作하면서 自然으로 부터 조금씩 秘密을 찾아낸다. 그가 캐낸 眞實은 가장 普遍的인 것이다. 같은 보양으로 飛行機는 사람으로 하여금 옛날부터 있어온 모든 難點과 부딪치게 한다.(쌩 · 떽쥐뻬리 - 人間의 大地)

사람들은 電子工學의 發達을 크게 믿고 있고 想像이 닿는대로 未來를 그려본다. 그러나 現實的인 問題에 부딪히게 되면 우리는 이러한 꿈들이 不可能하지는 않을 망정 各各에 합당한 努力이 꾸준히 行하여져야 그의(保證되어 있지는 않는) 代價로서 이루어지는 것이고 이러한 努力의 期間과 投入될 延人員數가 때로는 우리나라 scale을 넘을 경우가 相當히 많다.

自然科學의 能力은 多分히 對數的인 것이어서 일하고자하는 對象이 全體 量에 對해서 차지하는 percentage에 따라서 어려움의 程度가 決定되는 것이 보통이다. 四季節을 通하여 温度變化에 따른 길이의 變化가 1mm를 넘지 않게 하는 것은 30cm의 대나무자를 위해서는 쉽지만 30km의 鐵道레일을 위해서는 1cm에 限定하기도 어려운 것이다. 같은 보양으로 해서 計測의 問題에 있어서도 10 m 地下에 있는 1 m 半徑의 굴을 찾는 것은 地上에 設置된 測定器에 對한 立體角으로 보아서도 相當한 크기를 나타내지만 100 m 地下에 있을 경우에는 굴의 크기가 좀더 커도 찾아내기가 힘들다. 이러한 距離에서는 空洞과 周邊物質과 사이 異質의 比重이 클 수가 없다.

Walter E. Munk 氏가 R.B. Blackman 氏에게 보낸 편지에는 " general wave record로부터 極히

* 正會員, 서울大學校 工科大學 電子工學科
(Dept. of Electronics Engineering, Seoul National Univ.)
接受日字 : 1979年 11月 27日

弱한 低周波成分의 peak를 찾아내는데 成功하였는데 이는 spectral analysis의 힘을 입지 않았더라면 아마 놓쳐 버렸을 것이다. 이 peak는 一萬마일 떨어진 印度海로 부터 온 것인데 比較하자면 1km 떨어진 곳의 1㎜의 높이에 該當된다." 라는 句節이 있다. 그러나 이러한 것이 可能하게 되기까지는 營利에 直結되어 있지는 않는 財源으로 적어도 10年以上의 無風地帶가 提供되어야 하는 것이지 1·2年가지고 되는 것은 아니다.

이러한 信號源은 天體的인 size에서만 있는 것이 아니고 人體에 X-ray 等을 beam을 形成시켜 內部를 走査하였을 경우에도 그 反射波를(또는 透過波를) 分析하기가 極히 힘들다. 우리가 投入하는 어떠한 波動에 對해서도 臟器의 各各間의 異質尺度는 物理學的 側面에 對해서는 큰 것이 아니기 때문이다.

이러한 測定 즉 信號處理의 어려움의 또 하나의 要因은 雜音이다.[1][2]

雜音은 電子工學의 初創期에 믿어졌던 것과 같이 우리의 製作技術이 充分하지 못해서 일어나는 또는 加工處理 또는 測定環境을 理想化하지 못한데에서 오는 臨時的인 것이 아니고 좀더 本質的인 問題로서 熱的 entropy의 增加의 具體的인 表現으로서 Brown 運動과 같이 熱로 因한 分子運動의 非組織性때문에 일어나는 現象이고 電氣機器의 大量普及으로 因한 人工雜音과 함께 거의 不可避한 것임을 알 수 있다. 前者의 例로서는 大地속에 파묻힌 hydrophone(元來 물속의 振動을 電氣信號로 바꾸는 transducer)에는 原信號以外에 自體의 熱雜音도 있지만 大地構成物質의 여러 가지 振動 및 熱活動이 역시 雜音으로 추가되며 이 成分은 우리가 測定하고저하는 原信號源이 멀면 멀수록 그 自體를 파악하는 것을 防害하게 되는 것이다. 우리는 雜音으로서 오염된 信號만 入手하게 되는 것으로서 原信號는 推定하는 수 밖에 없다. 더군다나 原信號의 主 spectrum이 높은 周波數에 主로 分布되어 있다면 포착하기가 어렵다. 大地는 極히 낮은 周波數 成分만을 傳達하기 때문에 S/N가 急激히 惡化된다.

Radar의 受信에 있어서도 信號의 處理는 極히 어렵다. 熱雜音을 위시하여 原信號보다도 큰 雜音이 相當히 섞여오는 環境下에서 이곳에서 보낸 電波를 反射하고있는 對象物의 存在與否를 判定하기 爲해서는 決定論的 信號取扱方法으로서는 감당할 수가 없어서 threshold를 變動함에 따라 $P_F$ (probability of false alarm — 對象物이 없는데 있는 것으로 alarm을 내는 error probability), $P_M$ (probability of missing — 對象物이 있는데 alarm을 始動안 시킨 error probability), 및 $P_D$ (probability of detection — 對象物이 있을때 제대로 있는 것을 判定하여 alarm을 내는 確率) 等이 變한다. 一般的으로 觀察空間의 座標에 따라 가장 妥當한 判定을 行하는 方法이 주어지나(Bayes의 判定法) tolerate 할수있는 $P_F$等을 주고나서 變分法으로서 判定하는 方法(Neyman-Pearson의 方法)도 있다.[3][4]

大量의 data에서 뽑아내는 correlation, 또는 data의 Discrete Fourier Transform(또는 FFT) 그리고 두 data 間의 convoluntion sum등을 取扱하게 되기때문에 信號處理는 digital signal processing의 理論과 技術의 定立이 必要하게 된것이다. Discrcte time series 로서 卽, Sequence로서 나타나는 디지탈信號는 아나로그信號로 부터 sampling과 A-D變換에 依해 얻어지는 것이 普通이지만 電算機의 普及에 따라 처음부터 digital인 경우도 있다. 自動制御等에서 活用되고 있는 Z transform은 DFT를 特殊 case로 포함하고 있고 Fourier 變換에 對한 Laplace 變換의 경우와 같이 一般化되고 强力한 경우이다.

(3回에 걸친 論文에서 positive negative를 正·負로 記한다)

## 2. 豫備 및 基礎

### 가. Fourier 變換

Linear time invariant한 continuous system에서는 Fourier 變換에 依한 計算이 許容되고 簡便하다.[7,9,12,14] time function 과 그의 fourier transform, 그리고 한 fourier transform(frequency domain function)의 inverse 變換은 다음式으로 주어진다.

$$E(jw)=\int_{-\infty}^{\infty} e(t)\, e^{-jwt}\, dt\,,$$

$$e(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E(jw)\; e^{jwt}\, dw \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{-}1)$$

이러한 式에 依해서 關聯지어지는 이들 各各 $jw$와 $t$의 函數를 $E(jw) \leftrightarrow e(t)$와 같이 表記하면 이들은 time domain과 freguency domain에서 一對一 對應을 하고있어서 어느 쪽 domain에서 計算을 行하여도 또한쪽 domain에서의 計算이 그림자와 같이 對應하게 된다. 한 system에서 入力, 出力信號가 各各 $e(t)$, $r(t)$ 그리고 그 system의 Impulse reponse가 $h(t)$

이며 $e(t) \leftrightarrow E(jw)$

$$\left.\begin{array}{l} r(t) \leftrightarrow R(jw) \\ h(t) \leftrightarrow H(jw) \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots (1-2)$$

이라면 다음과 같은 性質이 있다.

① $r(t)$는 $e(t)$와 $h(t)$의 convolution 으로서 計算되고 $e(t) * h(t)$ 또는 $h(t) * e(t)$로서 表記되며 $h(t)$, $e(t)$等 函數의 順序를 바꿔도 支障이 없다. ( commutation law )

② 두개의 함수 $x(t)$와 $y(t)$의 convolution 은 다음式으로 주어진다.

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau \cdots\cdots\cdots (1-3)$$

$r(t) = h(t) * e(t)$이면 $R(jw) = H(jw)\, E(jw)$이다. 즉, time domain에서의 convolution 計算에 對應하는 frequency domain에서의 operatron은 單純한 곱셈으로서 前者보다는 越等히 容易하다. 그리고 한 system의 $H(jw)$ 즉 freq. transfer function 의 逆變換은 $h(t)$ 즉 그 system의 impulse response 이다.[15]

나. Causality

第一圖에서의 $e(t)$, $r(t)$間에는 그 system이 具體的으로 具顯될수있는 것이라면 出力이 그의 原因인 入力보다 時間的으로 앞 설 수는 없다. 따라서 出力 $r(t)$의 計算에 있어서 積分時間의 上限을 觀察當時의 時間으로 限定하여야 한다. 즉

$$r(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t-u)\, e(u)\, du \cdots\cdots\cdots (1-4a)$$

$h(t-u)$는 linear time invariant system에 있어서 $u$時에 들어온 impulse에 對한 $t$時의 response로서 $t$時에 있어서의 觀察을 위해서 $t$時以後에 들어오는 入力成分을 考慮할 必要가 없기 때문이다. 이와같이 結果가 自己自身의 原因을 앞지르지 않는 system을 causal system라 한다. 數式의 manipulation 에 있어서 non causal system을 假想할때도 많다. (4a)式은 time inuariant한 system을 對한 것이지만 一般的으로 入力이 $e(u)$ impulse response가 $h(t, u)$일때 出力은 다음式으로 算出되고 이는 一般化된 convolution 이다.[17]

$$r(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t, u)\, e(u)\, du \cdots\cdots\cdots (1-4b)$$

다. Correlation

한 system의 入力과 出力은 一般的으로 서로 聯關性이 있다. 어떤原因과 그 結果사이에는 correlation 이 있고 $e(t)$와 $r(t)$의 $\tau$時間後의 値 $r(t+\tau)$ 사이의 correlation function ( cross correlation function 이라 부름) $C_{E,R}(\tau)$는 다음式으로 주어진다.[17, 18]

$$C_{E,R}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e(t)\, r^{*}(t+\tau)\, dt \cdots\cdots\cdots (1-5)$$

두함수가 같을 때는 $R(\tau)$라고 表記하며 $R(-\tau)$와 같으며 Auto correlation function이라 부른다. correlation 의 크기는 當該 二函數를 各各(에너지 計算에 있어서의) force와 displacement로 생각해서 이들사이에 이루어지는 work done 으로서 計算해낼 수 있다. 이들 各各이 non zero이면서도 work done이 零이라면 이는 두函數間에 correlation이 없음을 나타낸다. 一般的으로 하나의 vector 또는 函數를 直交座標系 또는 直交函數系(函數空間)로 展開하였을 때 各各의 座標軸方向의 成分間에는 correlation이 없고 獨自的인 成分들로서 다른 軸方向의 成分들을 調整하여서 만들어질 수 없다.

이 correlation의 槪念은 決定論的量에 對해서도 使用될 수 있지만 random variable 사이에도 適用된다.[27, 28]

라. Random Process

Random process 는 항상 random하여 아무리 오래동안 trace 하여도 그 다음 瞬間의 値를 確定的으로 말할수가 없다. 그러나 그 random process 의 값의 確率的分布 $P(x)$를 알면

$$E\{x\} = \int_{-\infty}^{\infty} x\, p(x)\, dx \cdots\cdots\cdots (1-6)$$

$$E\{x^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, p(x)\, dx \cdots\cdots\cdots (1-7)$$

等 그 random process의 特徵을 把握할수가 있다. 이들을 1st moment, 2nd moment 等으로 부르며 電氣의 Analogy로서는 前者는 平均値(直流), 後時는 平均電力을 나타낸다. (6),(7)式에서 $E$는 Expectation value다시 말해서 期待値로서 平均値와 같다.

$E\{x^3\}$, $E\{x^4\}$…… 等도 類似한 式으로 計算되지만 한 random process 를 위해서는 다음(8)式으로 定義되는 varance $\sigma^2$도 重要하다.

$$\sigma^2 = E\{(x-\bar{x})^2\} \quad \cdots\cdots(1-8)$$

이는 平均値 $E\{x\}$를 中心으로하는 分布의 離脫의 自乘의 平均으로서 電氣 analogy 로서는( 平均直流 $E\{x\}$에 重疊된) 變動成分(交流成分)의 電力을 나타낸다. 全體電力은 直流電力과 交流電力의 合이니

$$E\{x^2\} = \left[E\{x\}\right]^2 + \sigma^2 \quad \cdots\cdots(1-9)$$

이다. $\sigma^2$의 平方根$\sigma$를 standard deviation 이라고 부른다.

이러한 統計的인 特徵에 依해서 random signal source를 서로 區分分類할 수 있어서 한瞬間의 값이 어떠한 決定論的 函數의 計算式에 依해서 確定되지 않는다고해서 全혀 把握이 不可能한것이 아니다. 相當한 時間을 두고도 이 統計的特徵이 變하지않으면 그 random process는 stationary 하다고 말하며 時間에 關한 平均( $\langle x \rangle$로 表記)과 $E\{x\}$이 같을 경우 이 process를 Ergodic process라고 부른다. non stationary中에도 analysis가 可能한 category가 있다.[21, 59]

마. P. d. f., central limit theorem 및 characteristic function

Randam process $x$와 $y$의 p. d. f.가 各各 $P_1(x)$ $P_2(y)$이라면 random variable ( $r.v.$라 略記) $x$ 와 $r.v.$ $y$의 合計 $x+y$ 의 $p.d.f.$는 $P_1(x)$와 $P_2(y)$의 convolution 으로 얻어지기 때문에 Fourier 變換을 使用하는것이 計算이 簡便하다. 이 分野에서는 한 $p.d.f.$ $P(x)$에 對해서

$$C(u) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} P(x)\, e^{jxv}\, dx \quad \cdots\cdots(1-10)$$

를 定義하여 $C(v)$를 $P(x)$의 characteristic function이라 하고 $r.v.$의 合計를 $r.v.$로 하는 分布의 $p.d.f.$는 各各의 characteristic function 의 相乘을 그의 characteristic function으로 하는 $p.d.f.$가 된다. characteristic function으로부터 $p.d.f.$를 求하는 것은 다음式으로 行하여진다.

$$P(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C(v)\, e^{-jvx}\, dv \quad \cdots\cdots(1-11)$$

Exponential의 argument $jvx$의 符號가 Fourier 變換 및 逆變換의 경우와 反對이다. characteristic function 은 $e^{jvx}$의 expectation value로 볼 수 있다.

$$C(v) = E\{e^{jvx}\} \quad \cdots\cdots(1-12)$$

各 moment 는 다음式에 依해서도 求할 수 있다.

$$m_1 \triangleq E\{x\} = \frac{1}{j} C'(v)\Big|_{v=0} = \frac{1}{j} C'(0)$$

$$m_2 \triangleq E\{x^2\} = \frac{1}{j^2} C''(v)\Big|_{v=0} = \frac{1}{j^2} C''(0) \quad (1-13)$$

$$m_r \triangleq E\{x^r\} = j^{-r} C^{(r)}(v)\Big|_{v=0} = \frac{1}{j^r} C^{(r)}(0)$$

여러 $r.v.$로 하는 process의 $p.d.f.$는 이들사이에 아무 constraint를 주지 않아도 gaussian에 限없이 가까히 간다. 이를 central limit theorem 라고 부르고 要因이 많아질수록 $r.v.$의 和의 process 는 gaussian이 된다. gaussiam 分布는 Normal 分布라고도 하며 $m_1$과 $\sigma^2$을 알면 나머지도 把握된 셈이어서 $N(m_1, \sigma^2)$와 같이 表記한다.[25, 27]

바. Bi-variate $r.v.$ process 의 moments 와 correlation coefficient

두개의 $r.v.$ $x$ 및 $y$에 依한 joint $p.d.f.$를 $P(x, y)$로 表記하면 各各의 moment는 다음式으로 나타낸다.[29, 31]

$$m_{10} = E\{x\} \iint_{-\infty}^{\infty} xP(x,y)\, dy\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} xP_x(x)\, dx \quad \cdots\cdots(1-14)$$

但 $P_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x,y)\, dy$

$$m_{01} = E\{y\} = \iint_{-\infty}^{\infty} yP(x,y)\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} yP_y(y)\, dy \quad \cdots\cdots(1-15)$$

但 $P_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x,y)\, dx$

$$m_{11} = E\{x,y\} = \iint_{-\infty}^{\infty} xy\, P(x,y)\, dx\, dy \quad \cdots\cdots(1-16)$$

$$\left.\begin{aligned} m_{20} &= E\{x^2\} = \iint_{-\infty}^{\infty} x^2 P_x(x)\, dx \\ m_{02} &= E\{y^2\} = \iint_{-\infty}^{\infty} y^2 P_y(y)\, dy \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(1-17)$$

$$\mu_{20} = E\{(x-\bar{x})^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\bar{x})^2\, p_x(x)\, dx = \sigma_x^2$$

$$\mu_{02} = E\{(y-\bar{y})^2\} = \int_{-\infty}^{\infty}(y-\bar{y})^2 P_y(y)\,dy = \sigma_y^2$$

$$\mu_{11} = E\{(x-\bar{x})(y-\bar{y})\} = E\{xy\} - E\{x\}\cdot E\{y\} = m_{11} - m_{01}m_{10} \quad \cdots\cdots (1-18)$$

두 $r.v.$ 間의 correlation은 correlation function 만으로는 알기가 힘들다. (5) 式으로서는 $e(t)$와 $r(t)$가 서로 比例하면서 增加하면 correlation function의 値는 自乘으로 增加하나 이 增加는 서로의 相關關係가 더 密接하게 되는 것은 아니기 때문에 correlation function 値는 相關의 尺度가 되지 못한다. 따라서, correlation 의 眞正한 指數는 다음(19)式으로서 定義되는 correlation coefficient $\rho$밖에 없다.[21][25]

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \frac{E\{(x-\bar{x})(y-\bar{y})\}}{\sqrt{\rho_x^2\ \rho_y^2}} = \frac{\mu_{11}}{\rho_1\,\rho_2} \\ -1 &\le \rho \le 1 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (1-19)$$

가 成立하며 相關關係가 一目瞭然하게 되고 이는 時間의 函數가 아니다.

**사.** Power spectral density 와 autocorrelation function ; Wiener – Khintchine Theorem

한 實函數의 Fourier 變換은 一般的으로 複素函數로서 絶對値와 角度를 갖고 있지만 이와 이의 共軛數를 곱하면 絶對値의 自乘으로서 周波數에 따른 電力(또는 Energy)의 分布를 보여 주며 이는 $w$의 實函數이다. 周波數에 따른 電力分布를 주는 函數를 power spectral density라고 부른다. 이를 $G(jw)$ 로 表示하면

$$G(jw) = |F(jw)|^2 \quad \cdots\cdots (1-20)$$

$G(jw)$는 autocorrelation function $R(\tau)$ 와 Fourier transform pair 를 이룬다.

$$\left.\begin{aligned} G(jw) &= \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\, e^{-jw\tau}\, d\tau \\ R(\tau) &= \frac{1}{2\tau}\int_{-\infty}^{\infty} G(jw)\, e^{jw\tau}\, dw \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (1-21)$$

이것을 Wiener-Khintchine theorem이라 한다. [21, 22, 23]

Power spectral density $G(jw)$를 求하는 經路는 原 time function의 Fourier變換의 絶對値의 自乘으로 求하는 길과 原 time function의 autocorrelation function의 Fourier 變換을 求함으로 얻는 두가지 方法이 있지만 이는 deterministic function에 對해서만 成立하는 것이고 random process 에 對해서는 後者의 길밖에 없다. random process 의 spectrum 즉 random process 의 fourier 變換을 定義하는 方法이 없기 때문이다.

**아.** Time delay가 spectrum에 주는 影響

理想的인 傳達 medium 에서는 freq. transfer function $H(jw)$ 의 絶對値가 $w$에 無關係한 常數임이 必要하지만 同時에 어떠한 周波數成分에 對해서도 같은 time delay를 導入하여야 distortion이 없을것이기 때문에 $\angle H(jw)$는 經過時間 및 角周波數에 比例하여야 한다.[17]

$$\angle H(jw) = w\tau \quad \cdots\cdots (1-22)$$

한편 $\theta = wt$ 의 關係에 依하여 $\frac{d\theta}{dw}$는 時間의 dimension을 갖게 되고 (22)式의 $\tau$는 그 medium 에서의 모든 周波數成分의 經過時間으로서 이것이 $w$에 無關하게 一定하여야 한다는 뜻이다. 따라서 모든 time delay $\tau$는 spectrum 의 絶對値에는 影響을 안주고 角度에 對해서만 $e^{-jw\tau}$라는 追加된 角度回轉을 준다.

즉 (1)式에서 出發해서 다음과 같은 結果가 된다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e(t-\tau)\, e^{-jwt}\, dt = E(jw)\, e^{-jw\tau} \quad \cdots\cdots (1-23)$$

**자.** Z – transform

Time series $e(n)$에 對해서 다음과 같은量 $E(z)$를 計算한다.

$$E(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e(n) z^{-n} \quad \cdots\cdots (1-24)$$

$E(z)$는 이미 $n$의 函數가 아니고 $z$만의 函數로서 Series $e(n)$의 Z-transform이라 부른다. 이는 (1)式으로 定義되는 fourier 變換이 continuous signal 에 關한것임에 對應하여 discrete 한 信號 即, time series 에 關聯하여 便利하게 使用되는 것으로 discrete system 의 unit – sample response (continuous system 에서 impulse response에 該當) 의 Z – transform을 $H(z)$ 라하면 入力의 Z 變換이 $E(z)$일경우 出力의 Z 變換 $R(z)$는 다음式으로 주어진다.

$$R(z) = H(z)\ E(z) \quad \cdots\cdots (1-25a)$$

$$r(n) = h(n) * e(n) \quad \cdots\cdots (1-25b)$$

但 $r(n)$, $e(n)$는 各各 出力과 入力 series 이고 $h$

$(n)$는 unit - sample response 그리고 *記號는 convolution sum을 나타내고 convolution sum 은 다음式으로 計算된다. [20, 39, 40]

$$r(n) = h(n) * e(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n-m)\, e(m) \quad \cdots\cdots (1-26)$$

그러나 discrete의 경우에 있어서 freq. domain convolution을 time domain의 곱셈과 연관시키는 것에는 좀더 복잡한 과정이 필요하게 된다.

**차.** Covariance function, covariance matrix

한 $r.v.\ x$가 時間의 函數일때 $t$ 및 $u$에 있어서의 값을 $x_t$ 및 $x_u$로 나타내고 이들의 ensemble average (時間의 函數임)를 各各 $m_x(t)$ 및 $m_x(u)$ 라하면 covariance function $K_x(t, u)$은 다음式으로 定義된다. [37, 38, 46]

$$\begin{aligned} K_x(t, u) &\triangleq E\{[x_t - m_x(t)][x_u - m_x(u)]\} \\ &= E\{x_t \cdot x_u\} - m_x(t)E\{x_u\} \\ &\qquad - m_x(u)E\{x_t\} + m_x(t)m_x(u) \\ &= R_x(t, u) - m_x(t)m_x(u) \end{aligned} \quad (1-27a)$$

이는 $E\{x_u\} = m_x(u)$. $E\{x_t\} = m_x(t)$이기 때문이다. 많은 $r.v.$의 경우에는 $r.v.$ 個數dimension의 matrix를 形成하게 되며 다음式과 같이된다.

$$\begin{aligned} K_x(t, u) &\triangleq E\{[X_t - M_x(t)][X_u - M_x(u)]^T\} \\ &= E\{X(t)X(u)^T\} - M_x(t)M_x^T(u) \end{aligned} \quad (1-27b)$$

$X(t)\ X(u)^T$ 等은 inner product가 아니고 matrix를 形成한다.(outer product 라고 함)

그리고 $E\{X(t)\ X(u)^T\}$의 diagonal element 들은 autocorrelation function ($t$ 및 $u$時사이의)이며 off - diagonal element들은 cross correlation function이다. 같은 모양으로 cross covariance function matrix는 다음式으로 주어진다.

$$K_{xy}(t, u) \triangleq E\{[X_t - M_x(t)][Y_u - M_y(u)]^T\} \quad \cdots\cdots (1-27c)$$

한 信號(時間函數)의 特質은 그 信號의 covariance function으로서 完全히 나타나고 covariance function의 Fourier變換은 그 信號의 power spectral density이다. [44] cross covariance function의 Fourier 變換도 이에 準한다.(電壓 spectrun과 電流 spectrum 사이에 形成될 수 있는 電力 spectrum)

**카.** Matrix 와 matrix의 固有軸, 및 固有値

한 vector $x$를 또하나의 vector $y$로 變換하는 線型變換에 使用되는 operator를 matrix $A$로 나타내면

$$Y = A\ X \quad \cdots\cdots (1-28)$$

$X$와 $Y$가 各各 原因과 結果로서 이들의 內積이 Energy 또는 power를 形成한다면 이들을 서로 conjugate variable이라 부르는데 그때에는 다음式이 成立한다.

$$P \text{ 또는 } W = X^T \cdot Y = X^T A\ X \quad \cdots\cdots (1-29a)$$

$$= (x_1, x_2, \cdots\cdots x_n) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots\cdots & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (1-29b)$$

一例를 들어 $X^T = (x_1, x_2)$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$이면

$$P \text{ 또는 } W = a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \quad \cdots\cdots (1-30)$$

이와 같은 $X^T A\ X$ 을 Hermite(에르미 - 뜨)形式이라 부르는데 座標軸을 回轉시키면 係數만 달라지지 $x$에 關한 二次式이라는 事實로 부터 離脫하지 않는다. 但 座標軸을 알맞게 擇하면 $x_1 x_2$ 項 (cross term)의 係數만을 零이될 수 있다. 이것은 楕円의 數式表現등에서 잘 觀察되는 現象인데 楕円의 式을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 으로 나타낼 수 있는것은 座標軸이 그 楕円의 固有의 長軸 및 短軸과 一致할때만이고 그렇지 않으면 항상 cross term의 係數가 non zero이다. 卽 座標軸에 따라 matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 의 各各의 Element의 値는 變하는데 때마침 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$와 같이 off - diagonal element가 zero가 될때가 있고 이때 座標軸은 그 matrix $A$의 固有의 軸과 一致하고 있다는 말이다.

이와같이 座標軸을 그 matrix의 固有軸(eigen vector)과 一致시켜 off - diagonal element가 零으로 나타나게 했을때 이 matrix를 Jordan의 正準形으로 表現되었다고 말한다(後述 eigen value가 모두 서로 相異하지 않고 같은것이 생길때에는 縮退(degenerate)되었다고 하고 이러한 경우에는 Jordan의 形式으로 하여도 off - diagonal element의 全部가 零이 되지는 않을 경우도 있다.

이때 eigen vecter는 方程式

$$A\ X = \lambda\ X \quad \cdots\cdots (1-31)$$

을 成立시키는 solution vector ( $\boldsymbol{A}$가 nxn matrix이면 無縮退의 경우는 eigen value도 $n$個)이고 이들이 non zero 인데도 ( 31 ) 式이 成立하는 것이니까.

$$\boldsymbol{A} - \lambda \mathbf{I} = 0 \cdots\cdots (1-32)$$

가 成立한다. 이것은 determinant이니까 이것은 scalar 方程式이고 이解인 $\lambda$ 의 値들이 固有値( eigen value )이다. 楕円을 나타내는 Hermite 型式(實數만의 경우는 二次型式이라고 부름)의 matrix의 固有軸은 그 楕円의 長軸(方向 vector) 및 短軸(方向 vector)이고 固有値는 長軸과 短軸의 길이이다. 이들은 座標系回轉( Rotation )에 對해서 invariant 이다.[47][51]

모든 non singular matix는 自己固有의 軸이 있고 이들을 座標軸으로 삼을때 그 matrix는 Jordan 의 形式이 되며 모든 取扱이 簡便하여진다. 한 Jordan 의 正準型 matrix로부터 unitary 變換을 통하여 얻어지는 모든 matrix를 similar matrix 라 하고 같은 eigen value들을 갖는다. 이들은 같은 matrix의 다른 표현들이다.

Unitary 變換이란 座標軸의 回轉等에서 使用되는 變換으로 한 座標系에서 $\boldsymbol{A}$로 表示된 matrix 가 新座標에서 $\boldsymbol{A}'$ 로 表示되면서 $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{V}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{V}$이고 한편 $\boldsymbol{V}^T \boldsymbol{V} = \mathbf{I}$ (但 $\mathbf{I}$는 identity matrix ) 이라면 $\boldsymbol{A}$와 $\boldsymbol{A}'$는 similar 하고 $V$는 unitary transform matrix 이다. 한편 $\boldsymbol{X}$를 $\boldsymbol{A}'$와 conformal 한(한편의 行과 또 한편의 列의 個數가 같아서 相乘積이 可能한) vector라하고 二次型式 $\boldsymbol{X}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{X}$이 항상 正이면 $\boldsymbol{A}'$를 positive definite, non negative 하면 $\boldsymbol{A}'$를 positive semidefinite matrix 라 한다. 한 system의 入力에 作用하여 그의 出力을 주는 matrix 가 positive definite 하면 그 system은 passive 하고, positive semi-definite 하면 그 system은 non energic 또는 passive 하다. 이는 어떠한 入力信號에 對해서도 그 systen은 energy를 創造하는 일이없는 完全한 passive (消耗만 한 경우와 lossless 까지도 포함한 경우) 임을 나타낸다.[53]

**타. State equation 과 state transifion matrix**

一般的으로 energy storing element (L, C等 ) 가 많을 수록 한 system의 homogeneous 解(自由振動)의 mode도 많아져가는데 한 system의 狀態를 把握하기 爲해서는 그 system 의 一次獨立일 수 있는 energy storing element 의 數( energy storing element 의數 — 이들사이 connection 에서 오는 constraint 數) 만큼의 變數를 擇할 수 있고, 또 擇하여야 한다. 한 system에 있어서 一次獨立인 變數( 個數가 $n$)를 모아서 vector $\boldsymbol{X}$ 로 表示하고 다음式이 成立하면 이들을 state variable, 그리고 그 vector를 state vector라 한다.

$$\frac{d\ \boldsymbol{X}(t)}{dt} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{G}\boldsymbol{U}(t) \cdots\cdots (1-33)$$

$\boldsymbol{F}$는 nxn matrix, $\boldsymbol{U}(t)$ 는 그 system 에 對한 入力으로서 p 個의 一次獨立인 變數라고 한다. 따라서( conformal 하기 위해서) $\boldsymbol{G}$는 nxp matrix 로서 入力 $U(t)$ 가 各各의 state 를 支配하는 係數의 모임이 되고 또한 入力을 state 變換( $\boldsymbol{X}(t)$ )의 空間次元數에 맞추어주는 機能이기도 하다. 한편 이 system 의 觀察點을(例를 들어 nodes 의 電位等, branch 이 電流等) q 個라하고 觀察量을 $\boldsymbol{Y}(t)$ (q 次元 vector ) 라하면 다음式이 成立한다. [48, 55]

$$\boldsymbol{Y}(t) = \boldsymbol{G}\ \boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(t) \cdots\cdots (1-34\text{a})$$

input to output direct coupling 成分을 주는 $B$ matrix ( q × p ) 를 零으로 두고 觀察量을 q 個로 限定하면

$$\boldsymbol{Y}(t) = \boldsymbol{G}\ \boldsymbol{X}(t) \cdots\cdots (1-34\text{b})$$

가 된다.

( 33 ) 式에서 $\boldsymbol{U}(t)$ 即 入力이 없다면 남은 式은 homogeneous 하고 system 은 그때까지 갖고있던 Energy 로서 홀로( automonous ) decay 한다 ( passive system 이면).

Hamogeneons solution은 다음式을 滿足시키고

$$\frac{d\ \boldsymbol{X}(t)}{dt} = \boldsymbol{F}\ \boldsymbol{X}(t) \cdots\cdots (1-35)$$

$\boldsymbol{F}$의 rank만큼의 解를 갖는데 이를 各各 $\boldsymbol{X}_1(t)$ $\boldsymbol{X}_2(t)$, $\boldsymbol{X}_3(t) \cdots\cdots \boldsymbol{X}_n(t)$ ( state vectors ) 라하면 이들을 column 들로 하는 matrix는 nxn matrix이며 이를 fundamental matrix ( $\psi$ ) 라한다.

$$\Psi(t) = ( \boldsymbol{X}_1(t) \vdots \boldsymbol{X}_2(t) \vdots \boldsymbol{X}_3(t) \vdots \cdots\cdots \boldsymbol{X}_n(t) ) \cdots\cdots (1-36)$$

各各의 column ( =vector ) 이 ( 35 ) 式의 解이기때문에 fundamental matrix 自體도 解이다. 即

$$\frac{d}{dt}\Psi(t) = \boldsymbol{F}\Psi(t) \cdots\cdots (1-37)$$

但 右邊은 matrix 끼리의 곱셈이다. 이 fundamental matrix 에 어떠한 實數를 곱해도 그대로 ( 37 ) 式을 滿足시키기 때문에 unique 하지 않으나 다음

과 같이 normalize한 matrix $\Phi$는 unique하며 state transition matrix라 부른다.

$$\Phi(t,t_0) = \Psi(t)\,\Psi^{-1}(t_0) \quad \cdots\cdots (1-38)$$

이는 $t_0$時의 state vector에 作用하여 $t$時에 있어서의 state를 줄 수 있다. 卽 $t_0$에서 $X = X_i^0$ 이라면

$$X(t) \triangleq \phi(t;t_0, X_i^0 U) = \Phi(t,t_0)\,X^0 + \int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)\,G(\tau)\,U(\tau)\,d\tau \quad \cdots\cdots (1-39)$$

이다. 前項은 初期 state $X^0$로부터의 transition 成分, 後項은 入力 $U(\tau)$로부터 $B(\tau)$에 依해 支配된 state 成分의 $\tau$時값이 $t$時로 transition된 成分이다.

한편 指數函數 $e^{Ft}$가 (35)式을 滿足시킴을 容易하게 確認할 수 있다. 즉

$$\Psi(t) = Ke^{Ft} = K\left(I + Ft + \frac{F^2}{2!}t^2 + \frac{F^3}{3!}t^3 + \cdots\right) \quad \cdots\cdots (1-40)$$

마지막式은 指數函數의 數列展開이며 이各項은 nxn matrix 또는 이들 相乘積이며 항상 nxn matrix, 따라서 全體의 合計도 nxn matrix이다. state transition matrix도 다음式으로 나타낸다.

$$\Phi(t,t_0) = exp\left[\int_{t_0}^{t}F(\tau)\,d\tau\right] \quad \cdots\cdots (1-41)$$

Time invariant system에 있어서는 $\phi(t,\tau)$ 라는 二變數函數代身 $\phi(t-\tau)$를 使用한다. 卽 時間間隔만이 支配力을 갖는다. 그 경우에는 다음式이 成立한다.

$$\phi(t-t_0)_{time\ inv.} = \phi(t-t_0) = e^{F(t-t_0)} \quad \cdots\cdots (1-42)$$

(39)式을 (34a)에 代入함으로서 入力$U(t)$ 對 出力(또는 觀察量) $Y(t)$과의 關係를 初期條件 $X^0$을 parameter로서 얻어낼 수 있다. 또한 $X^0 = 0$ 일때 이式은 $U(t)$와 $Y(t)$만을 포함한 homogeneous 式이 되고 이들의 transform $U(s)$와 $Y(s)$의 比는 transfer function을 나타낸다.[52, 57, 58]

## References


1. Wiener, Extrapolation, Interpolation and Smoothing of stationary Time series, with Engineering Applications, New York, Technology Press, 1949.
2. L.A.Zadeh and J.R.Ragazzini, "An extention of Wiener's theory of prediction," J.Appl.Vol.21, pp.645-655.Jul.1950.
3. H.L.Van Trees, Detection, Estimation, and modulation Theory, Part I II III, New York, wiley. 1971.
4. R.E.Kalman, "On the general theory of control," Proc. 1st IFAC long.London, Butterworth, 1960.
5. R.S.BUCY, "Nonlinear filtering theory", IEEE Trans.Automat.Contr.Vol AC-10 p.198. Apr. 1965.
6. K.Yao, "An alternative approach to the linear causal least filtering theory", IEEE Trans. Inform.Theory.Vol.IT-17, pp.232-240, May 1971.
7. A.Papoulis, The Fourier Integral and its applications, New York, McGrawhill, 1962.
8. G.Bergland, "A Guided Tour of the Fast Fourier Transform", IEEE spectrum, July 1969, pp. 41-52.
9. J.B.Allen, "Estimation of transfer functions using the Fourier transform ratio method", AIAAJ. Vol.8, pp.414-423, March 1970
10. H.C.Andrews, "A generalized technique for spectral analysis", IEEE Trans.on Computers, Vol. C-19, pp.16-25, Jan.1970.
11. J.W.Cooley, "The finite Fourier transform," IEEE Trans.Audio and Electroacoustics.Vol.17, pp.77-85, June 1969.
12. G.Gambardella, "Time scaling and short-time spectral analysis", ASAJ.Vol.44, pp.1745-1747, Dec.1968.
13. H.L.Groginsky, "A popeline fast Fourier transform," IEEE Trans.on Computers.Vol.c-19, pp.1015-1019, Nov.1970.
14. J.Saltz and S.B.Weinstein, "Fourier transform communication system", Proc.ACM symp.Note pp.99-128, 1969.
15. L.A.Zadeh, "The determination of the Impulsive Respone of Variable Networks", J.Appl.Phys., Vol.21, pp.642-645, July 1950.
16. L.Weiss, "Dual Dynamical systems and Their Representation by system functions", Int.J.control, Vol.1, No.5, pp.475-485, May 1965.
17. W.Kaplan, Operational Methods for Linear systems, Addison-Wesley, Mass.1962.
18. T.J.Stockham, "High speed convolution and correlation", AFIPS Proc.Vol.28, pp.229-233, 1966.

19. B. Harris, spectral Analysis of Time series, New York, Wiley, 1967.

20. T.J.Healy, "Convolution Revisited", IEEE spectrum, Apr. 1969, Vol. 6, No. 4, pp. 87−93.

21. T.C.Koopmans, "Serial correlation and quadratic forms in normal variables", Ann.Math, Stat., 13, 14, 1942.

22. C.Bingham, M.Godfrey and J.Tudey, "Modern techniques of power spectral estimation", IEEE Trans.Audio and Electroacoustics. Vol.Au−15, pp. 56−66, Jun. 1967.

23. B.P.Bogart and E.Parzen, "Informal comments on the uses of power spectral estimation", IEEE Trans.Audio and Electroacoustics, Vol.Au−15, pp. 74−76, Jun. 1967.

24. A,M.Yaglom, "The correlation theory of processis whose 7th difference constitute a stationary process", Matem.Sb. 37, 141. 1955.

25. R.Brown, Smoothing, Forcasting and Prediction of discrete Time series, Prentice-Hall, New Jersey, 1962.

26. J.L.Doob, Stochastic Processes ; John wiley, New York 1953.

27. M.S.BARTLETT, Stochastic Processes, Cambridge University Press, Cambridge, 1955.

28. I.M.Gelfand, Generalized random processes, Dokl Akad, Nauk SSSR, 1955.

29. K. Ito, Stationary random distributions, Mem. Coll.Sci.Univ.Kyoto, 28 1953.

30. N.Wiener, "Differential spaces", J. Math.and Phys. 2, 1923, pp. 131−194.

31. A.N.Kolmogorov, Limit distributions for sums of independent random variables, Addison Wesley, 1954.

32. Ju.V.Prohorov, "The method of characteristic functionals", Proc.of 4th Berkeley symp.on math.stat.m 1961, pp. 403−419.

33. C.W.Dunnett and M.Sobel, "A bivariate generation of student's t-distribution, with tables for special cases", Biometrika, 31, 153, 1954.

34. T.C.Koopmans, "Serial correlation and quadratic forms in normal variables", Ann.Math.stat., 13, 14. 1942.

35. N.Wiener and P.Masani, "The prediction theory of multivariate stochastic processes" pt. 1 and pt. 2, Acta Math. Vol. 98 and 99.

36. P.Masani, Recent Trends in Multivariate prediction theory, Multivariate Analysis, edited. New York Academic Press, 1966.

37. IF.Blake, "Linear filtering and piece-wise linear correlation functions", IEEE Trans.Infor.Theory, Vol.IT- 15, pp. 345−349, May 1969.

38. M.Blum, "A stage-wise parameter estimation procedure for correlated data, "Numer.Math., Vol. 3, pp. 202−208, 1961.

39. E.Weber, Linear transient Analysis, Vol. 2, wiley, New York, 1956.

40. D.S. Humpherys, The analysis, Design, and synthesis of Electrical Filters, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1970.

41. B.Friedman, Principles and Techniques of Applied Math., wiley, New York, 1961.

42. E.I.Jury, Theory and Application of the Z-transform Method, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1964.

43. J.A.Aseltine, Transform method in Linear system Analysis, McGraw-Hill, New York, 1958.

44. R.A.Nash, Jr.and F.B.Tuteur, "The Effect of Uncertainties in the Noise Covariance Matrices on the Maximum Likelihood Estimate of a vector", IEEE Trans.Autom.Control, Vol. 13, no. 1, pp. 86−88, Feb, 1968.

45. T.T.Soong, "On a-priori Statistics in Minimum-Variance Estimation Problems", J.Basic Eng., March, 1965, pp. 109−112.

46. H.W.Sorenson, "On the error Behavior in Linear Minimum Variance Estimation Problems", IEEE Trans.Autom.Control, Vol.AC- 12, No. 5, pp. 557−562, Oct., 1967.

47. R.Bellman, Introduction to Matrix Analysis, New York, McGraw-Hill, 1960.

48. P.M.DeRusso, R.J.Roy and C.M.Close, State Variables for Engineers, New York, Wiley, 1965.

49. F.R.Gantmacher, The theory of Matrices, Vols. 1 and 2. New York, chelsea, 1959.

50. E.S.Kuh and R.A, Rohrer, Theory of Linear Active Networks, San Francisco, Holden-Day, 1967.

51. P.E.Mantey, "Eigen-value sensitivity and state−variable selection, "IEEE Trans. Automatic Control, Vol.AC−13, pp. 263−269. 1968.

52. D.L.Snyder, The State Variable Approach to continuos Estimation, with Applications to Analog Communication Theory. Cambridge. MIT press 1969.
53. A.G.J.Macfarlane, "An eigenvector solution of the optimal linear regulator", J.Electron.contr. Vol. 14. pp. 643−654, Jun. 1963.
54. B.L.HO, and R.E.Kalman, "Effective construction of linear state variable models from input output data," Proc. Third Allerton Conf., pp. 449−459, 1965.
55. E.S.Kuh and R.A.Rohrer, "The state-variable approach to network analysis", Proc.IEEE, Vol. 53, pp. 672−686, 1965.
56. D.G.Leunberger, "Observing the state of a linear system", IEEE Trans.Military Electronics, Vol MIL−8, pp. 74−80, 1964.
57. L.M.Silverman, "State realization of impulse response matrices", 1967, IEEE intern.Conv.Record. Vol. 15, Pt. 5, pp. 32−36.
58. S.F.Schmidt, "State-space techniques applied to the design of a space navigation system", Proc. 1962, Joint Automatic Control conf. Paper 11−3.
59. Box 4 Jenkins, Time series−forecasting and control, SanFrancisco, Holden-Day, 1967.