韓國 OR學會誌
第4卷 第2號
1979年 11月

輸送問題 初期解 解法의 計算時間 비교연구
(A Comparison of Computing Times of Initial Solution Methods in the Transportation Problems)

朴 淳 達*
朴 河 英*

Abstract

In transportation problems, various initial solution methods are known and being used. The purpose of this paper is to compare effectiveness of those methods in terms of time required in computing an initial solution.

In this paper, Northwest Corner rule, Least Cost rule, Vogel's Approximation rule, Russel's Approximation rule, are compared, These rules are similar in loxio sized problems. But as the size of the problem become bigger, Russel's and Vogel's methods are found much more effective than others.

1. 序 論

輸送問題에 있어서 初期解를 구하는데 있어서는 여러가지 方法이 사용되고 있다. 초기해를 구하는데 있어서 가장 편리한 北西모서리 方法을 위시하여 最小費用 方法, 보겔 근사법 및 러셀 근사법 등이 많이 사용된다.

그러나 輸送問題에 있어서는 다른 線型계획문제의 경우와 달리 이 초기해를 구하는 方法에 따라 최종 最適解 구하는 時間이 많은 차이를 나타내게 된다. 따라서 輸送問題에 적용될 컴퓨터 프로그램 開發을 위해서 어떠한 初期解 方法을 사용할 것인가가 중요하다. 이 論文은 이들 각 初期解 方法을 사용함에 따라 최종 해를 얻는데까지의 시간이 어떻게 변하는지 비교검토하는데 그 目的을 두고 있다.

이 初期解 方法의 소요시간 비교검토에서는 단순히 初期解를 구하는데 소요되는 시간만을 비교검토한다는 것은 뜻이 없다. 비록 초기해는 빠른 시간에 구해졌을지라도 최종해를 구하는데 까지 많은 시간이 소요될 수 있기 때문이다. 그래서 이 論文에서는 初期解 구하는 方法의 비교검토 方法으로써 각 初期解 方法을 적용했을때 최종 最適解를 구하는데 소요되는 총시간으로써 비교검토하였다.

제 2 절은 각 初期解 구하는 方法을 약술하였으며 제 3 절에서는 輸送問題의 任意發生方法을 기술하였고 제 4 절에서는 소요시간을 기술하고 있다.

* 서울大 產業工學科

2. 輸送問題의 初期解구하는 方法

輸送問題는 보통 $m\times n$ 行列로 表示한다. 즉 m개의 공급처와 n개의 소요처가 있고 m개의 공급처는 각각 $S_i(i=1,2,\cdots,m)$ 개를 공급할 수 있으며 n개의 수요처는 각각 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$개를 필요로 한다고 하며

$$\sum_{i=1}^{m} S_i=\sum_{j=1}^{n} D_j$$

라고 가정한다. 그리고 공급처 i에서 수요처 j로의 단위당 輸送費를 C_{ij}, 輸送量을 x_{ij}라고 하면 輸送問題는 아래와 같이 표현된다.

공급처 \ 수요처	1	2	…	n	공 급 량
1	C_{11} x_{11}	C_{12} x_{12}	…	C_{1n} x_{1n}	S_1
⋮					⋮
m	C_m x_{m1}	C_{m2} x_{m2}	…	C_{mn} x_{mn}	S_m
수 요 량	D_1	D_2	…	D_n	

여기서 총輸送費를 공급, 수요조건을 만족시키면서 最小로 하는 x_{ij}를 결정하는 것이 輸送問題에 있어서의 問題이다.

이 輸送問題에 있어서 初期解를 구하는 方法으로 특히 北西모서리 方法, 最小費用 方法, 보겔 근사법, 러셀근사법이 많이 사용된다.

(1) 北西모서리 方法(Northwest Corner rule)

공급량 S_i를 좌측상단, 즉 $i=1$, $j=1$에서 부터 배치하기 시작하여 공급량이 남았으면 $j=j+1$에, 수요량이 남았으면 $i=i+1$에 배치해나가 다음 S_2, S_3 …로 건너가 S_m에 대해서도 배치가 끝나 우측 하단에 닿으면 끝낸다.

(2) 最小費用 方法(Least Cost rule)

첫 行, $i=1$에서 부터 시작하여 2行에서 가장 적은 단위당 輸送費를 갖는 곳에 배치하고 공급량이 남았으면 그 다음번으로 작은 단위당 輸送費를 갖는 곳에 배치하고 하여 공급량을 다 채운후 그 다음 行으로 넘어가 같은 方法으로 마지막 行까지 해나간다.

(3) 보겔 근사법(Vogel's Approximation rule)

배치 안되고 남아있는 각각의 行i와 列j에 대해 가장작은 단위당 輸送費와 그 다음으로 작은 단위당 輸送費를 찾아 그들의 차이를 계산하여 그 차이들 중에서 가장 큰 값을 갖는 行 또는 列에서 가장 작은 단위당 輸送費를 갖는 곳에 배치하고 공급량이 채워졌다면 그 行을 지우고, 수요량이 채워졌다면 그 列을 지운후 남은 行과 列에 대해 같은 과정을 모든 수요량과 공급량이 찰때까지 계속한다.

(4) 러셀 근사법(Russel's Approximation rule)

배치되지 않고 남아있는 각각의 行i에서 가장 큰 단위당 輸送費를 $\bar{u}_i$, 배치되지 않고 남아 있는, 각각의 列j에서 가장 큰 단위당 輸送費를 v_i라 한후 각각의 cell (i, j)에 대해 $C_{ij}-\bar{u}_i-\bar{v}_j$를 계산하여, 이 계산된 값들 중 가장 절대값이 큰 음수에 배치한 후 공급량이 채워졌다면 그 行을 지우고 수요량이 채워졌다면 그 列을 지운후 다시 남은 行과 列에 대해 같은 과정을 모든 수요량과 공급량이 찰때까지 계속한다.

3. 問題의 發生과 解法

4개의 方法의 소요시간을 비교하기 위하여 이 4개의 方法이 적용될 문제가 있어야 한다. 문제에 따라 이 4개의 方法에 소요되는 시간이 다를 수 있으므로 문제를 任意의 方法으로 만들어 한가지 문제에 대해 4개의 方法을 각각 적용한다.

問題에 필요한 자료는 단위당 輸送費 C_{ij}와 각 공급처에서 공급할 수 있는 능력 S_i, 그리고 각 수요처의 수요량 D_j이다. 따라서 공급처가 m개이고 수요처가 n개인 문제에 있어서는 $m \times n$개의 단위당 수송비와 개 m의 공급량, n개의 수요량이 필요하게 된다. 이에 필요한 자료는 亂數表로 부터 단위당 輸送費의 경우 2자리씩 얻어내어 두자리 整數를 만들어 사용했고 공급량이나 수요량은 3자리씩 잘라내어 3자리의 整數로 만들었다.

각 問題의 크기마다 자료는 한가지로 고정한 후 컴퓨터 프로그램도 初期解 구하는 부분만 서브루틴을 사용하여 달리해서 각 初期解 구하는 방법에 따른 소요시간을 구했다. 最適解 구하는 方法은 일반적으로 輸送問題에 적용되는 심플렉스法을 이용하였다.

이러한 方法으로 (10×10), (20×20), (30×30), (40×40), (50×50)의 5가지 크기의 문제에 北西모서리 方法, 最小費用 方法, 보겔 근사법, 러셀 근사법의 4가지 初期解 구하는 방법을 각각 달리하여 모두 5×4=20개의 결과를 얻었다.

入力 카드의 장수는 初期解 구하는 서브루틴을 제외하면 모두 같으므로 初期解 구하는 서브루틴의 장수만 비교해 보면 다음과 같다.

北西모서리 方法 : 30장
最小費用 方法 : 35장
보겔 근사법 : 75장
러셀 근사법 : 65장

4. 所要時間

無作爲方法으로 (10×10), (20×20), (30×30), (40×40), (50×50) 4가지 初期解 구하는 방법을 적용하여 最適解 구하는 데 드는 所要時間을 구했다.

컴퓨터는 IBM/360 Model 40을 사용하였다. 여기서 사용하는 所要時間이란 Input, Compilation, CPU 시간 Out Put 時間을 모두 합한것이다. 이 所要時間을 구

해보면 表1과 같이 된다. 그리고 그림으로 그려보면 그림1과 같이 된다.

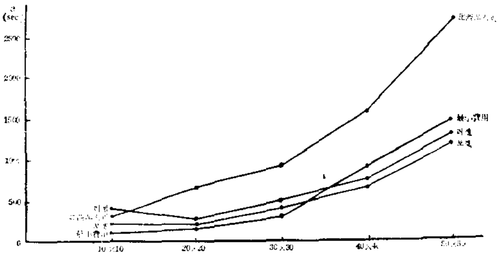
表1. 所要時間

방법 / 문제의크기	北西모서리	最小費用	보 겔	러 셀
10×10	319.0 (17)	211.2 (6)	260.4 (2)	336.0 (5)
20×20	693.0 (33)	268.3 (29)	274.2 (22)	296.4 (24)
30×30	912.5 (102)	387.0 (37)	454.8 (31)	461.9 (33)
40×40	1579.7 (162)	863.3 (52)	743.8 (43)	784.7 (45)
50×50	2882.1 (249)	1473.6 (68)	1277.4 (59)	1315.1 (61)

* 단위는 초이며 ( )안은 最適解게 도달하기 까지 반복한 횟수

이것을 보기 쉽게 그림으로 그려보면 그림과 같다.

그림 1. 所要時間



北西모서리 方法은 문제가 커짐에 따라 반복횟수가 급격히 증가돼 所要時間도 급격히 증가되므로 문제가 커짐에 따라 더욱 非效果的인 方法으로 나타난다.

最小費用 方法은 문제의 크기가 30×30까지는 비교적 效率的인 方法으로 나타나지만 그 이상이면 보겔, 러셀 근사법보다 그 效率性이 떨어진다.

그리고 보겔, 러셀 근사법은 問題의 크기가 적을 경우에는 Card Reading, Compilation등 때문에 北西모서리 方法이나 最小費用 方法에 비하여 소요시간이 길지만 問題의 크기가 커질수록 반복횟수가 적어져 所要時間이 다른 두 方法에 비하여 월등하게 적어진다.

보겔, 러셀 근사법은 5가지 問題에 대하여 보겔 근사법이 모두 좋은 것으로 나타나 있으나 이 몇가지 경우로써 보겔 근사법이 러셀 근사법보다 더욱 效率的이라고 결론내리기에는 부족하다.

現代의 問題가 어느것이나 그 규모가 큰 것에 비추어 輸送問題 해결을 위한 초기해 구하는 해법으로 보겔, 러셀 근사법이 더욱 효과적인 것으로 권장할 수 있다.