

極小 Energy 定理의 그 應用 (II)

梁 源 鎬

〈成均館大 工大 · 教授〉

7. 보 (beam)의 變形問題에의 應用

보 (beam)의 길이 方向 主軸을 X 軸, 橫斷面의 中立軸을 Z 軸, 이에 垂直한 方向에 Y 軸을 잡으면 굽힘모멘트가 M 인 任意點에서의 應力은 橫斷面の 中立軸에 대한 斷面二次모멘트를 I 라 할 때

$$\sigma_x := \frac{My}{I} \quad (24)$$

로 表示된다는 것은 이미 잘 알고 있는 사실이다.

보속에 發生하는 剪斷應力 τ_{xy} 의 영향을 무시한다면 보는 σ_x 만 받는 一軸應力狀態로 생각할 수 있으며, 任意點 주위의 單位體積當의 變形에 너지는 式(8)에서

$$U = \frac{\sigma_x^2}{2E} = \frac{M^2}{2EI^2} y^2 \quad (25)$$

이고, 보의 길이를 l , 微小體積을 $dV = dAdx$ 라 할 때 보全體의 變形에 너지는

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \int_V U dV = \iint \left(\frac{M^2}{2EI} y^2 \right) dAdx \\ &= \frac{1}{2E} \int_0^l \frac{M^2}{I^2} dx \int_A y^2 dA \end{aligned}$$

에서 $\int_A y^2 dA = I$ 이므로

$$\bar{U} = \frac{1}{2E} \int_0^l \frac{M^2}{I} dx \quad (26)$$

로 表示된다.

보의 彈性變形曲線의 方程式을

$$v = v(x) \quad (27)$$

라 하고, 보의 처짐이 微小할 때 材料力學에서 흔히 假定하는 바와 같이

$$M = -EI \frac{d^2v}{dx^2} \quad (28)$$

를 쓰고, 이것을 式(26)에 代入하면

$$\bar{U} = -\frac{E}{2} \int_0^l I \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 dx \quad (29)$$

가 된다.

이때 式(27)의 처짐曲線 $v(x)$ 는 주어진 問題의 境界條件을 滿足하는 x 에 關한 多項式 또는 三角函數方程式으로 設定하여 嚴密한 解曲線에 近似한 方程式으로 假定한다. x 에 關한 多項式으로 假定할 때에는 $M \propto \frac{d^2v}{dx^2}$ 이고 $\frac{d^2M}{dx^2} \propto q(x)$ 이므로 $v(x)$ 는 보 위에 作用하는 荷重 $q(x)$ 보다 4次高次인 方程式으로 設定하는 것이 合理的이다.

보 위에 作用하는 荷重이 $q(x)$ 이고 처짐 曲線이 $v(x)$ 일 때의 外力의 假想일은

$$\bar{W} = \int_0^l q(x)v(x) dx \quad (30)$$

의 形으로 表示된다.

보의 彈性學的인 嚴密解에는 一解의으로 보 내에 發生하는 應力으로써 σ_x 외에 τ_{xy} 및 σ_y 의 영향이 考慮되어야 하겠으나 本講座에서 意圖하는 바는 嚴密解에 가까운 近似解를 구하려는 것으로, 材料力學에서 τ_{xy} 및 σ_y 를 무시하고, 純粹굽

힘 이론을擴張하여 얻은 解曲線이 x 에 關한 多項式의 꼴로 表示되었으므로, $v(x)$ 를 x 에 關한 多項式으로 假定하여 極小에너지 定理를 적용함으로써 材料力學에서 얻은 結果와 같은 結果가 얻어지는 것을 보이며 아울러 $v(x)$ 를 三角函數 方程式으로 假定했을 때의 近似解를 구하여 比較해 보려는 것이다.

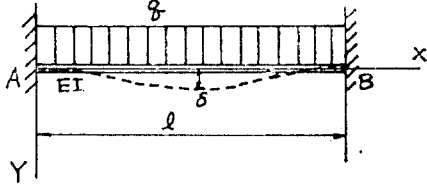


그림 9.

(應用例 7) 그림 9에서와 같이 굽힘 剛性係數가 EI , 길이 l 인 단순보가 均一分布荷重 q 를 받고 있을 때 그 처짐曲線을 極小에너지 定理를 써서 구해보기로 한다.

보 위의 荷重이 $q(x) = q = \text{const.}$ 이므로 $v(x)$ 는 未知係數들을 갖는 x 의 4次方程式으로 設定한다. 즉

$$v(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + f$$

境界條件 $v(0) = 0, v(l) = 0$ 및 $v'(\frac{l}{2}) = 0$ 를 쓰면 $f = 0, d = al^3 - cl, b = -2al$ 이 얻어지므로 처짐曲線의 方程式은

$$v(x) = ax^4 - 2alx^3 + cx^2 + (al^3 - cl)x \quad (i)$$

의 形으로 2個의 未知係數 a, c 를 포함한다. $v(x)$ 를 二次微分하여

$$\frac{d^2v}{dx^2} = 12ax^2 - 12alx + 2c$$

이므로, 式 (29)에서

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \frac{EI}{2} \int_0^l 4(6ax^2 - 6alx + c)^2 dx \\ &= 2EI \left(\frac{6}{5} a^2 l^5 - 2acl^3 + c^2 l \right) \end{aligned}$$

이고, 式 (30)에 의하여

$$\begin{aligned} \bar{W} &= q \int_0^l [ax^4 - 2alx^3 + cx^2 + (al^3 - cl)x] dx \\ &= q \left(\frac{a}{5} l^5 - \frac{c}{6} l^3 \right) \end{aligned}$$

이므로, potential energy의 極小條件을 쓰면

$$\frac{\partial(\bar{U} - \bar{W})}{\partial a} = 0; 2EI \left(\frac{12}{5} al^5 - 2cl^3 \right) - q \left(\frac{l^5}{5} \right) = 0$$

$$\text{즉 } 6l^2 a - 5c = \frac{ql^2}{4EI} \quad (ii)$$

$$\frac{\partial(\bar{U} - \bar{W})}{\partial c} = 0; 2EI(-2al^3 + 2cl) + q \frac{l^3}{6} = 0$$

$$\text{즉 } l^2 a - c = \frac{ql^2}{24EI} \quad (iii)$$

(ii), (iii)을 연립으로 풀면

$$a = \frac{q}{24EI}, c = 0$$

이고, 이것을 (i)에 代入하면

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{q}{24EI} (x^4 - 2lx^3 + l^3x) \\ &= \frac{qx}{24EI} (l^3 - 2lx^2 + x^3) \end{aligned}$$

으로 材料力學에서 구한 結果와 一致한다. 이때 最大처짐 δ 는

$$\delta = v\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{5ql^4}{384EI} \quad (iv)$$

이다.

이 問題에서 처짐曲線의 方程式을

$$v(x) = \delta \sin \frac{\pi}{l} x \quad (v)$$

으로 假定한 近似解를 구하여 比較해 보기로 하자.

式 (v)는 이 問題의 境界條件인 $v(0) = 0, v(l) = 0$ 및 $v'(\frac{l}{2}) = 0$ 를 滿足하며 $v(\frac{l}{2}) = \delta$ 로서 δ 는 $x = \frac{l}{2}$ 인 中央點에서의 最大처짐이다.

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\delta \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \sin \frac{\pi}{l} x$$

이므로, 式 (29)에 의하여

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \frac{EI}{2} \int_0^l \left[-\left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \delta \sin \frac{\pi}{l} x \right]^2 dx \\ &= \frac{EI\pi^4}{2l^4} \delta^2 \int_0^l \sin^2 \frac{\pi}{l} x dx \\ &= \frac{EI\pi^4}{4l^4} \delta^2 \int_0^l \left(1 - \cos \frac{2\pi}{l} x \right) dx = \frac{EI\pi^4}{4l^3} \delta^2 \end{aligned}$$

이고, 式 (30)에 의하여

$$\bar{W} = \int_0^l qv(x) dx = q\delta \int_0^l \sin \frac{\pi}{l} x dx = \frac{2ql}{\pi} \delta$$

이므로

$$\frac{\partial(\bar{U} - \bar{W})}{\partial \delta} = 0 \text{에서 } \frac{EI\pi^4}{2l^3} \delta - \frac{2ql}{\pi} = 0$$

$$\therefore \delta = \frac{4ql^4}{\pi^5 EI} \quad (vi)$$

□ 講 座

가 되며 이것을 (iv)와 比較하면 0.4% 以內的 差異를 나타낸다.

이때 近似처짐 曲線의 方程式은 (vi)을 (v)에 代入하여

$$v(x) = \frac{4ql^4}{\pi^5 EI} \sin \frac{\pi}{l} x$$

의 形으로 表示된다.

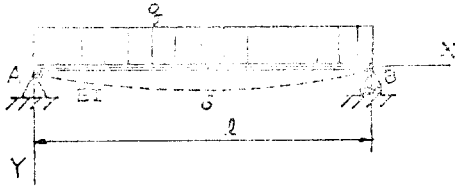


그림 10.

(應用例 8) 앞 例題에서 처짐 曲線의 方程式을 x에 關한 多項式으로 設定했을 때 比較的 複雜한 解法으로 나타났는데 그림 10에서와 같이 均一分布荷重을 받는 兩端固定보인 不靜定보일 때에는 그 境界條件이 有利한 때문에 材料力學에서 중첩법을 쓰는 解法보다 더 簡單하게 그 解가 얻어지는 것을 볼 수가 있다.

이 兩端固定 보의 처짐 曲線도 $q(x) = q = \text{const.}$ 이므로 앞 例題에서와 같이

$$v(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + f$$

를 假定한다.

境界條件 $v(0) = 0, v'(0) = 0, v(l) = 0, v'(l) = 0$ 에서 $f = 0, d = 0, c = al^2, b = -2al$ 이 얻어지므로

$$v(x) = ax^4 - 2alx^3 + al^2x^2 = a(x^4 - 2lx^3 + l^2x^2) = ax^2(l-x)^2 \quad (i)$$

이며

$$\frac{d^2v}{dx^2} = 2a(6x^2 - 6lx + l^2) \quad (ii)$$

이므로, 式(29)에 의하여

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \frac{EI}{2} \int_0^l 4a^2 (6x^2 - 6lx + l^2)^2 dx \\ &= 2EIa^2 \cdot \frac{l^5}{5} = \frac{2EI l^5}{5} a^2 \end{aligned}$$

이고, 式(30)에 의하여

$$\bar{W} = qa \int_0^l (x^4 - 2lx^3 + l^2x^2) dx = \frac{ql^5}{30} a$$

따라서, potential energy의 極小條件을 쓰면

$$\frac{\partial(\bar{U} - \bar{W})}{\partial a} = 0; \quad \frac{4EI l^5}{5} a - \frac{ql^5}{30} = 0$$

$$\therefore a = \frac{q}{24EI} \quad (iii)$$

이고, (i)에 代入하면

$$v(x) = \frac{qx^2}{24EI} (l-x)^2$$

이며, 最大처짐 δ 는

$$\delta = v\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{ql^3}{384EI} \quad (iv)$$

가 된다.

이 方法으로 보를 解析하려 할 때에는 式(28)에 의하여 보의 任意斷面에서의 굽힘모멘트 M가 定義되므로, (ii)와 (iii)을 써서

$$M = -EI \frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{q}{12} (6x^2 - 6lx + l^2)$$

이고, 固定端 A에서의 固定모멘트 M_A 는

$$M_A = (MI)_{x=0} = -\frac{ql^2}{12}$$

이 된다.

이 問題에서도 近似처짐 曲線이로써 三角函數를 쓰고 $x = \frac{l}{2}$ 에서의 最大처짐을 δ 라하면

$$v(x) = \frac{\delta}{2} (1 - \cos \frac{2\pi}{l} x) \quad (v)$$

로 假定했을 때 境界條件인 $v(0) = 0, v(l) = 0, v'(0) = 0, v'(l) = 0$ 와 $v\left(\frac{l}{2}\right) = \delta, v'\left(\frac{l}{2}\right) = 0$ 를 滿足한다.

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{\delta}{2} \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 \cos \frac{2\pi}{l} x$$

이므로, 式(29)에 의하여

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \frac{EI}{2} \frac{\delta^2}{4} \left(\frac{2\pi}{l}\right)^4 \int_0^l \cos^2 \frac{2\pi}{l} x dx \\ &= \frac{2EI\pi^4}{l^4} \delta^2 \int_0^l \frac{1}{2} (1 + \cos \frac{4\pi}{l} x) dx \\ &= \frac{\pi^4 EI}{l^3} \delta^2 \end{aligned}$$

이고, 式(30)에 의하여

$$\bar{W} = \frac{q\delta}{2} \int_0^l (1 - \cos \frac{2\pi}{l} x) dx = \frac{1}{2} ql\delta$$

따라서

$$\frac{\partial(\bar{U} - \bar{W})}{\partial \delta} = 0 \text{에서 } \frac{2\pi^4 EI}{l^3} \delta - \frac{ql}{2} = 0$$

$$\therefore \delta = \frac{ql^4}{4\pi^4 EI} \quad (vi)$$

이며, 이것을 (iv)와 比較하면 1.45% 以內의 差
 異를 나타낸다.

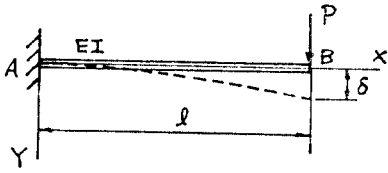


그림 11.

(應用例 9) 그림 11과 같이 自由端에 集中荷重
 P의 作用을 받고 있는 외팔보의 경우도 같은 方法
 으로 求解 보기로 한다.

보 위의 $q(x)=0$ 이므로 처짐曲線을 x 에 關한
 3次方程式

$$v(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

로 設定하고, 境界條件 $v(0)=0, v'(0)=0$ 에서
 $d=0, c=0$ 를 얻는다. 따라서 처짐曲線은

$$v(x) = ax^3 + bx^2 = x^2(ax + b) \quad (i)$$

으로 定義되며

$$\frac{d^2v}{dx^2} = 6ax + 2b$$

이므로, 보 全體의 彈性에너지는 式 (29)에 의
 하여

$$\begin{aligned} \bar{U} &= 2EI \int_0^l (3ax + b)^2 dx \\ &= 2EI(3a^2l^2 + 3abl + b^2) \end{aligned}$$

이요, 外力일은

$$\bar{W} = P \cdot \delta = P \cdot v(l) = P(al^3 + bl^2)$$

이므로

$$\frac{\partial(\bar{U} - \bar{W})}{\partial a} = 0 \text{에서 } 2EI(6l^2a + 3lb) - pl^3 = 0$$

$$\text{즉 } 2la + b = \frac{pl}{6EI} \quad (ii)$$

$$\frac{\partial(\bar{U} - \bar{W})}{\partial b} = 0 \text{에서 } 2EI(3al + 2b) - pl^2 = 0$$

$$\text{즉 } 3la + 2b = \frac{pl}{2EI} \quad (iii)$$

(ii), (iii)을 연립으로 풀어서

$$a = -\frac{p}{6EI}, \quad b = \frac{pl}{2EI}$$

을 얻는다. 따라서 처짐曲線의 方程式은 (i)에
 代入하여

$$v(x) = \frac{px^2}{6EI}(3l - x)$$

이요, 自由端의 처짐 δ 는

$$\delta = v(l) = \frac{pl^3}{3EI} \quad (iv)$$

이 된다.

이 問題에서도 처짐曲線의 方程式으로 三角函
 數의 近似曲線을 쓰면

$$v(x) = \delta(1 - \cos \frac{\pi}{2l}x) \quad (v)$$

로 假定할 때 境界條件 $v(0)=0, v'(0)=0$ 및
 $v(l)=\delta$ 를 滿足한다.

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \delta \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 \cos \frac{\pi}{2l}x$$

이므로

$$\bar{U} = \frac{EI}{2} \delta^2 \left(\frac{\pi}{2l} \right)^4 \int_0^l \cos^2 \frac{\pi}{2l}x dx = \frac{\pi^4 EI}{64l^3} \delta^2$$

이요

$$\bar{W} = P \cdot \delta$$

이다. 따라서

$$\frac{\partial(\bar{U} - \bar{W})}{\partial \delta} = 0 \text{에서 } \frac{\pi^4 EI}{32l^3} \delta - P = 0$$

$$\therefore \delta = \frac{32}{\pi^4} \frac{Pl^3}{EI} \quad (vi)$$

이며, 이 값을 (iv)와 比較하면 약 1.45%의 差
 異를 나타낸다.

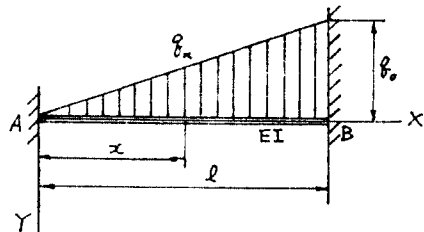


그림 12.

(應用例 10) 그림 12에 보인 三角分布荷重을
 받는 兩端固定보의 처짐曲線을 같은 方法으로
 求解 본다.

分布荷重이 $q_x = \frac{q_0}{l}x$ 로써 x 에 關한 1次函數이
 므로 처짐曲線의 方程式은 x 에 關한 5次方程式
 으로 設定한다. 즉

$$v(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f \quad (i)$$

이때 境界條件으로써 $v(0)=0, v'(0)=0$ 에서 $e=f=0$ 이고 $v(l)=0$ 와 $v'(l)=0$ 에서

$$c = -l(3al + 2b) \quad (ii)$$

□ 講 座

$$d = l^2(2al + b) \quad \text{(iii)}$$

를 얻는다.

따라서

$$v(x) = ax^5 + bx^4 - l(3al + 2b)x^3 + l^2(2al + b)x^2 \quad \text{(iv)}$$

이고

$$v''(x) = 20ax^3 + 12bx^2 - 6l(3al + 2b)x + 2l^2(2al + b)$$

이므로

$$\bar{U} = \frac{EI}{2} \int_0^l 4[10ax^3 + 6bx^2 - 3l(3al + 2b)x + l^2(2al + b)]^2 dx$$

$$\begin{aligned} \bar{W} &= \int_0^l q_0 v(x) dx \\ &= \frac{q_0}{l} \int_0^l x[ax^5 + bx^4 - l(3al + 2b)x^3 + l^2(2al + b)x^2] dx \end{aligned}$$

이 고, $\frac{\partial(\bar{U} - \bar{W})}{\partial a} = 0$ 에서

$$\begin{aligned} 2EI \int_0^l 2[10ax^3 + 6bx^2 - 3l(3al + 2b)x + l^2(2al + b)] \{10x^3 - 9l^2x + 2l^3\} dx \\ - \frac{q_0}{l} \int_0^l (x^6 - 3l^2x^4 + 2l^3x^3) dx = 0 \end{aligned}$$

를 積分하여

$$9la + 28b = \frac{3q_0}{40EI} \quad \text{(v)}$$

이 고, $\frac{\partial(\bar{U} - \bar{W})}{\partial b} = 0$ 에서

$$\begin{aligned} 2EI \int_0^l 2[10ax^3 + 6bx^2 - 3l(3al + 2b)x + l^2(2al + b)] \{6x^2 - 6lx + l^2\} dx \\ - \frac{q_0}{l} \int_0^l (x^5 - 2lx^4 + l^2x^3) dx = 0 \end{aligned}$$

이 고, 積分하여

$$5la + 2b = \frac{q_0}{24EI} \quad \text{(vi)}$$

(v)와 (vi)을 연립으로 풀면

$$a = \frac{q_0}{120lEI}, \quad b = 0$$

를 얻으며 (iv)에 代入하면

$$v = \frac{q_0}{120lEI} (x^5 - 3l^2x^3 + 2l^3x^2) \quad \text{(vii)}$$

을 얻는다.

最大처짐 v_{max} 을 구하기 위하여

$$v' = \frac{q_0}{120lEI} (5x^4 - 9l^2x^2 + 4l^3x) = 0$$

에서

$$x(l-x)(5x^2 + 5lx - 4l^2) = 0$$

이므로 最大처짐이 일어나는 斷面 $x_{(max)}$ 은

$$x_{(max)} = \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{21}{20}}\right)l = 0.525l \quad \text{(viii)}$$

로써, 中央斷面 가까이에서 일어나는 것을 알 수 있으며, (viii)을 (vii)에 代入하여

$$v_{max} = 0.00131 \frac{q_0 l^4}{EI} \quad \text{(ix)}$$

을 얻는다.

이 問題에서 처짐曲線이 左右대칭은 아니나 最大처짐이 (viii)에 보인 바와 같이 中央斷面에 아주 가깝기 때문에 前例題 8의 (v)와 같은 左右대칭인 近似曲線을 써서 最大처짐을 구하며 比較해 보기로 하자.

$$v(x) = \frac{\delta}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{l}x\right)$$

로 假定하면 變形에너지는 前例題 8에서의와 같으며

$$\bar{U} = \frac{\pi^4 EI}{l^3} \delta^2$$

이다. 이때의 外力일은

$$\begin{aligned} \bar{W} &= \int_0^l \frac{q_0}{l} x \cdot \frac{\delta}{2} (1 - \cos \frac{2\pi}{l}x) dx \\ &= \frac{q_0 \delta}{2l} \int_0^l (x - x \cos \frac{2\pi}{l}x) dx = \frac{q_0 l}{4} \delta \end{aligned}$$

이므로

$$\frac{\partial(\bar{U} - \bar{W})}{\partial \delta} = 0 \text{에서 } \frac{2EI\pi^4}{l^3} \delta - \frac{q_0 l}{4} = 0$$

$$\therefore \delta = \frac{q_0 l^4}{8\pi^4 EI} = 0.00128 \frac{q_0 l^4}{EI} \quad \text{(x)}$$

로써 이 δ 가 보 증양에서의 最大처짐 값이 된다.

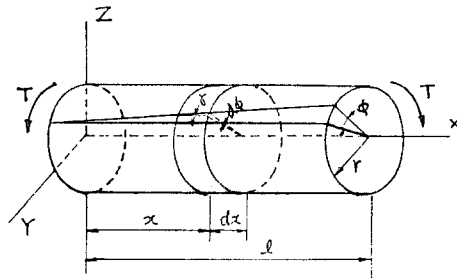


그림 13.

이 값을 (ix)와 比較하면 1.3%의 差異를 나타내고 있으며, 비록 最大처짐을 일으키는 斷面은 一致하지 않더라도 보의 最大 처짐값의 近似值로써는 充分함을 알 수가 있다.

8. 圓形斷面棒의 純粹비틀림問題에의 應用

그림 13과 같이 반지름 r , 길이 l 인 圓形斷面棒이 비틀림모멘트 T 를 받고 비틀림角 ϕ 만큼 순수비틀림을 일으켰을 때, 材料力學에서 假定하는 바와 같이 圓形斷面들은 비틀림을 받은 후에도 圓形을 유지하고 반지름들도 비틀림 후에 直線을 유지한다고 생각한다.

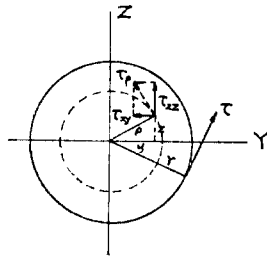


그림 14.

이때 任意橫斷面에는 그림 14에 보인 바와 같이

$$\tau_{xz} = G\theta y, \quad \tau_{xy} = -G\theta z \quad (31)$$

인 剪斷應力만 發生하게 된다. θ 는 棒 單位길이當의 비틀림角 $\theta = \frac{d\phi}{dx}$ 이다. 이 두 剪斷應力의 合應力 τ_θ 는 반지름 ρ 인 圓의 接線方向이며

$$\tau_\theta = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} = G\theta \sqrt{y^2 + z^2} = G\theta\rho \quad (32)$$

이다. 이 合剪斷應力은 반지름 ρ 에 比例하며 表面에 나타나는 剪斷應力이 最大로써

$$\tau = G\theta r \quad (33)$$

인 것은 잘 알고 있는 사실이다.

반지름 ρ 인 지점의 單位體積當의 變形 에너지는 式 (8)에서 $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0$ 를 쓰면

$$U = \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2)$$

이고 : (32)에서

$$U = \frac{\tau_\theta^2}{2G} = \frac{G\theta^2\rho^2}{2}$$

이다.

棒全體의 變形에너지 \bar{U} 는

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \int_0^l \int_A U dA dx = \frac{G\theta^2}{2} \int_0^l dx \int_A \rho^2 dA \\ &= \frac{G\theta^2 J l}{2} \end{aligned}$$

로 表示되며, $J = \int_A \rho^2 dA$ 는 橫斷面의 極慣性能率이다. 이때 $\theta = \frac{d\phi}{dx} = \frac{\phi}{l}$ 이므로

$$\bar{U} = \frac{GJ\phi^2}{2l} \quad (34)$$

이다.

그림 13에서 비틀림모멘트 T 가 한 外力일은

$$\bar{W} = T\phi \quad (35)$$

로 表示된다.

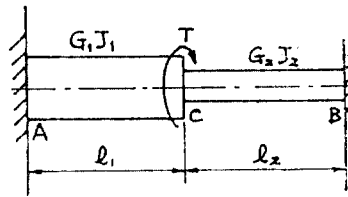


그림 15.

(應用例 11) 그림 15에서와 같이 비틀림 剛度가 各各 G_1J_1 , G_2J_2 이고, 길이가 l_1, l_2 인 圓形斷面棒材가 結合되어 兩端이 剛性壁에 固定되고, 그 結合面 C에 비틀림모멘트 T 가 作用하는 경우, 斷面 C에서의 비틀림角 ϕ_c 를 極小에너지 定理을 써서 求해보기로 한다.

兩쪽 棒材의 C斷面에서의 비틀림角 ϕ_c 는 같은 것이므로 系全體의 變形에너지는 式 (34)에 의하여

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \frac{G_1J_1\phi_c^2}{2l_1} + \frac{G_2J_2\phi_c^2}{2l_2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{G_1J_1}{l_1} + \frac{G_2J_2}{l_2} \right) \phi_c^2 \end{aligned}$$

이고 外力일은 式(35)에 의하여

$$\bar{W} = T\phi_c$$

이므로

$$\frac{\partial(\bar{U} - \bar{W})}{\partial\phi_c} = 0 \text{에서} \left(\frac{G_1J_1}{l_1} + \frac{G_2J_2}{l_2} \right) \phi_c - T = 0$$

$$\therefore \phi_c = \frac{l_1 l_2 T}{G_1 J_1 l_2 + G_2 J_2 l_1}$$

이다.

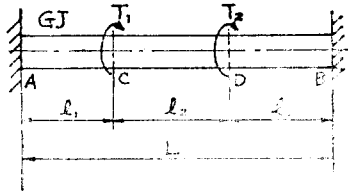


그림 16.

(應用例 12) 그림 16에 보인 바와 같이 비틀림剛도가 GJ 이고, 길이가 L 인 円形斷面棒의 兩端을 剛性壁에 固定하고 斷面 C 와 D 에 비틀림모멘트 T_1 과 T_2 가 作用하는 경우, 斷面 C 및 D 에서의 비틀림角 ϕ_c 와 ϕ_D 를 求해보자.

系全體의 變形에너지는 式(34)에 의하여

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \frac{GJ\phi_c^2}{2l_1} + \frac{GJ(\phi_c - \phi_D)^2}{2l_2} + \frac{GJ\phi_D^2}{2l_3} \\ &= \frac{GJ}{2} \left\{ \frac{\phi_c^2}{l_1} + \frac{(\phi_c - \phi_D)^2}{l_2} + \frac{\phi_D^2}{l_3} \right\} \end{aligned}$$

이고 外力일은

$$\bar{W} = T_1\phi_c + T_2\phi_D$$

이다. 따라서

$$\frac{\partial(\bar{U} - \bar{W})}{\partial\phi_c} = 0 \text{에서}$$

$$\frac{GJ}{2} \left\{ \frac{2\phi_c}{l_1} + \frac{2(\phi_c - \phi_D)}{l_2} \right\} - T_1 = 0$$

$$\text{즉 } (l_1 + l_2)\phi_c - l_2\phi_D = \frac{l_1 l_2 T_1}{GJ} \quad \text{(i)}$$

$$\frac{\partial(\bar{U} - \bar{W})}{\partial\phi_D} = 0 \text{에서}$$

$$\frac{GJ}{2} \left\{ -\frac{2(\phi_c - \phi_D)}{l_2} + \frac{2\phi_D}{l_3} \right\} - T_2 = 0$$

$$\text{즉 } -l_2\phi_c + (l_2 + l_3)\phi_D = \frac{l_2 l_3 T_2}{GJ} \quad \text{(ii)}$$

(i), (ii)를 연립으로 풀면

$$\phi_c = \frac{l_1}{GJL} \{T_1(l_2 + l_3) + T_2 l_3\}$$

$$\phi_D = \frac{l_3}{GJL} \{T_1 l_1 + T_2(l_1 + l_2)\}$$

이다.

9. 맺는말

이상에서 potential energy의 極小條件을 各種경우에 적용하여 材料力學의 解 또는 變形的 近似解를 應用例들을 通하여 求해 보았다.

이 解法은 軸力을 받는 部材, 보(beam) 또는 純粹비틀림을 받는 円形棒材의 경우, 不靜定問題에서 그 支持點들에서의 反力要素를 생각할 必要가 없기 때문에 材料力學의 解法보다 더 簡便하게 求해지고 있는 것을 볼 수가 있다.

또 보의 처짐曲線이 길이의 中央面에 대하여 左右 대칭형일 때에, 中央斷面에서의 最大처짐을 求하는데 三角函數의 近似처짐 曲線을 設定하므로써 실제 變位해에 가까운 近似값이 간단하게 求해질 수 있는 것을 보였다.

이 極小에너지 定理은 円形斷面이 아닌 各種斷面棒材의 비틀림問題에서도 비틀림 應力函數를 導入하고, 境界條件을 滿足하는 近似應力 函數方程式을 假定함으로써 簡單하게 그 近似解를 求하는 데까지 擴張할 수가 있다.

參 考 文 獻

1. 鶴戶口英善: 彈性學(1968) 共立出版(東京)
2. S. P. Timoshenko, J. N. Goodier; Theory of Elasticity (1970) McGraw-Hill
3. Raymond J. Roark; Formulas for Stress and Strain (1954) McGraw-Hill
4. S.P. Timoshenko, J.M. Gere; Theory of Elastic Stability (1961) McGraw-Hill

