線型計劃法의 分解原理에 관한 小考

(A Study on Decomposition Method for Linear Programs)

尹 在 坤*

Abstract

Today, L.P. model has often been used in solving economic and managemental phenomena.

But in case of adopting L.P. model in dealing with practical economic and managemental problems there is a possibility that we have difficulties in solving these problems because of greatness of model size, cost for collecting data, cost for adjusting matrix, and etc.

In this respect "Decomposition Algorithm for L.P." has been used in overcoming the difficulties above stated.

In this paper, therefore, I will try to introduce and them criticize Dantzig-Wolfe's "Decomposition Method" and Kornai - Liptak's "Two - Level Planning".

1. 緖 言

經濟經營의 問題를 해결하고자 할 때는 線型計劃모델을 많이 이용하여 最適解를 얻고 있다. 그런데 現實의 經濟經營問題를 線型計劃法에 適用하고자 할 때에 모델의 크기가 너무 크므로 data 의 蒐集費用 matrix 整備 또는 計算費用 등의 곤란성을 克服할 方法은 많이 發表되어 있다. 예를 들면 postoptimality problem 에서는 price vector 의 변경이나 requirement vector 를 변경시키거나 또는 變數나 constraints 를 첨가시킴으로써 과거의 資料를 가지고 現實에서 변경된 부분만을 간단히 수정할 수 있는 方法 정도까지 開發되어 있다.

그러나 本稿에서는 여러 學者들의 理論을 중심으로 分解의 原理와 그 方法을 소개하고자 한다. 分解原理란 特殊한 構造의 大規模프로그램을 작은 問題로 分解함으로써 全體의 最適解를 能率的으로 구하는 方法이다. 그 方法은 非線型計劃法은 除外하고 線型計劃에 한하여 생각한다. 물론 그 解決方法의 數는 무수히 많다. 그러나 解를 能率的으로 求하는 것 뿐만 아니라 經濟經營의 意思決定問題도 考慮하는 分解原理에 관하여 言及하고자 한다. 本稿에서 생각하는 分解原理는 다음과 같은 經營學的 狀況을 想定한다. 企業은 本部와 個個를 가진 各 事業部로 分解된다. 本部는 共通目標에 대한 貢獻의 관점에서 各 事業部를 통괄한다. 그러므로 各 事業部는 本部의 制約範圍內에서 意思決定이 認定된다. 그러면 分解原理의 諸方法을 槪觀함에 있어서 하나의 分解基準을 定해 두면 그것은 本部에서 各 事業部 또는 各事業部에서 本部로 各各 어떠한 情報가 傳達되는가에 의하여 分類된다. 그 하나는 價格 數量分解原理이라 하며, 즉 本部에서 各 事業部에는 價格이 傳達되며 各 事業部에서 本部에는 數量이 傳達된다. 또 다른 하나는 數量 價格分解原理라 하며 本部에서各 事業部에는 數量이 各 事業部에서 本部에는 價格이 傳達된다. 이에 本稿에서는 上述한 基準에 의해서 分類된 分解原理에 대한 槪觀과 약간의 comment 를 줄 수 있는 目的으로 처음 價格 數量分解原理로서 2.1 에 의하여 G. B Dantzig and P. Wolfe의 分解 algorithm 을 소개하고 다음에 數量 價格分解原理로서 2.2 에 의하여 J. Kornai and Th. Liptak에 2階層 Planning 에 대한 言及을 하고자 한다.

* 嶺南工業專門大學工業經營科 專任講師

2. 線型計劃法의 分解原理

2·1 價格 數量型分解原理

1) Dantzig - Wolfe의 分解 algorithm

Dantzig - Wolfe의 解法은 다음과 같이 주어져 있다.

(原問題)

$$\boxed{\begin{array}{l}\sum_{j=1}^{n} A_j x_j = b \\ x_j \geq 0 \ (j=1,2\cdots\cdots n)\end{array}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1.1)$$

$$B_j\, x_j = b_j \quad (j = 1.2 \cdots\cdots n) \qquad \cdots\cdots\cdots (1.2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} {}^tC_j\, x_j \; ; \; max \qquad \cdots\cdots\cdots (1.3)$$

단) A_j는 $m_j \times n_j$ 行列

B_j는 $m_j \times n_j$ 行列

b 는 m 次列 Vector

b_j는 m_j 次列 Vector

C_j는 n_j 次列 Vector

x_j 는 n_j 次列 Vector

${}^tC_j$ 는 C_j 의 轉置(transpose)이다.

集合 $S_j(j = 1.2 \cdots\cdots n)$를 定義하면 $S_j = \{ x_j | x_j \geqq 0 \;\; B_j\, x_j = b_j \}$ 그런데 $S_j = (j = 1,2 \cdots\cdots n)$은 有界라 限定은 하지 않으나 本稿에서 有界라하면 그때의 集合 $S_j\,(j = 1,2 \cdots\cdots n)$는 볼록 多面體이므로 S_j 의 端點의 集合은 $[S_j] = \{ x_{j1} \; x_{j2} \; x_{jk(j)} \}$ $(j = 1,2 \cdots\cdots n)$라 하면 $S_i = [S_j]$ 이며 $[S_j]$는 S_j의 凸을 포함함을 意味한다. 이에 任意의 $x_j \in S_j$ 에 의하여는

$$\begin{aligned} & x_j = \sum_k S_{jk}\, x_{jk} \;,\; S_{jk} \geqq 0 \\ & \sum_k S_k = 1 \\ & x_{jk} \in S_j \quad (j = 1,\, 2 \cdots\cdots n) \end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdots (1.4)$$

이다.

$$\begin{aligned} & a_{jk} = A_j\, x_{jk} \;\; (j = 1,\, 2 \cdots\cdots n) \\ & k \;=\; 1,\, 2 \cdots\cdots k(j) \\ & C_{jk} = {}^tC_j\, x_{jk} \end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdots (1.5)$$

따라서 原問題 (1.1)～(1.3)은 (1.4)와 (1.5)에 의하여 다음과 같이 本部 프로그램이 變形된다. 本部 프로그램은

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{k(j)} S_{jk}\, a_{jk} = b \\ & S_{jk} \geqq 0 \; \{ j = 1.2 \cdots\cdots n \;\; k = 1.2 \cdots\cdots k(j) \end{aligned} \qquad (1.6)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{k(j)} S_{jk} = 1 \quad (j = 1.2 \cdots\cdots n) \qquad (1.7)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{k(j)} S_{jk}\, C_{jk} \; ; \; max \qquad (1.8)$$

그러면 本部 프로그램(1,6) ～ (1.8)을 作成함에 있어서 생각되는 바는 먼저 $(S_j)(j = 1.2 \cdots n)$를 求하는 것은 결코 能率的이라 할 수 없다. 그러므로 以下에서 說明하는 事業部 프로그램을 提出한다. 本部 프로그램(1.6) ～ (1.8)에 있어서 實行可能解를 얻을 수 있다고 할 때 本部는 이 實行可能解의 對應한 雙對變數의 Vector $({}^t\pi : {}^t\rho)$를 計算한다. 단, $\pi = {}^t(\pi_1, \pi_2 \cdots\cdots \pi_n)$ $\rho = {}^t(\rho_1, \rho_2 \cdots\cdots \rho_n)$은 각각 (1.6) 그리고 (1.7)에 對應한 雙對變數의 Vector이다.

各 事業部는 이 Vector$({}^t\pi : {}^t\rho)$를 基本으로 해서 다음 프로그램을 푼다. 事業部 프로그램 ;

$$B_j\, x_j = b_j \quad x_j \geqq 0 \qquad (1.9)$$

$$({}^tC_j - {}^t\pi\, A_j)\, x_j \; ; \; max \;\; (j = 1.2 \cdots\cdots n) \qquad (1.10)$$

各 事業部는 이 問題에서 얻어진 最適産出量 Vector $x_j\;(j = 1.2 \cdots\cdots n)$을 本部에 報告한다. 本部는 이 $x_j\;(j \doteq 1.2 \cdots\cdots n)$을 基準으로 해서 $\delta = ({}^tC_{j*} - {}^t\pi A_{j*})\, x_{j*} - \rho_{j*} = max$

$$j \left[\left\{ \begin{aligned} & max({}^tC_j - {}^t\pi\, A_j)\, x_j \\ & B_j\, x_j = b_j \\ & x_j \geqq 0 \end{aligned} \right\} \right]$$

을 計算하고 本部 프로그램 (1.6) ～ (1.8)의 最適性을 判定한다.

$\delta > 0$ 되면 最適性은 만족되지 못한다. 本部 프로그램의 基底에 ${}^t[(A_{j*}\, x_{j*})\,;\, 0 \cdots 01 \cdots 0 \cdots 0 \,;\, {}^tC_{j*}\, x_{j*}]$ 을 넣어 새로운 價格 Vector $({}^t\pi : {}^t\rho)$을 計算한다. 한편 $\delta \leq 0$ 되면 最適解가 얻은 것으로 된다. 이렇게 해서 $\{ S_{jk} \}$는 本部 프로그램의 最適解를 가져다 준다. 그래서 原問題의 最適解는

$$x_j = \sum_k S_{jk}\, x_{jk},\; S_{jk} \geqq 0 \;\; \sum_k S_{jk} = 1 (j = 1.2 \cdots n)$$

로 구해진다. 그런데 W. J. Baumol and T. Fabian는 이와 같은 Dantzig-Wolfe 의 解法에 대해서 各 事業部는 그 自身의 힘에 의해 産出量 Vector의 비중 $S_{jk}\,(j = 1.2 \cdots\cdots n \,:\, k = 1.2 \cdots\cdots k(j))$를 항상은 찾아낼 수 없다고 論하고 그 1例로써 다음과 같은 것을 지적했다. 이를테면 共通資源의 供給이 충분하지 않을 때는 企業全體에 있어서의 最適解는 事業部의 實行可能領域의 內點을 가져다 준다. 따라서 事業部의 實行可能領域의 境界點을 주지 않는다는 意味로써 企業全體에 있어서의 最適解는 事業部의 最適解가 아닌 것을 指摘했다. 그러나 P. Maiti and R. Sengupta는 이 指摘에 대해서 批判的 見解를 提出했다. 즉, 그들은 우선 企業全體에 있어 最適解는 事業部의 最適解이라고 하는 定理를 說明했다. 따라서 그것을 基本으로해 企業全體에 있어서의 最適解는 事業部의 實行可能領域의 內點에는 이루어질 수 없다는 結論이었다. 그런데 Baumol-Fabian은 Maiti, Sengupta 와 같은 結論은 항상 정당하다고는 볼 수 없다는 것을 數値例로서 明白히 하였다.

2・2 數量 價格型分解原理

1) Kornai － Liptak의 2階層 Planning

Kornai － Liptak 의 model 은 다음과 같이 展開된다.

原問題

$$\begin{aligned} & Ax \leq b \\ & x \geqq 0 \end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.1)$$

$${}^tCx \; : \; max \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.2)$$

단, A는 M×N 行列
b는 M次列 Vector
C는 N次列 Vector
x는 N次列 Vector 이다.

우선 行列A Vector C 그리고 x를

$$\begin{bmatrix} {}^t x \\ A \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^t x_1 & {}^t x_2 & \cdots\cdots & {}^t x_j & \cdots\cdots & {}^t x_n \\ A_1 & A_2 & \cdots\cdots & A_j & \cdots\cdots & A_n \\ {}^t C_1 & {}^t C_2 & \cdots\cdots & {}^t C_j & \cdots\cdots & {}^t C_n \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

이와 같이 分解해서 原問題 (2.1)～(2.2)를 다음과 같이 바꾸어 쓸 수 있다.

$$\sum_{j=1}^{n} A_j \; x_j \leq b \qquad x_j \geq 0 \; (j=1.2\cdots\cdots n) \tag{2.4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} {}^t C_j \; x_j \; : \; max \tag{2.5}$$

단, A_j 는 M×n_j 行列
C_j 는 n_j 次列 Vector
x_j 는 n_j 次列 Vector 이다.

다음 (2.3)에 대응해서 本部는 各 事業部의 Vector b를 分割配分한다.

즉, $\sum_{j=1}^{n} d_j = b$ 단, d_j 는 M次列 Vector이다.

各 事業部는 이와 같이 配分된 Vector d_j 에 基本을 두고 다음 프로그램을 作成한다.

$A_j \; x_j \leq d_j$
$x_j \geq 0$
${}^t C_j \; x_j \; : \; max \; (j=1.2\cdots\cdots n)$

그래서 事業部 프로그램으로써 이 問題의 雙對를 사용한다.

事業部 프로그램 ;

$${}^t\pi_j \; A_j \geq {}^t C_j \qquad \pi_j \geq 0 \tag{2.6}$$

$${}^t\pi_j \; d_j \; ; \; min \; (j=1.2\cdots\cdots n) \tag{2.7}$$

단, π_j 는 M次列 Vector이다.

그런데 論述을 進行함에 있어서 다음과 같은 假定을 한다.

$$X = \{x/Ax \leq b \;\; x \geq 0\} \neq \phi \tag{2.8}$$

이라면

$$X^* = \{x^*/x^* \in X \; {}^t Cx = \max_{x \in X} {}^t Cx\} \neq \phi \tag{2.9}$$

그러므로

$$X_j(d_j) = \{x_j / A_j x_j \leq d_j \;\; x_j \geq 0\} \neq \phi \tag{2.10}$$

항상

$$\Pi_j = \{\pi_j / {}^t\pi_j A_j \geq {}^t C_j \;\; \pi_j \geq 0\} \neq \phi \quad (j=1.2\cdots\cdots n) \tag{2.11}$$

새로이 다음의 2點을 定義한다.

$$D = \left\{ \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} \Big/ \sum_{j=1}^{n} d_j = b, \; {}^t\pi_j \; d_j \geq \min_{\pi_j} \max_{x_j} {}^t\pi_j \; A_j \; x_j, \; x_j \in X_j(d_j), \; \pi_j \in \Pi_j, \; j=1.2\cdots n \right\} \tag{2.12}$$

그리고

$$X(d) = X_1(d_1) \times \cdots\cdots \times X_n (d_n) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \Big/ x_j \in X_j(d_j), \; j=1.2\cdots n \right\} \tag{2.13}$$

으로 하면 (2.8)～(2.13)의 假定 그리고 定義로부터 $X = \bigcup_{d \in D} X(d)$가 성립한다. 그런데 任意의 $d = {}^t({}^t d_1 \cdots\cdots {}^t d_n) \in D$ 대하여서

$$\varphi_j(d_j) = \max_{x_j \in X_j(d_j)} {}^t c_j \; x_j = \min_{\pi_j \in \Pi_j} {}^t\pi_j \; d_j \quad (j=1,2\cdots n) \tag{2.14}$$

으로 표현되고

$$\varphi(d) = \sum_{j=1}^{n} T_j(d_j) \tag{2.15}$$

로 한다. 그때 다음 定理가 成立 된다.

〔Thm〕 $X = \bigcup_{d \in D} X(d)$

이라면

$$\max_{d \in D} \varphi(d) = \varphi(d^*) = \max_{x \in X} {}^t cx$$

이다. 여기서

$$p = \pi_1 \times \cdots\cdots \times \pi_n = \left\{ p = \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \vdots \\ \pi_n \end{bmatrix} \Big/ \pi_j \in \Pi_j \; j=1.2\cdots n \right\}$$

라 定義한다.

그때 (2.15)는 (2.14)로부터 다음과 같이 된다.

$$\varphi(d) = \min_{p \in P} {}^t pd \tag{2.16}$$

그래서 (2.16)과 定理에서 原問題(2.1)～(2.2)의 최적치는 다음과 같이 되어질 수 있다.

$$\Phi = \max_{d \in D} \min_{p \in P} {}^t pd = {}^t p^* d^* \tag{2.17}$$

그런데 Kornai－Liptak는 (2.17)을 한 개의 Game으로 본다. Game 解法으로서는 G.W.Brown and J.Robinson 의 模擬遊戱法을 利用한다. 즉

本部 프로그램 $\sum_{j=1}^{n} d_j = b$, ${}^t\pi_j d_j \geqq \min_{\pi j} \max_{xj} {}^t\pi_j A_j$ x_j , $x_j \in X_j$ (d_j), $\pi_j \in \Pi_j$ $(j = 1, 2, \cdots\cdots n)$

$\sum_{j=1}^{n} {}^t\pi_j d_j \; max$ 에는 ${}^tpd^*(p) = \max_{d \in D} {}^tpd$ 를 대응시킨다. 한편 事業部 프로그램 $d \in D$ (2.6) ~ (2.7) 에는 ${}^tp^*(d)\; d = \min_{p \in P} {}^tpd$ 를 대응시킨다. 그래서 실제의 解法순서는 以下의 逐次解法에 의한다. 逐次解法.

$(M \times n)$ 次列 Vector 와 $(M \times n)$ 次列 Vector p 는 각각 다음 規則에 따르는 $(M \times n)$ 次列 Vector의 系列 $d\{1\}$ $d\{2\} \cdots$ $d\{T\} \cdots$ 와 $(M \times n)$ 次列 Vector $P\{1\} P\{2\} \cdots$ $P\{T\} \cdots$ 로부터 構成된다.

段階 1

Step Ⅰ 任意의 $d \in D$을 선택함.

Step Ⅱ $d\{1\} = d$ 라 둔다.

Step Ⅲ $p^*(1) = \min_{p \in P} p\ (d\{1\})$ 을 구한다.

Step Ⅳ $p\{1\} = p^*(1)$ 으로 둔다.

段階 T $(T = 2, 3 \cdots\cdots\cdots)$

Step Ⅰ $d^*(T) = \max_{d \in D} d\ (P\{T-1\})$ 을 구한다.

Step Ⅱ $d\{T\} = [(T-1)/T] d\{T-1\} + [1/T] d^*(T)$ 을 計算한다.

Step Ⅲ $p^*(T) = \min_{p \in P} p\ (d\{T\})$ 을 구한다.

Step Ⅳ $p\{T\} = [(T-1)/T] p\{T-1\} + \{1/T\} p^*(T)$ 을 計算한다.

이 逐次解法은 一般的으로 Brown - Robinson 의 模擬遊戱法의 利用이라고 생각되어지고 있다. 그러나 鈴木康彦은 解의 系列 $d\{T\}$ 그리고 $p\{T\}$는 Brown - Robinson 의 解의 系列과는 各 段證에 있어서 最適解를 求하는 方法이 다르다는 것을 주장하고 있다. 즉 Brown - Robinson 의 解의 系列은 以下와 같이 주어져 있다. 利益行列 A는 $m \times n$ 行列이라고 한다. 우선 U_i (or V_j) 를 第(i or j) 成分이 1로서 他의 成分이 0인 m次 (or n次) Vector 로 한다. 그때 m次列 Vector $x(T)$ 그리고 n次列 Vector $y(T)$ 의 系列은 각각 다음과 같이 構成된다.

(1) $x(0)$ 그리고 $y(0)$ 는 각각 R^m 과 R^n 에 있어 0 Vector 이다.

(2) $x(T) = x(T-1) + U_i$

단, i 는 $A_y(T-1)$의 最大成分의 番號이다.

(3) $y(T) = y(T-1) + V_j$

단, j 는 ${}^tx(T)A$ 의 最大成分의 番號이다.

上述에 의하여 Brown - Robinson 의 解의 決定方法 (2), (3) 과 Kornai - Liptak의 段階 T $(T = 2, 3 \cdots)$ 에 있어서 解의 決定方法 Step Ⅰ, Ⅱ 그리고 Step Ⅲ, Ⅳ와는 最大・最小의 決定方法이 다르다. Kornai - Liptak 의 解系列의 수렴성을 保證하기 위하여는 Kornai - Liptak와 같이 Brown - Robinson 의 定理에 의한다는 것은 불충분하다. 새로히 Kornai - Liptak의 解의 系列自身이 수렴성을 證明하지 않으면 안된다고 주장하는 학설이다.

3. 結 言

지금까지 本稿에서는 線型計劃法의 分解原理에 관하여 두 가지 類型을 생각해 보았다. 그 하나는 價格數量型分解原理로써 Dantzig - Wolfe 의 解法과 그에 관한 批判 그리고 다른 하나는 數量 價格型分解原理로서 Kornai - Liptak 의 2階層 planning을 들고 그에 관한 비판으로서 鈴木康彦의 見解를 보았다. 그러나 價格 數量型分解原理로서 Blase 實行不可能價格法과 數量 價格型分解原理로서 Ten - Kate 의 直接資源配分法 정도라도 더 소개하였으면 좀더 分解原理에 관하여 理解가 더 잘 될 수 있지 않을까 생각되어 다음 기회에 이 分野에 관하여 더욱더 研究를 하여 소개하고자 한다.

參 考 文 獻

1) G. B. Dantzig, and P. Wolfe, " Decomposition Principle for Linear Programs ", *Operations Research*, *8·1* (1960), 101 ~ 111.

2) F. S. Hillier and Q. J. Lieberman, *Operations Research*, Holden - Day, San Francisco.

3) Kornai. J. and Th. Liptak, *Two - Level Planning Econometrica*, *33·1* (1965).

4) S. R. Searle, and W. H. Hausman, *Matrix Algebra for Business and Economics*, New York : Wiley.

5) 鈴本康彦, 線型計劃法にをけるいくつかの分解原理について, 日本オペレヨツーンスリサーチ學會, 1976. Vol. 21. No. 12.