

行列解法에 의한 骨組構造解析의 電算化

Computerization of Matrix Analysis of Skeletal Structures

李 宰 泳*
Jae Young Lee

Summary

General purpose programs are essential elements for the computerization of structural analysis. This paper is associated with actual formulation of such programs by matrix analysis. The basic theory of matrix analysis for skeletal structures, its implementation and techniques for developing efficient programs are discussed in this paper.

Any shape of skeletal structure can be included in a single program for space frames. But in order to economize computing time and computer memory space, it is desirable to develop and operate separate programs specialized into four categories: truss, planar frame, grid and space frame.

As for general purpose programs, simplicity of input format and flexibility of output format should be duly considered.

Compaction and solution of system equations are the most important aspects in computer programming of matrix analysis, and worth further study for more efficient computerization.

I. 緒 論

最近에 컴퓨터의 發達과 함께 構造解析의 電算化가 急進되어 왔다. 構造解析에 컴퓨터가 利用되기 시작하던 初期에는 擁壁, 橋梁, 暗渠等 特定한 形態의 構造物을 對象으로 하여 設計에 必要한 諸計算을 遂行하도록 作成된 設計指向의인 (Design-oriented) 프로그램이 普遍的 이었다. 이들 프로그램은 대체로 過去에 筆算으로 遂行하던 作業을 컴퓨터로 自動化한다는 意味는 갖고 있지만 한 프로그램이 하나의 固定된 構造形態에 局限되어 있기 때문에 그 効用성이 낮으며, 構造物의 多樣性에 비추어 볼 때 極히 斷片的인 役割밖에는 하지 못한다.

構造解析의 實質의인 電算化를 爲해서는 어떠한 形態, 어떠한 荷重, 어떠한 境界條件等, 豫測할 수

없는 任意의 條件을 自由自在로 處理할 수 있는 汎用프로그램이 이루어지지 않으면 안된다. 從來의 設計指向의인 프로그램들이 거의 모두 解析의인 方法에 바탕을 두고 있는데 反해서 이러한 汎用프로그램化는 數值解析의인 方法에 依해서만 可能하다. 또한 數值解析의 方法은 解析의 方法으로는 解決할 수 없는 複雜한 問題를 컴퓨터에 依해 實際에 가깝게 模型化할 수 있는 컴퓨터 指向의인 方法이다.

骨組構造解析을 爲한 行列解法(Matrix Analysis)은 이와 같은 汎用프로그램化를 達成할 수 있는 컴퓨터 指向의인 方法이다. 行列解法의 基本概念은 새로운 것이 아니며 Castigliano, Maxwell, Muller-Breslau 등의 理論은 土臺로 한 것이다. 行列解法은 이미 19세기부터 研究되어 왔지만 本格的으로 實用化된 것은 컴퓨터가 登場한 以後의 일이다. 1947年 Levy¹⁾는 Force Method의 行列解法에 關한 論文을

* 農業振興公社 設計2部(電算室)

發表하였으며 1956년에는 Turner等⁽¹⁰⁾이 最初로 Stiffness Method의 理論을 發表하였다. 行列解法은 이와같이 Force Method와 Stiffness Method로 大別할 수 있는데 現在는 Stiffness Method가 支配的으로 利用되고 있다.

本論文은 트러스, 平面프레임, 그리드 및 立體프레임의 構造解析을 爲한 "ANYTRUSS", "ANYPLANA", "ANYGRID" 및 "ANYFRAME" 등 4個프로그램의 開發과 並行해서 作成되었다. 本論文에서는 行列解法의 基本理論을 實際프로그램의 內容 및 順序와 相應하도록 整理하고, 效果의인 컴퓨터프로그램化에 關하여 論하였으며, 그에 따르는 問題點과 解決方案에 對하여 考察하였다.

上記 두 프로그램은 現在 農振公 電算室에서 保有, 使用하고 있으며, 本論文에서는 이들 프로그램에 對한 具體的인 說明과 리스트를 省略하였다.

II. 行列解法의 基本理論

1. 힘과 變位

3次元空間에서 任意의 位置를 차지하는 하나의 部材를 생각할 때, 그 部材의 構造力學的인 動作을 部材兩端에 發生하는 힘과 變位에 依해서 定義할 수 있다. 部材 한쪽 끝의 變位는 6個의 要素, 即 그림 1-(a)에서 X,Y,Z方向의 線型移動 $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ 와 回轉移動 $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ 가 있다. 이에 對應되는 힘은 P_x, P_y, P_z, M_x, M_y 및 M_z 가 된다. 이들을 벡터(Vector)로 表示하면,

$$\{D\} = \begin{Bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \\ \Delta_z \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{Bmatrix}, \quad \{P\} = \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix}$$

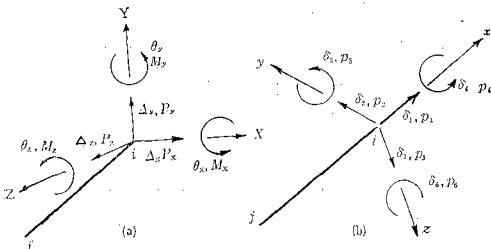


Fig. 1. Force and displacement.

여기서 $\{D\}$ 는 變位벡터(Displacement Vector), $\{P\}$ 는 힘벡터(Force Vector)가 된다.

그림 1-(a)에서 $\{P\}$ 와 $\{D\}$ 는 構造物全體에 對한 座標系, 即 全體座標系(Global Coordinate System)의 X,Y,Z軸을 基準으로 表示된다. 이것은 各部材의 軸方向을 x軸으로 하는 局部座標系(Local Coordinate System)에 對한 값으로도 表示할 수 있다. 局部座標系에 對한 變位벡터와 힘벡터를 各各 $\{\delta\}$ 와 $\{p\}$ 라고하면

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix}, \quad \{p\} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{Bmatrix}$$

構造解析過程에서 變位, 部材의 性質等은 必要에 따라서 全體座標系 또는 局部座標系에 對한 값으로 나타나게 된다.

2. 座標의 變換

全體座標系에 對한 값을 局部座標系로 變換시키거나 그 逆으로 變換시키는 것은 잘 알려진 回轉行列(Rotation Matrix)을 利用하므로써 쉽게 이루어진다.

回轉行列을 $\{R\}$ 이라고 하면

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} l & m & n \\ -\frac{m}{D} & \frac{l}{D} & 0 \\ -\frac{ln}{D} & -\frac{mn}{D} & D \end{Bmatrix}$$

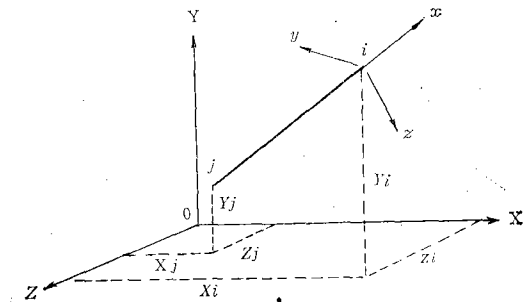


Fig. 2. Global and local coordinate systems.

그림 2에서

$$L = \sqrt{(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2 + (Z_i - Z_j)^2}$$

$$l = (X_i - X_j) / L$$

$$m = (Y_i - Y_j) / L$$

$$n = (Z_i - Z_j) / L$$

$$D = \sqrt{l^2 + m^2}$$

다음의 (1)식에서와 같이 全體座標系의 變位벡터는 回轉行列을 利用하여 局部座標系로 變換된다.

$$\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{pmatrix}_{ij} = \begin{bmatrix} [R] & \vdots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \vdots & [R] \end{bmatrix}_{ij} \begin{pmatrix} \Delta_X \\ \Delta_Y \\ \Delta_Z \\ \theta_X \\ \theta_Y \\ \theta_Z \end{pmatrix} \dots\dots\dots(1)$$

이를 簡略하게 表示하면

$$\{\delta\}_{ij} = [R]_{ij} \{\Delta\}_i$$

한편 回轉行列의 逆行列은 其의 轉置行列과 同一하다. 即

$$[R]_{ij}^{-1} = [R]_{ij}^T$$

따라서

$$\{\Delta\}_i = [R]_{ij}^T \{\delta\}_{ij}$$

힘벡터에 대해서도 마찬가지로 이러한 關係가 成立된다.

$$\{p\}_{ij} = [R]_{ij} \{P\}_i$$

$$\{P\}_i = [R]_{ij}^T \{p\}_{ij}$$

3. 部材의 平衡方程式

가. 基本方程式

彈性體에 外力이 quasilinear하게 作用할때 이로 因하여 各點에 發生하는 變位와 힘의 關係는 (2)式으로 表現된다.

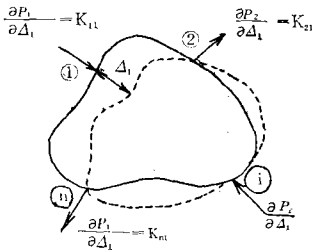


Fig. 3. Stiffness of an elastic body.

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial \Delta_1} & \frac{\partial P_1}{\partial \Delta_2} & \dots & \frac{\partial P_1}{\partial \Delta_n} \\ \frac{\partial P_2}{\partial \Delta_1} & \frac{\partial P_2}{\partial \Delta_2} & \dots & \frac{\partial P_2}{\partial \Delta_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P_n}{\partial \Delta_1} & \frac{\partial P_n}{\partial \Delta_2} & \dots & \frac{\partial P_n}{\partial \Delta_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{pmatrix} \dots\dots\dots(2)$$

$\partial P_i / \partial \Delta_j$ 는 j 點의 變位에 따른 i 點에서의 힘의 變化率을 意味하며, 이를 곧 j 點에 對한 i 點의 剛度라고 定義할 수 있다.

$\partial P_i / \partial \Delta_j = K_{ij}$ 라고 놓으면 (3)式은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{pmatrix} \dots\dots\dots(3)$$

이를 簡略하게 表示하면

$$\{P\} = [K] \{\Delta\}$$

여기서 $[K]$ 는 彈性體의 剛度를 나타내는 剛度行列이다. 이 剛度行列을 組立하고 作動하는 것이 行列解法의 가장 重要한 過程이라고 할 수 있다. 骨組構造物에 있어서는 個個의 部材마다 部材의 平衡方程式을 構成하는 部材剛度行列(Member Stiffness Matrix)이 存在하며, 이들 部材剛度行列을 體系的으로 組立하면 全體剛度行列(Global Stiffness Matrix)을 얻게된다. 여기에 境界條件을 導入하므로써 構造物全體에 對한 平衡方程式이 完成된다.

나. 部材剛度行列

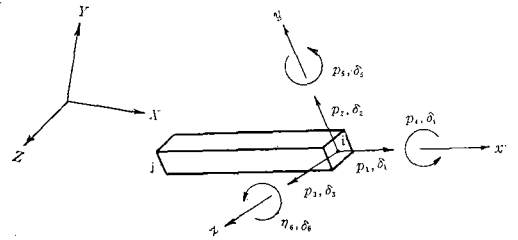


Fig. 4. Member force and displacement in local coordinate system.

部材 ij 의 i 端에서의 힘벡터를 $\{p\}_{ij} = \{p_{i1}, p_{i2}, p_{i3}, p_{i4}, p_{i5}, p_{i6}\}_{ij}$, 變位벡터를 $\{\delta\}_{ij} = \{\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3}, \delta_{i4}, \delta_{i5}, \delta_{i6}\}_{ij}$ 라고 하고 j 端에서의 힘벡터와 變位벡터를 各各 $\{p\}_{ji}$, $\{\delta\}_{ji}$ 로 表示하면 이 部材에 對한 平衡方程式은 (4)式과 같이 쓸 수 있으며, 이것은 (3)式과 同一한 形態를 取한다.

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} ij \\ \vdots \\ ji \end{matrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} & K_{17} & K_{18} & \dots & K_{1,12} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} & K_{27} & K_{28} & \dots & K_{2,12} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{61} & K_{62} & \dots & K_{6n} & K_{67} & K_{68} & \dots & K_{6,12} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{71} & K_{72} & \dots & K_{7n} & K_{77} & K_{78} & \dots & K_{7,12} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{81} & K_{82} & \dots & K_{8n} & K_{87} & K_{88} & \dots & K_{8,12} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{12,1} & K_{12,2} & \dots & K_{12,n} & K_{12,7} & K_{12,8} & \dots & K_{12,12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} ij \\ \vdots \\ ji \end{matrix} \quad (4)$$

위의 方程式에서 部材剛度行列을 네개의 剛度行列로 分離할 수 있다. i 端的 變位와 i 端到 發生하는 힘을 맺어주는 剛度行列을 $j[k]_{ii}$, j 端的 變位와 i 端의 힘에 對한 剛度行列을 $[k]_{ij}$, i 端變位와 j 端힘에 對해서는 $[k]_{ji}$, j 端變位와 j 端힘에 對해서는 $[k]_{jj}$, 라고 表示하면

$$\begin{pmatrix} \{p\}_{ij} \\ \vdots \\ \{p\}_{ji} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j[k]_{ii} & [k]_{ij} \\ [k]_{ji} & [k]_{jj} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{\delta\}_{ij} \\ \{\delta\}_{ji} \end{pmatrix} \quad (5)$$

部材剛度行列은 部材端的 變位 $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ 를 하나씩 獨立的으로 發生시켰을때 그로 因하여 誘發되는 힘의 크기를 計算하므로써 求할 수 있다. 例를 들어서 (4)式에서 K_{11} 은 i 端이 δ_1 을 1만큼 주었을 때 i 端到 發生하는 p_1 의 크기라고 할수 있으며, K_{2n} 은 j 端的 δ_n 가 1일때 j 端이 생기는 p_2 의 크기로서 解析할 수 있다. 이러한 方式으로 다음과 같은 部材剛度行列을 얻게된다.

$$j[k]_{ii} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{-6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{pmatrix}$$

$$[k]_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{-12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{-6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{-2EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{-6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \end{pmatrix}$$

Maxwell의 定理에 依하면 部材 ij 의 j 端變位로 因하여 i 端到 發生하는 힘의 크기는 同一한 變位를

i 端에 주었을때, j 端에 생기는 힘의 크기와 같다. 따라서

$$\begin{aligned} j[k]_{jj} &= j[k]_{ii} \\ [k]_{ji} &= [k]_{ij} \end{aligned}$$

4. 構造物全體에 對한 平衡方程式

構造物全體에 對한 平衡方程式은 部材의 平衡方程式을 結合하므로써 얻어진다. 平衡方程式을 結合하는데는 節點에서의 變位適合性和 힘의 平衡이라는 두가지의 條件이 適用된다.

變位の 適合性이란 어떤 節點의 變位가 그 節點에서 만나는 모든 部材에 對하여 同一함을 意味한다.

$$\{D\}_i = \{D\}_{ij} = \{D\}_{im} = \dots = \{D\}_{in}$$

한편 힘의 平衡條件에 依하면 어떤 節點에서 만나는 모든 部材의 節點應力의 總和는 그 節點에 作用하는 外力과 같다.

$$\{P\}_i = \{P\}_{ij} + \{P\}_{im} + \dots + \{P\}_{in} \quad (6)$$

(6)式에서 局部座標系로 表示된 部材의 平衡方程式은

$$\{p\}_{ij} = j[k]_{ii}\{\delta\}_{ij} + [k]_{ij}\{\delta\}_{ji} \quad (7)$$

全體座標系로 表示하면

$$\{P\}_{ij} = j[K]_{ji}\{D\}_{ij} + [K]_{ij}\{D\}_{ji} \quad (8)$$

여기서 $j[K]_{ii}$ 와 $[K]_{ij}$ 는 全體座標系로 表示된 部材剛度行列이며, 局部座標系에 對한 $j[k]_{ii}$ 및 $[k]_{ij}$ 와의 關係는 다음과 같다.

$$j[K]_{ii} = [R]_{ij}^T j[k]_{ii} [R]_{ij}$$

$$[K]_{ji} = [R]_{ij}^T [k]_{ij} [R]_{ij}$$

(6)式과 (8)式으로부터

$$\begin{aligned} \{P\}_i &= (j[K]_{ii} + [K]_{ii} + \dots + [K]_{ii})\{D\}_i \\ &\quad + [K]_{ij}\{D\}_j + [K]_{im}\{D\}_m + \dots \\ &\quad + [K]_{in}\{D\}_n \end{aligned}$$

또

$$[K]_{ii} = j[K]_{ii} + [K]_{ii} + \dots + [K]_{ii}$$

라고 놓으면

$$\begin{aligned} \{P\}_i &= [K]_{ii}\{D\}_i + [K]_{ij}\{D\}_j + [K]_{im}\{D\}_m + \dots \\ &\quad + [K]_{in}\{D\}_n \end{aligned}$$

따라서 構造物全體에 對한 平衡方程式은

$$\begin{Bmatrix} \{P\}_i \\ \{P\}_j \\ \{P\}_m \\ \vdots \\ \{P\}_n \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} [K]_{ii} & [K]_{ij} & [K]_{in} & \cdots & [K]_{in} \\ & [K]_{jj} & [K]_{jm} & \cdots & [K]_{jn} \\ & & [K]_{mm} & \cdots & [K]_{mn} \\ & & & \ddots & \vdots \\ \text{Symmetric} & & & & [K]_{nn} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \{D\}_i \\ \{D\}_j \\ \{D\}_m \\ \vdots \\ \{D\}_n \end{Bmatrix} \quad (9)$$

5. 境界條件

(9)式的 平衡方程式에서 求하고자 하는 未知數는 節點의 變位가 된다. 그런데 前記 平衡方程式의 變位벡터에 包含된 支持點의 變位는 既知의 값이며, 剛度行列은 Nonsingular의 性格을 가지고 있다. 變位벡터를 未知의 變位值만으로 構成되도록 하고, 剛度行列이 Nonsingular하게 하기 爲해서는 既知와 未知의 變位值가 分離되도록 平衡方程式을 再整理할 必要가 있다. 既知의 支持點變位值 m 個가 分離되도록 行벡터, 剛度行列 및 變位벡터의 各要素는 다음과 같이 再配列될 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \{P\}_1 \\ \vdots \\ \{P\}_m \\ \vdots \\ \{P\}_{m+1} \\ \vdots \\ \{P\}_n \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} [K]_{11} \cdots [K]_{1m} & [K]_{1, m+1} & \cdots & [K]_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & [K]_{mm} & \cdots & [K]_{mn} \\ \text{Symmetric} & & & [K]_{m+1, m+1} & \cdots & [K]_{m+1, n} \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & [K]_{n, n} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \{D\}_1 \\ \vdots \\ \{D\}_m \\ \vdots \\ \{D\}_{m+1} \\ \vdots \\ \{D\}_n \end{Bmatrix}$$

이를 簡略하게 表示하면

$$\begin{Bmatrix} \{P\}_I \\ \{P\}_{II} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K]_{I, I} & [K]_{I, II} \\ [K]_{II, I} & [K]_{II, II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{D\}_I \\ \{D\}_{II} \end{Bmatrix}$$

支持點의 變位 $D_1 \sim D_m = 0$, 即 $\{D\}_I = \{0\}$ 이라면

$$\{P\}_{II} = [K]_{II, II} \{D\}_{II} \quad (10)$$

이것이 未知의 節點變位를 求하기 爲한 最終의 平衡方程式이 된다.

6. 固定端力(Fixed End Force)과 等價節點力(Equivalent Joint Force)

構造物의 節點에만 外力이 作用하고 部材의 中間에는 荷重이 施리지 않는 境遇라면 (10)式的 行벡터 $\{P\}_{II}$ 는 곧 節點의 外力을 뜻하게 된다. 또 局部座標系로 表示한 部材의 節點力은 (7)式的 部材平衡方程式으로 直接나타낼 수 있다.

$$\{p\}_{ij} = j[k]_{ii} \{\delta\}_{ij} + [k]_{ij} \{\delta\}_{ji}$$

그러나 實際의으로는 대부분의 境遇에 있어서 部材의 中間에 荷重이 있게되는데 이때 部材의 節點力은

$$\{p\}_{ij} = j[k]_{ii} \{\delta\}_{ij} + [k]_{ij} \{\delta\}_{ji} + \{p\}_i^* \quad (11)$$

여기서 $\{p\}_i^*$ 는 部材中間의 荷重으로 因한 固定端力이다. 構造物에 作用하는 荷重은 一般的으로 全體座標系와 局部座標系에 對하여 各各 6 個의 成分

으로 分離해서 생각할 수 있다. 全體座標系의 荷重벡터(Load Vector)를 $\{F\}$ 라고 하면

$$\{F\} = [F_x \ F_y \ F_z \ M_x \ M_y \ M_z]$$

局部座標系의 荷重벡터를 $\{f\}$ 라고 하면

$$\{f\} = [R]_{ij} \{F\}$$

部材 ij 에 荷重 $\{F\}$ 가 作用할때 i 端에 發生하는 固定端力은

$$\{p\}_i^* = [C] \{f\} = [C][R]_{ij} \{F\}$$

여기서 $[C]$ 는 荷重을 固定端力으로 轉換시켜주는 係數行列이다. 3次元骨組構造物에 對해서 $[C]$ 는 아래와 같은 形態를 取한다.

$$[C] = \begin{pmatrix} -C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C_2 & 0 & 0 & 0 & C_4 \\ 0 & 0 & -C_2 & 0 & -C_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C_3 & 0 & -C_5 & 0 \\ 0 & C_3 & 0 & 0 & 0 & -C_6 \end{pmatrix}$$

한 部分에 여러개의 荷重이 作用할 境遇에 固定端力은

$$\{p\}_i^* = \sum_r [C]_r [R]_{ij} \{F\}_r$$

固定端力을 全體座標系로 變換시켜 符號를 바꾼 것을 等價節點力이라고 한다. 平衡方程式 (10)에서 行벡터 $\{P\}_{II}$ 는 이 等價節點力과 節點外力의 合과 같다. 한 節點에서 여러개의 部材가 만날 境遇에 等價節點力의 總和 $\{P\}_i^*$ 는

$$\{P\}_i^* = -\sum_j [R]_{ij}^T \sum_r [C]_r [R]_{ij} \{F\}_r$$

$\{P\}_i^*$ 를 $i=1, 2, \dots, n$ 의 모든 節點에 對해서 求하고 그 값을 節點에 直接的으로 作用하는 外力에 더하면 最終平衡方程式 $\{P\} = [K] \{D\}$ 의 行벡터 $\{P\}$ 를 얻게된다. 未知의 節點變位值는

$$\{D\} = [K]^{-1} \{P\}$$

各部材端에 發生하는 內力은 (12)式으로부터 算出할 수 있다.

$$\{p\}_{ij} = j[k]_{ii} [R]_{ij} \{D\}_i + [k]_{ij} [R]_{ji} \{D\}_j + \{p\}_i^* \quad (12)$$

III. 컴퓨터프로그램化

行列解法을 實際問題에 適用하려면 매우 큰 方程式을 풀어야하고, 反復되는 計算을 無數히 되풀이하여야 하기때문에 컴퓨터를 利用하지 않으면 안된다. 行列解法의 基本理論은 從來의 解析의인 理論에 바탕을 두고 있지만 全體의인 計算過程이 行列

과 벡터의 組織的인 演算에 依해서 一般化될 수 있
기때문에 簡潔하고 體系的인 프로그래밍이 容易할
뿐만 아니라, 任意的 構造形態와 荷重條件을 處理할
수 있는 汎用프로그램化가 可能하다.

骨組構造物은 트리스, 平面프레임(Planar Frame),
그리드(Grid), 立體프레임(Space Frame) 등으로 分
類된다. 트리스, 平面프레임, 그리드는 모두 立體
프레임의 特殊한 境遇로 取扱할 수 있기때문에 立
體프레임에 對한 單一프로그램으로도 모든 形態의
骨組構造物을 處理할 수 있다. 그러나 不必要한 演
算過程을 피하고, 컴퓨터의 記憶容量을 最大限으로
活用하기 爲해서는 위에 列擧한 構造物의 種類別로
獨立된 프로그램을 開發하여 運用하는 것이 效率的
이다.

1. 프로그램의 一般的인 構成

行列解法에 依한 構造解析프로그램은 對象으로하
는 構造物의 種類에 따라서 多少의 差異는 있지만
대체로 다음과 같은 順序에 따라서 構成된다.

- 1) Input Data(節點의 番號, 座標, 部材斷面, 荷
重條件, 境界條件 等)를 읽어 들인다.
- 2) 入力되는 順序대로 部材의 番號를 賦與하고,
節點番號와 部材番號의 相互關係를 定한다.
- 3) 節點의 數가 n 이라면 6×6 의 小行列을 하나의
要素로하는 $n \times n$ 個要素의 剛度行列 $[K]$ 를 零으
로 Initialize한다.
- 4) 部材 ij 에 對하여 部材의 길이와 回轉行列을
計算하고 $j[K]_{ii}$, $i[K]_{jj}$ 와 $[K]_{ij}$ 를 求하여 各
各 $[K]$ 의 i 列 i 行, j 列 j 行 및 i 列 j 行에 더한다.
- 5) 위의 過程을 모든 部材에 對해서 되풀이하면
 $[K]$ 가 完成된다.
- 6) 境界條件을 導入하여 既知의 自由度에 該當되
는 列과 行을 $[K]$ 에서 分離시켜 最終的인 剛
度行列 $[K]_{rr}$ 를 求한다.
- 7) 힘벡터 $\{F\}$ 를 零으로 Initialize한다.
- 8) 모든 外力에 對한 等價節點力을 求하여 $\{F\}$ 의
該當되는 要素에 더한다.
- 9) 平衡方程式을 풀어서 未知의 節點變位를 求한
다.
- 10) 反力과 部材의 應力을 計算한다.
- 11) 結果를 印刷한다.

2. Input Data

프로그램을 遂行하기 爲한 첫段階는 Input Data
를 읽어들이는 것이다. Input Data는 作成方法이 簡

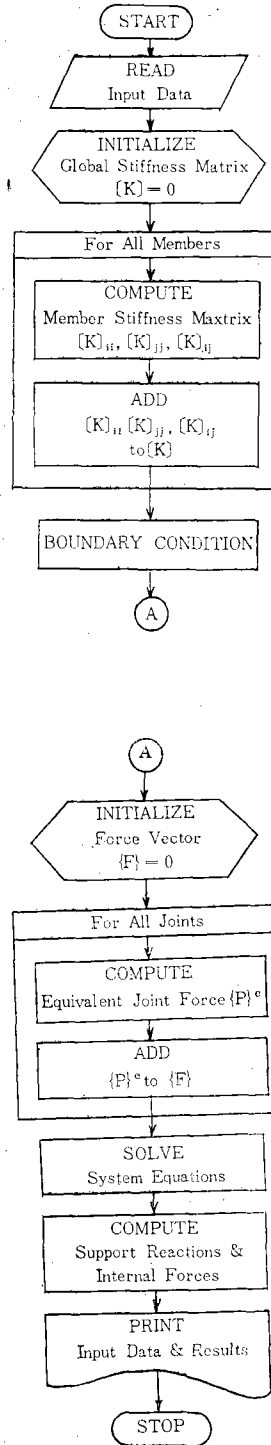


Fig. 5. General Flow Chart

便하고 理解하기 쉬워야하며, 프로그램 내에서 誘導 또는 制御가 가능한 事項은 可及的 Input Data 에서 除外시켜서 Data의 量이 줄어들도록 할 필요가 있다. 骨組構造解析을 위해서 入力되어야 할 Input Data는 다음과 같다.

가. 構造物의 形狀, 斷面지수 및 材料의 性質
 節點의 番號(1, 2, 3, ..., i , ..., n)와 그 위치를 座標(X_i, Y_i, Z_i)로 入力시키고, 部材를 形成하는 節點의 番號와 함께 部材의 斷面積, 斷面 2 次모멘트, 彈性係數, 剪斷彈性係數, Poisson의 比 등을 入力시킨다.

나. 荷重條件

荷重의 種類와 그 位置 및 크기($F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z$)를 入力시킨다.

다. 境界條件

各節點의 變位($\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z$)의 拘束與否 또는 既知의 節點變位值를 入力시킨다.

그밖에 프로그램을 效果의으로 遂行하기 爲한 Control Data로서 프로그램 Routine의 選定, Output의 選定等에 關한 事項을 Input Data에 包含시킬 수 있다.

Input Data는 人爲的으로 作成하기 때문에 錯誤의 原因이 되기 쉬운데, 프로그램 自體가 이러한 錯誤를 可能한 限度內에서 가려낼 수 있도록 하는 것이 바람직하다. 그중 한가지 方法은 Data의 잘못을 使用者가 쉽게 알아낼 수 있도록 Error Message를 印刷하는 것이다. 또 人力된 構造物을 形狀을 Plotter나 Graphic Display를 利用하여 作圖할 수도 있으며, 이러한 Graphic System이 없을 경우에는 Fig. 6에서 보는바와같이 Line Printer에 의해 概略的인 形態를 Plot시키므로서 視覺的으로 Data를 點檢하게 할 수도 있다



Fig. 6. Shape of a structure plotted by a line printer.

3. 剛度行列의 結合과 壓縮

行列解法의 平衡方程式은 힘벡터와 剛度行列을 各 各 獨立的으로 結合하므로서 形成된다. 全體剛度行列은 部材剛度行列을 $\mathbb{I}-1$ 項에서 說明한 順序에 따라서 結合하므로서 形成된다. 이 過程은 프로그

램에서 가장 重要한 部分이라고 할 수 있으며 大部分의 演算時間이 여기에 所要된다. 또 프로그램의 所要記憶容量은 대체로 剛度行列의 크기에 依해서 決定된다. 그러므로 프로그래밍에서 一次的으로 考慮해야 할 問題는 剛度行列이 차지하는 記憶容量과 演算時間을 어떻게 줄이느냐 하는 것이다.

剛度行列은 有效數值가 主對角線 附近에 密集되어 있는 對稱帶狀行列(Symmetric Banded Matrix)이라는 特徵을 지니고 있다. 그러므로 $\mathbb{I}-1$ 項의 順序대로 剛度行列을 結合하여 原形 그대로 記憶시키는 것보다는 그 特徵을 利用하여 剛度行列의 必要한 部分만을 따서 壓縮된 形態로 記憶시키는 것이 効率的이다.

全體剛度行列은 Fig. 7에서와 같이 몇 段階에 걸쳐서 結合되고 壓縮된다고 생각할 수 있다. 먼저 部材剛度行列을 結合하여 (a)의 全體剛度行列이 形成되면 (b)에서와 같이 既知의 自由度에 該當되는 列과行을 除去하여 (c)의 縮少된 剛度行列을 얻게 된다. 그다음에 (c)의 上三角形중에서 有效數值 部分만을 따서 (d)와 같이 一次元的인 Array로 再配列하므로 所要의 記憶容量을 最少化할 수 있다.

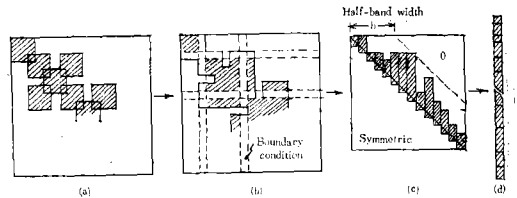


Fig. 7. Assemblage and compaction of the global stiffness matrix.

그런데 實際의 프로그램에서는 이와같이 段階的으로 剛度行列이 結合되고 壓縮되는 것이 아니며, 部材剛度行列이 (a), (b), (c)의 段階를 거치지 않고 直接 一次元的 Array의 全體剛度行列(d)로 結合된다. 그 過程은 다음과 같다.

- 1) 全體의 自由度중에서 未知의 變位에 對한 自由度를 計算한다.
- 2) 未知變位의 自由度에 該當되는 剛度行列의 有效數值의 個數를 計算한다.
- 3) 原形의 全體剛度行列 對角線要素가 一次元的 Array로 縮少된 全體剛度行列에서 차지할 位置를 計算한다.
- 4) 部材剛度行列의 各要素가 全體剛度行列에서 차지하는 位置를 計算하여 各要素의 값을 該當되는 位置에 더한다.

5) 이와같은 과정을 모든 部材에 對해서 되풀이 하면 壓縮된 形態의 全體剛度行列이 形成된다. 節點의 數, 또는 自由度가 增加하면, 이에 比例해서 剛度行列도 커지게된다. 그러므로 構造物이 複雜할 境遇에는 剛度行列이 아주 커져서 前述한 바와같이 壓縮시켜서 貯藏하더라도 컴퓨터의 主記憶

容量만으로는 不足하게 된다. 이러한 境遇에는 剛度行列을 여러개의 블록으로 나누어 디스크나 테이프등의 補助記憶裝置에 실었다가 必要한 段階에서 한 블록씩 읽어들여 計算을 遂行하도록 할 수도 있다.

剛度行列을 壓縮시킴에 따라 所要記憶容量이 節

Table-1. Storage required for full matrix vs. half-band matrix

Matrix Dimension	Memory Req- for Full Matrix	Half-band Width					
		4	8	12	16	19	39
20	420	110	164	202	224	230	—
40	1,640	230	364	482	584	650	860
60	3,660	350	564	762	944	1,070	1,680
80	6,480	470	764	1,042	1,304	1,490	2,500
100	10,100	590	964	1,322	1,664	1,910	3,320

減되는 效果는 Table-1에서 보는바와 같이 剛度行列이 클수록, 또 Half-band Width가 작을수록 顯著히 增大된다.

4. 平衡方程式의 解法

全體剛度行列과 힘벡터가 結合되면 平衡方程式이 完成된다. 未知의 變位벡터는 剛度行列의 逆行列 $[K]^{-1}$ 과 힘벡터 $\{P\}$ 의 積으로 Explicit하게 나타낼 수 있다.

$$\{d\} = [K]^{-1}\{P\}$$

그러나 $[K]$ 가 어느정도 커지면 $[K]^{-1}$ 을 구하는데 많은 時間이 所要되기 때문에 現實적으로 어려워지며, 더우기 $[K]$ 가 一次元的 Array로 壓縮된 境遇에는 이를 原形으로 還元시키지 않고서는 $[K]^{-1}$ 을 求할 수가 없다. 이와같이 $[K]$ 가 壓縮된 狀態에서 別途의 Working Storage가 없이 平衡方程式을 效果적으로 풀기 爲한 方法으로는 LDL^T Decomposition 방식과 Cholosky 解法이 있다. 이 두 方法은 모두 對稱行列을 上三角形과 下三角形으로 分解하여, 上三角形만으로 Operation 하기 때문에 一次元 Array로 配列된 剛度行列의 上三角形有効數值要素들이 차지하는 Memory Location만을 利用해서 平衡方程式을 풀 수가 있다. 그외에 Gauss-Seidel 이나 Jacobi Iteration 등과 같은 逐次代入法도 帶狀行列을 푸는데 適合한 方法이라고 할 수 있다.

構造物의 節點數에 比例해서 平衡方程式이 커지는데 이와 同時에 乘除算에서 果積되는 Truncation Error가 急增하여 計算結果에 상당한 影響을 줄 수 있다. 이러한 誤差를 줄이기 爲해서는 프로그램上

의 Real Variable들을 Double Precision으로 해야하고, 逐次代入法의 境遇라면 Iteration 回數를 增加시켜야 할 것이다. 그러나 이러한 것이 컴퓨터의 所要記憶容量 및 演算時間과 直接的인 關係가 있음을 有意해야 한다.

5. 應力과 反力의 計算

平衡方程式으로부터 節點變位 $\{d\}$ 가 求해지면 이를 局部座標系의 $\{\delta\}$ 로 轉換하여 原來의 部材平衡方程式(II-6項 11式)에 代入하므로써 各部材의 節點應力을 計算할 수 있다. 部材 中間의 應力이나 最大, 最少應力은 節點應力과 外力으로부터 誘導해 낼 수가 있다. 支持點反力은 그 支持點에서 만나는 모든 部材의 節點應力을 合하므로써 얻어진다. 이때 節點應力은 먼저 全體座標系로 轉換되어야 한다. 즉 i 支持點에서의 反力은

$$\{P\}_i = \sum_j [R]_{ij}^T \{d\}_j$$

支持點이 아닌 다른 節點에 對해서 $\{P\}_i$ 는 그 節點에 作用하는 外力의 合과 같게된다.

所要記憶容量을 줄이기 爲해서 部材剛度行列과 回轉行列은 全體剛度行列을 結合하기 以前에 一時的으로만 컴퓨터에 記憶된다. 그러므로 應力과 反力을 計算하는 段階에서 部材의 剛度行列과 回轉行列을 必要할 때마다 再生成하여야 한다.

IV. 結 論

骨組構造解析의 電算化를 爲해서는 行列解法에

依해 汎用프로그램을 開發하는 것이 바람직하다. 行列解法の 프로그램은 構造形態에 制限을 받지 않을 뿐만 아니라 溫度變化, 支持點沈下 등의 影響 등을 考慮할 수 있기 때문에 實際과 좀더 符合되는 構造解析이 可能하다. 그러나 特定構造物을 對象으로 하는 從來의 設計指向의인 프로그램에 比해서 一般의 所以 Input Data의 作成이 번거롭고, 計算結果의 解析이 複雜해지기 쉽다. 그러므로 Input Data의 作成樣式이 可及의 簡便하고 理解하기 쉬우며 量의 所以는 最少限이 되도록 해야함은 勿論, 計算結果의 Output을 必要에 따라서 流動性있게 調整, 또는 選定할 수 있도록 프로그램을 作成해야 한다.

行列解法の 프로그램化에서 가장 問題가 되는 것은 所要되는 컴퓨터 記憶容量과 演算時間인데, 剛度 行列을 壓縮된 形態로 記憶시키거나, 블록 單位로 補助記憶裝置에 收錄하므로써 이를 解決할 수 있을 것이다.

骨組構造物은 어떠한 形態이든 立體프레임의 單一 프로그램에 依해서 處理될 수 있지만 記憶容量과 演算時算의 浪費를 피하기 爲해서는 트리스, 平面 프레임, 그리드, 立體프레임의 네개의 範疇로 나누어 各各의 獨立된 프로그램을 開發하여 運用하는 것도 効果的이라고 생각된다. 또한 이들 프로그램은 連續體構造解析 등의 他 프로그램과 結合해서 使用될 수도 있을 것이다.

參 考 文 獻

1. Bathe, K.J. & Wilson, E.L., "Numerical Methods in Finite Element Analysis," Prentice-

Hall Inc., New Jersey, 1976.

2. Beaufait, F.W., Rowan, W.H., & Hoadley, P.G., "Computer Method of Structural Analysis," Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1970.
3. Coates, R.C., "Structural Analysis," Thomas Nelson and Sons Ltd., Nairobi Kenya, 1975.
4. Kardestuncer, H., "Elementary Matrix Analysis of Structures," McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., Japan, 1974.
5. Levy, S., "Computation of Influence Coefficients for Aircraft Structures with Discontinuity and Sweepback," J. Aeronautic Science, Vol. 14, No. 10, Oct. 1947.
6. Livesley, R.K., "Matrix Method of Structural Analysis," Pergamon Press, Oxford, 1964.
7. Martin, H.C., "Introduction to Matrix Methods of Structural Analysis," McGraw-Hill Book Company, New York, 1966.
8. Newmark, N.M., "Numerical Methods of Analysis in Engineering," Macmillan Co., New York, 1949.
9. Przemieniecki, J.S., "Theory of Matrix Structural Analysis," McGraw-Hill Book Co., New York, 1968.
10. Turner, M.J., Clough, R.W., Martin, H.C. & Topp, L.J., "Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures," J. Aeronautic Science, Vol. 23, No. 9, Sept. 1956.