

直四角形 密閉空間內 自然對流 熱傳達의 數值解析

閔 滿 基 *

Abstracts

To analyze two dimensional incompressible laminar natural convection in a rectangular enclosure heated from below and cooled by a horizontal ceiling and two vertical walls, the primitive Navier-Stokes equations and the energy equation were solved numerically in time dependent form by a marker and cell method. A successive over-relaxation method for the elliptic portion of the problem and an explicit method for the parabolic portion were applied for the range of Grashoff number of 5×10^3 to 5×10^4 to get the transient and steady state dimensionless temperature and velocity profiles.

For the range of aspect ratio $L/H \leq 2.4$ in which only a pair of convection rolls exists mean Nusselt number calculated are as follows :

$$\bar{N}_{Nu} = 0.89 N_{Gr}^{0.2} (H/L)^{0.45}$$

By path lines drawn by marker particle trajectories roll number of cellular motion were observed for various aspect ratio of the enclosure.

記 號

英文字

C_p : 比 熱

g : 重力의 加速度

G : 無次元 重力의 加速度, $=gH^3/\nu^2$

h : 局所 熱傳達 係數

H : 密閉空間의 높이

k : 流體의 熱傳導率

K : 熱擴散係數, $=k/\rho_0 C_p$

L : 密閉空間의 길이

M : X 方向의 格子數

N : Y 方向의 格子數

P : 壓 力

p_0 : 初期壓力

P : 無次元壓力, $= \frac{p + \rho_0 g y}{\rho_0 (\nu/H)^2}$

Q : 熱傳達量

t : 時 間

T : 無次元 溫度, $= \frac{\theta - \theta_0}{\theta_2 - \theta_1}$

u : x 方向의 速度

U : X 方向의 無次元速度, $=uH/\nu$

v : y 方向의 速度

V : Y 方向의 無次元速度, $=vH/\nu$

x : 水平方向 座標

X : 無次元 水平方向 座標, $=x/H$

$X \ell$: 密閉空間 길이의 1/2, $=L/2$

* 高麗大學校 大學院 機械工學科

1. 諸 論

密閉空間內的 自然對流에 對한 研究^{1)~29)}는 이에 對한 理論的 및 實驗的 研究結果가 適用되는 여러 分野에서 그 重要性이 認識되고 있다. 容器內에 담긴 液體의 加熱, 海水의 對流問題, 두 수직 평판 사이의 空間內的 自然對流, 그리고 室內의 自然對流等 適用되는 應用面이 許多하다.

密閉空間內的 自然對流에 研究로는 첫째 理論的인 研究로서 流體運動의 基本方程式에 對한 解析解^{1)~6)}를 求하는 方法과 數値解析에 依하여 數値解^{3)~9)}를 求하는 方法等이 있고, 둘째로 模型에 依한 實測實驗^{26)~29)}과 可視化 實驗에 依한 研究方法等이 있다. 特히 바다으로부터 放熱을 하는 密閉空間內에서의 自然對流에 對한 研究^{1)~6)}는 많이 있지만 이 中에서 流體力學的인 安定性에 焦點을 둔 研究로서는 이미 1900年에 Bénard가 實驗的인 研究를 한 바 있고 1961年에 Lord Rayleigh는 이 Bénard Flow를 理論的으로 처음 研究하였고 그 以來 1928年에 H. Jeffreys가, 그리고 1929年에 A. R. Low等이 研究의 幅을 넓히고 Lord Rayleigh의 研究를 뒷받침하였다. 이들의 研究는 對流의 形狀에 對한 解析과 自然對流의 發端基準의 決定等으로 나뉘어 진다.

1965年에 Fromm¹²⁾이 數値的 方法으로 對流現象을 解析한 것을 비롯하여 多數^{13)~15)},

^{22)~25)}의 論文들을 볼 수 있다.

本 論文에서는 直四角形 密閉空間內的 自然對流現象을 Grashoff 數 $5 \times 10^3 \sim 5 \times 10^4$ 範圍의 層流에 對하여 Marker and Cell (MAC Method)法에 依하여 數値的으로 非定常解를 거쳐서 定常解를 求하고 熱傳達特性, 速度 및 溫度의 分布等を 無次元變數로 나타내며 標識 粒子(marker particle)가 그리는 經路線(path line)에 依하여 이 流動現象을 觀察한다.

2. 基本方程式

Fig. 1에서 四角形의 二次元 密閉空間은 처음 어느 基準溫度 θ_0 에서 熱的 平衡狀態를 維持하며 空間內 流體는 靜止狀態에 있다. 이때, 密閉空間에서의 自然對流는 流動速度 및 溫度 分布가 中央의 垂直軸에 對하여 對稱이 되므로 Fig. 1과 같이 그 對稱軸을 右側邊으로 하는 가로 $L/2$, 세로 H 인 空間에 對하여서만 考慮한다. $t = 0$ 인 時刻에 순간적으로 바닥 平面은 溫度가 $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_0$ 만큼 上昇하여 θ_2 가 되고 左側의 垂直面과 윗平面은 같은 溫度次 $\Delta\theta = \theta_0 - \theta_1$ 만큼 減小하여 θ_1 이 된다. 計算空間의 時間에 따르는 一連의 計算過程에 있어서 境界面은 이와 같은 溫度條件으로 一定하게 維持되는 等溫의 境界面을 維持한다.

한편, 流動에 對한 境界條件은 右邊을 除外한 세邊에 對하여서는 슬립이 없는 壁의 Dir-

- y : 垂直方向 座標
- Y : 無次元 垂直方向 座標
- Z : 壓力의 포아손方程式의 非齊次項 無次元 變數
- N_{Gr} : Grashoff 數, $= g\beta(\theta_2 - \theta_1)H^3/\nu^2$
- N_{Nu} : Nusselt 數, $= hH/k$
- \bar{N}_{Nu} : 平均 Nusselt 數, $= QH/Lk(\theta_2 - \theta_1)$
- N_{Pr} : Prandtl 數, $= \mu C_p/k$
- N_{Ra} : Rayleigh 數, $= N_{Gr} \cdot N_{Pr}$

- 회랍文字
- β : 熱膨脹體積係數
- ΔX : X 方向의 格子길이
- ΔY : Y 方向의 格子길이
- $\Delta \tau$: 無次元時間 間隔
- ∇^2 : 演算子, 無次元, $= \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2}$
- θ : 溫 度
- θ_0 : 初期溫度
- θ_1 : 低溫平面(두개의 垂直平面과 上部平面)의 溫度

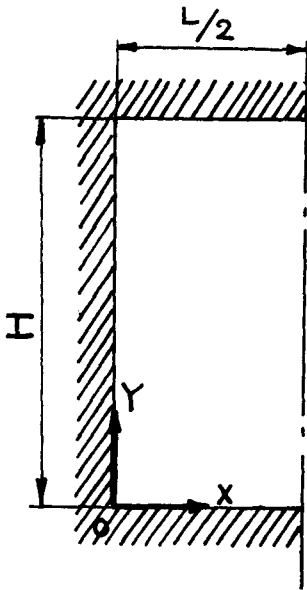


Fig. 1. Two-dimensional rectangular enclosure domain for calculation.

ichlet 形 境界條件이고 右邊에 있어서는 이를 對稱軸으로한 溫度, 速度 및 壓力의 對稱條件으로서 모두 Neumann 形 境界條件이다.

이와 같은, 等溫의 境界條件下에서 計算領域內의 速度와 溫度分布를 流動이 定常狀態에 이를 때까지 時間의 函數로 나타내는 二次元 自然對流의 定常解를 數值의 方法으로 얻을 수 있다. 이처럼 해서 얻은 定常溫度 및 速度分布로부터 1. 工學의 設計에 有用한 密閉空間內에서의 熱傳達特性 2. 計算領域內 運動에 너지의 空間 平均值의 時間에 따르는 變動特性 그리고 3. 標識粒子的 流動經路를 나타내는 經路線

에 依하여 密閉空間內의 流動을 觀察할 수 있고 密閉空間內에서 惹起될 수 있는 Bénard 유동에 對한 考察을 할 수 있다.

自然對流을 支配하는 基本方程式은 連續方程式, 運動方程式 및 에너지方程式이다. 이러한 基本方程式과 더불어 初期條件 및 境界條件을 設定하여 解를 求할 수 있다. 密閉空間內의 自然對流에 있어서는 流體의 壓縮性을 無視할 수 있어 流體는 非壓縮性으로 본다. 卽 加熱에 依하여 密閉空間內의 密度變化를 가져오고 이 密度變化에 依하여 發生되는 熱對流에 있어서는 흔히 Boussinesq의 近似를 適用한다. 卽, 基本方程式에 있어서 密度는 모두 一定하다고 본다. 다만, 浮力의 發生은 自然對流을 일으키므로 基本方程式에 있어서 浮力에 관한 限 流體密度는 아래의 式과 같이 溫度에 따라 變한다고 본다.

$$\rho - \rho_0 = -\rho_0 \beta (\theta - \theta_0) \quad (1)$$

이러한 Boussinesq의 近似의 妥當性은 S. Ostrach³⁰⁾ 등에서 볼 수 있다.

完全히 密閉된 領域內에서 發生되는 自然對流의 循環 流動은 Grashoff 數, Prandtl 數, 그리고 空間의 가로세로比等에 따라 그 流動現象이 寸配된다³¹⁾

本 論文에서는 空氣의 Prandtl 數를 0.73 으로 一定하게 두고 非壓縮性의 Newton 流體에 對한 二次元 層流 流動으로 限定한다.

基本方程式에 있어서 粘性係數, 熱傳導率 및 比熱等의 流體의 性質은 모두 一定하다고 假定한다.

- θ_2 : 高溫平面(下部平面)의 溫度
- μ : 絕對粘性係數
- ν : 運動粘性係數
- η & ξ : 加速項 및 粘性項만을 包含하는 變數
- ρ : 密 度
- ρ_0 : 初期密度
- τ : 無次元溫度, $= t \cdot \nu / H^2$
- ω : 加速係數

下記添字

i, j : cell 中心 및 cell 境界에 있는 格子點을 나타내는 X 및 Y 方向의 指數

0 : 基準狀態

上記添字

' : 假想 cell 內 變數를 나타내는 添字

n : n 番째의 時間을 나타내는 添字

密閉空間의 計算領域에서 直交座標系를 Fig. 1 과 같이 잡으면 二次元 密閉空間內의 自然對流을 支配하는 基本方程式들은 다음과 같이 表示된다.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u \quad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} - g + g\beta(\theta - \theta_0) + \nu \nabla^2 v \quad (4)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = K \nabla^2 \theta \quad (5)$$

이때, 初期條件은 假想領域에서와 流動領域에서 速度 u 및 v 가 모두 0 이고 溫度는 初期溫度 θ_0 그리고 壓力은 任意常數 p_0 로 잡는다.

$t > 0$ 인 境界條件은 右側의 中央線에서

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \text{ 이고 } u=0 \text{ 이 되며 其他}$$

의 境界에서는 $u=v=0$ 이 된다. 壓力은 水平境界面에서 $\frac{\partial p}{\partial y} = \mu \nabla^2 v$ 이며 左側의 垂直境界面에서 $\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \nabla^2 u$ 가 된다. 溫度에 있어서는 밑의 水平境界面에서 $\theta = \theta_2$ 이고 위의 水平境界面과 左側의 垂直境界面에서는 $\theta = \theta_1$ 이다.

壓力 p 의 Neumann形 境界條件 $\frac{\partial p}{\partial x}$ 및 $\frac{\partial p}{\partial y}$ 는 (3)式으로부터 各己 얻을 수 있다. 이때 重力의 項과 浮力의 項은 常數가 되므로 Neumann形 境界條件에서는 削除하여도 無妨하다.

이상의 基本方程式들과 初期 및 境界條件을 無次元化한다.

먼저 無次元 變數들을 다음과 같이 定義한다.

$$U = u \cdot H / \nu$$

$$V = v \cdot H / \nu$$

$$X = x / H$$

$$Y = y / H$$

$$\tau = t \cdot \nu / H^2$$

$$T = (\theta - \theta_0) / (\theta_2 - \theta_1)$$

$$G = gH^3 / \nu^2$$

$$N_{Gr} = g\beta(\theta_2 - \theta_1)H^3 / \nu^2$$

$$N_{Pr} = \mu C_p / k$$

$$p = \frac{p + \rho_0 g y}{\rho_0 (\nu / H)^2}$$

以上과 같은 無次元 變數로 基本方程式을 無次元化하면

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \nabla^2 U \quad (7)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + N_{Gr} T + \nabla^2 V \quad (8)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + U \frac{\partial T}{\partial X} + V \frac{\partial T}{\partial Y} = \frac{1}{N_{Pr}} \nabla^2 T \quad (9)$$

한편 無次元變數로 表示한 初期 및 境界條件들은

1. 初期條件 $\tau = 0$

$0 \leq X \leq X\ell$ 및 $0 \leq Y \leq 1$ 에서

$$U = 0$$

$$V = 0$$

$$p = 300$$

$$T = 0$$

여기서 p 의 값 300 은 任意로 取한 값이다.

2. 境界條件 $\tau > 0$

(1) $X = 0$ 및 $0 \leq Y \leq 1$ 에서

$$U = 0$$

$$V = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial X} = \nabla^2 U$$

$$T = -0.5$$

(2) $X = X\ell$ 및 $0 \leq Y \leq 1$ 에서

$$U = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial X} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial X} = 0$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} = 0$$

(3) $Y = 0$ 및 $0 \leq X \leq X\ell$ 에서

$$U = 0$$

$$V = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial Y} = \nabla^2 V$$

$$T = 0.5$$

(4) $Y = 1$ 및 $0 \leq X \leq X\ell$ 에서

$$U = 0$$

$$V = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial Y} = \nabla^2 V$$

$$T = -0.5$$

여기서 $X\ell$ 의 값으로서 0.5, 1.0 및 2.5 인 3
경우(가로세로 비로는 1, 2 및 5)에 대하여 計
算을 하였다.

3. 數值解析

3-1 有限差分方程式

MAC法³²⁾에서 사용되는 格子의 構造를 Fig.
2에서 보여준다.

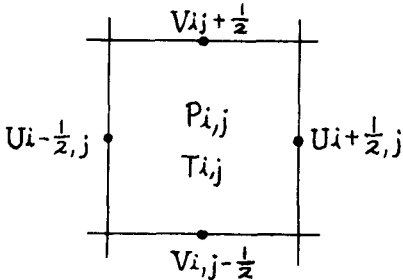


Fig. 2 Variable value placement in a cell of MAC method; pressure and temperatures are defined at cell boundaries.

壓力과 溫度는 cell의 中央에서 定義되고 指
數(i, j)로 表示된다. 速度U는 cell의 左右境
界에서 定義되고 指數는 $(i \pm \frac{1}{2}, j)$ 로 表示되
며 速度V는 cell의 上下境界에서 定義되고 指
數는 $(i, j \pm \frac{1}{2})$ 로 表示된다. Fig. 3 및 Fig.
4에 보여주는 바와 같이 計算領域의 境界는
cell의 境界와 一致시킨다. 基本方程式에 適用
될 差分 scheme은 forward-time, centered-
space (FTCS)의 scheme을 取한다.

(6)式을 有限差分形으로 表示하면

$$\frac{U_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - U_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1}}{\Delta X} + \frac{V_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - V_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1}}{\Delta Y} = 0$$

..... (10)

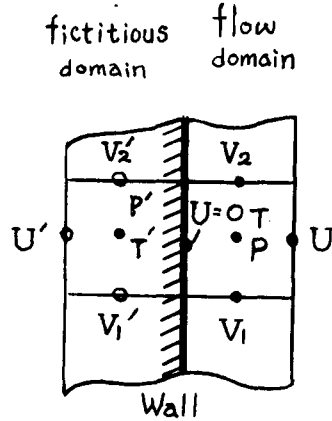


Fig. 3 Field variables near a wall. ' refers to the variables in fictitious cell and 0 to fictitious grid.

(7), (8)式에서 $U_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}$, $V_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1}$, $U_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1}$
및 $V_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1}$ 을 求한다.^{35), 42)} 여기서 上記添字
n은 time step이고 n+1은 그로부터 $\Delta\tau$ 後
의 time step이다.

이들을 위의 (10)式에 代入하여 다음과 같이
壓力에 關한 Poisson方程式을 얻는다.

$$\frac{P_{i+1,j}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i-1,j}^n}{(\Delta X)^2} + \frac{P_{i,j+1}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i,j-1}^n}{(\Delta Y)^2} = Z_{i,j}^n \dots \dots \dots (11)$$

여기서

$$Z_{i,j}^n = \frac{1}{\Delta\tau} \left(\frac{\xi_{i+\frac{1}{2},j}^n - \xi_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\Delta X} + \frac{\eta_{i,j+\frac{1}{2}}^n - \eta_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta Y} \right) + N_{Gr} \left(\frac{T_{i,j+\frac{1}{2}}^n - T_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta Y} \right) \dots \dots \dots (12)$$

이 式에서 $\xi_{i+\frac{1}{2},j}^n$, $\xi_{i-\frac{1}{2},j}^n$, $\eta_{i,j+\frac{1}{2}}^n$ 및 $\eta_{i,j-\frac{1}{2}}^n$
은 (7) 및 (8)式에서 加速度項과 粘數項만을
따로 整理한 것이다.^{33), 40)}

에너지方程式(9)式的 差分形은 forward-time differencing을 適用하면

$$\begin{aligned} & \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta \tau} + U_{i,j}^n \left(\frac{T_{i+\frac{1}{2},j}^n - T_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\Delta X} \right) \\ & + V_{i,j}^n \left(\frac{T_{i,j+\frac{1}{2}}^n - T_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta Y} \right) \\ & = Npr \left(\frac{T_{i+1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i-1,j}^n}{\Delta X^2} + \right. \\ & \left. \frac{T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n}{\Delta Y^2} \right) \dots\dots\dots(13) \end{aligned}$$

이 된다.

空間의 格子는 境界附近의 周邊 cell에서는 가는 格子를 使用하여 境界層에서의 急激한 速度 變化를 보다 더 正確하게 나타내고자 하였다.

Fig. 4는 $P_{i,j}$, $T_{i,j}$, $U_{i+\frac{1}{2},j}$ 및 $V_{i,j+\frac{1}{2}}$ 等各變數의 節點에 對한 番號 매기기와 가는 格子와 굵은 格子의 構成을 나타낸 것이다. Fig. 4의 例는 假想 cell을 除外한 空間境界의 內側格子의 數 $M \times N = 9 \times 18$ 인 境遇에 對한 것이다. X方向의 內側格子數 $M=9$ 中 5는 가

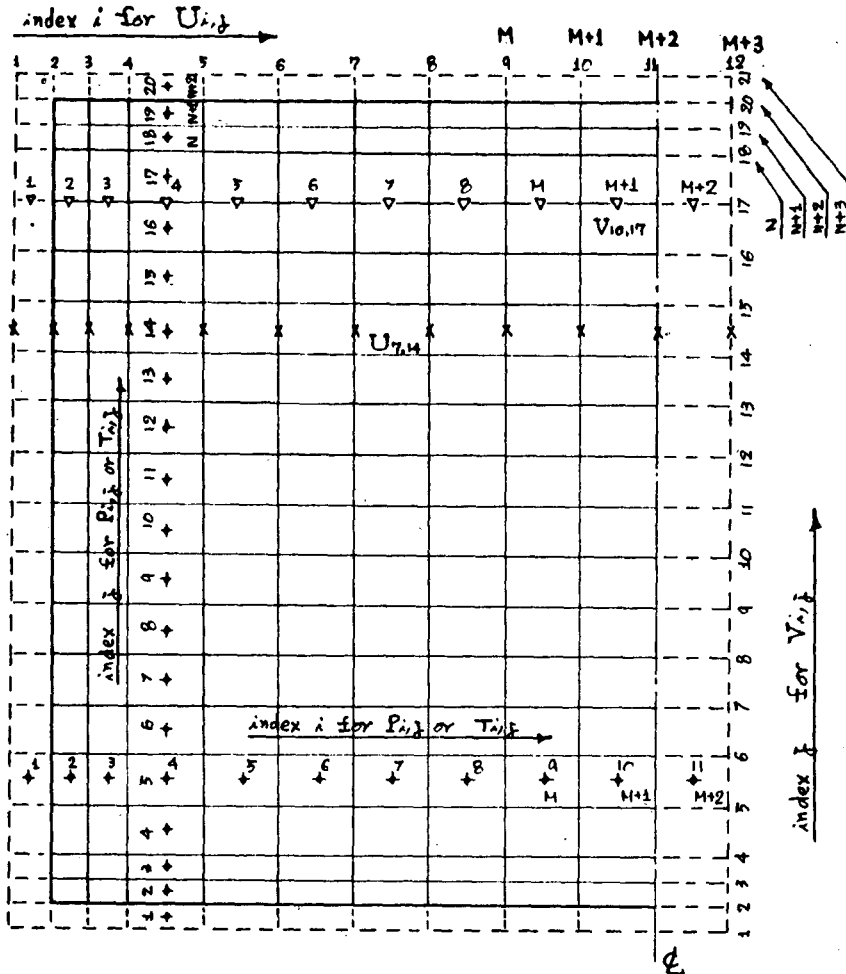


Fig. 4 Numbering system of $P_{i,j}$ (or $T_{i,j}$), $U_{i,j}$ & $V_{i,j}$ for interior and fictitious nodal points. (number of interior meshes $M \times N = 9 \times 18$), $\alpha = 5$. •, x and ▽ refer to nodal points for $P_{i,j}$ & $T_{i,j}$, $U_{i,j}$ and $V_{i,j}$ respectively. index i of $V_{i,j}$ and index j of $U_{i,j}$ are consistent with the ones of $P_{i,j}$ and $T_{i,j}$ respectively.

는 格子數이고 나머지 4는 굵은 格子數로서 가는 格子의 數 α 는 任意로 取할 수 있으나 가는 格子의 間隔에 對한 굵은 格子의 間隔의 比, $i\alpha$ 와 一致시켰다. cell 境界에서 定義되는 $U_{i,j}$ 및 $V_{i,j}$ (이것은 Fortran notation의 index 임)의 指數 i 및 j 는 Fig.4에서 볼 수 있다. $U_{i,j}$ 의 j 와 $V_{i,j}$ 의 i 는 cell 中心에서 定義되는 $P_{i,j}$ 및 $T_{i,j}$ 의 指數와 같다. Fig.4에서 點線으로 表示한 cell은 假想 cell을 나타낸 것이며 이에 對하여도 內側 cell과 같이 番號를 붙인다.

3 - 2 計算節次와 初期 및 境界條件

數值計算은 거의 $M \times N = 5 \times 10$ 의 格子網에 對하여 하였다. 이때 가는 格子 및 굵은 格子의 數는 X方向은 2 및 3 그리고 Y方向은 上下端에 2개씩 및 中央에 나머지 6이다. fine mesh를 使用하는데 따르는 一次 및 二次 有限差分偏導函數의 變化를, 各偏導函數에 $i, j, i\alpha$ 및 Y方向 格子數N에 따라 決定되는 修正係數를 곱하여 修正토록 하였다.

使用된 數值方法은 (11)式的 Poisson方程式에 對해서는 逐次加速緩和法(SOR)을 適用하여 壓力場의 壓力分布를 얻고 (13)式的 에너지方程式은 explicit method를 適用해서 溫度場의 解를 얻었다.

$n \cdot \Delta\tau$ 時刻의 速度場에서 $(n+1) \cdot \Delta\tau$ 時刻의 速度場을 計算하는 節次는 다음과 같다.

1. $\xi_{i+\frac{1}{2},j}^n, \eta_{i+\frac{1}{2},j}^n, \xi_{i-\frac{1}{2},j}^n$ 및 $\eta_{i,j-\frac{1}{2}}^n$ 등의 값을 初期條件 및 境界條件과 더불어 計算領域全體에 對하여 計算해 둔다.
2. (12)式的 $Z_{i,j}^n$ 을 計算하여 Poisson 式的 非齊次項을 求한다.
3. (11)式的 Poisson 方程式을 SOR 方法으로 푼다.
4. 이처럼 해서 求한 壓力場을 $U_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}, V_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1}$ 및 $U_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1}, V_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1}$ 關係式에 代入하여 $(n+1) \Delta\tau$ 時刻의 새로운 速度場을 얻는다.
5. 이렇게 해서 얻은 速度場을 使用하여 다

시 1~4의 節次를 反復하여 定常解를 얻게 될 때까지 計算을 繼續한다.

MAC法에 있어서는 Fig.4에 보여 주는 바와 같이 計算領域 밖에 外接의 假想 cell을 두어 이 單一層의 假想格子로 計算領域을 完全히 둘러싼다. 이것은 $U_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}, V_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1}, U_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1}, V_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1}$ 및 (13)式的 값을 求하는데 있어서 計算을 遂行하는 U 또는 V의 節點이 境界線上에 있거나 P 또는 T를 計算하는 節點에서 cell의 한 邊이 境界線과 一致되는 境遇에는 境界線 밖의 假想 cell 內의 節點이나 假想 cell 境界上의 節點에서의 P, T, U 및 V 등의 값을 必要로 하기 때문이다.

3 - 3 計算의 安定性

本 論文에서 다루고 있는 方程式의 數值解는 運動量方程式과 에너지方程式의 coupled system으로서 初期條件이 任意로 固定되고 $t \geq 0$ 에 對해서 境界條件과 더불어 주어진 方程式을 풀어야 되는 初期值問題이다. 이 方程式의 嚴密解는 存在하지 않지만 格子의 크기와 時間의 有限差分을 無限少로 하면 有限差分方程式의 近似解는 嚴密解에 가까워진다.

有限差分方程式의 收斂은 計算結果와 既存의 實驗結果 또는 單純化시킨 問題의 解析解와 比較하므로써 確認할 수 있다. 有限差分近似에서 나타나는 必然的인 誤差를 極少化하기 爲하여 計算安定性의 條件을 세워야 한다. 格子의 크기를 작게하면 誤差는 작아지나 그에 따라 時間의 增分을 줄이지 않으면 誤差는 더 增加하고 計算의 不安定性이 나타난다.

定하여진 ΔX 및 $\Delta\tau$ 에 對해서 計算을 反復할 때 近似解와 嚴密解의 差의 絕對值가 發散하는가 또는 收斂하는가 하는 問題와 定하여진 $\Delta\tau$ 에 對해서 ΔX 를 더 줄일 때 이 絕對值가 發散하는가 또는 收斂하는가 하는 問題를 解析하려면 有限差分方程式의 explicit solution을 Fourier級數로 展開하고³⁸⁾ 이때 나타나는 cosine 函數와 指數函數를 級數로 展開한다.

먼저 (9)式 하나에 對한 安定性을 본다. (9)式 左邊의 對流項을 無視한다.

이같이 해서 얻은 從屬變數에 關한 式을 有限差分方程式((9)式的 左邊對流項을 無視한)에 代入할때 增幅係數 $\xi(m)$ 이

$$\max(m) |\xi(m)| \leq 1$$

의 條件을 滿足하면 된다. 이때 m 은 整數다. 이 式을 滿足하는 境遇는 다음과 같다.

$$\frac{2 \Delta \tau}{N_{Pr} \left(\frac{\Delta X^2 \Delta Y^2}{\Delta X^2 + \Delta Y^2} \right)} \leq 1$$

다음에 本 論文에서와 같이 運動量方程式과 에너지方程式을 coupled system으로 하는 境遇에는 Hellums 및 Churchill⁹⁾이 解析한 安定性基準式은

$$\frac{|U| \Delta \tau}{\Delta X} + \frac{|V| \Delta \tau}{\Delta Y} + \frac{2 \Delta \tau}{N_{Pr}} \left(\frac{1}{\Delta X^2} + \frac{1}{\Delta Y^2} \right) \leq 1 \dots\dots\dots(14)$$

理論上으로는 위의 基準에 따라 $\Delta \tau$ 의 크기를²⁴⁾ 決定하면 되나 가는 格子를 使用한 여기서는 右邊의 1을 適切하게 잡아서 $\Delta \tau$ 를 決定하여야 한다.

4. 結 果

四角形의 密閉空間에 對한 自然對流 熱傳達の 數値解는 Grashoff 數 $5 \times 10^3 \sim 5 \times 10^4$ 의 範圍에 걸쳐 세로가로비, H/L 이 1, 0.5, 0.33, 0.2 및 0.25에 對해서 얻었다. Grashoff 數는 $5 \times 10^3, 1 \times 10^4, 3 \times 10^4$ 및 5×10^4 의 4값에서 演算을 하였다.

다음의 그래프상의 데이터는 모두 無次元數로 나타나 있다. 密閉空間의 無次元높이는 1이고 空間의 가로는 위의 세로가로비에 따라 각기 1, 2 및 4이며 計算空間은 左便의 절반이므로 計算空間의 가로, X_ℓ 은 0.5, 1.0 및 2.0

이 된다.

計算을 한 格子數는 $M \times N = 5 \times 10$ 으로서 5 및 10은 각각 X 및 Y 方向의 密閉空間의 格子數를 나타낸 것이다.

本 數値計算에서 얻은 計算結果의 內容은 表 1과 같다.

모든 數値計算에서 Prandtl 數는 0.73으로 固定하였다.

1번에서 12번까지의 演算에서 密閉空間內의 格子數는 上述한 바와 같이 $M \times N = 5 \times 10$ 이며 이 中央境界(右側의 垂直平面)를 除外한 境界에서 2개 格子까지는 가는 格子크기이며 나머지 格子로서 X 方向으로 3개 및 Y 方向으로 6개는 굵은 格子크기로 하였다.

境界밖의 假想格子의 크기는 境界바로 안에 있는 格子의 크기를 따랐다. 따라서 計算格子數는 7×12 가 되며 U 의 X 方向과 V 의 Y 方向에 있어서는 13個의 節點이 된다. 表 1에서 13번째의 演算은 計算의 精度를 보기 爲해서 計算한 것으로서 $M \times N = 9 \times 18$ 로 하였고 境界근방의 가는 格子數는 위의 境遇와 같은 要領으

表 1. Summary of Computer results

RUN	$\Delta \tau$	N_{GR}	X_ℓ	Nu
1	0.0005	5×10^3	0.5	3.504
2	0.0005	5×10^3	1.0	4.963
3	0.0005	5×10^3	1.5 (2.5)	0.768 (1.543)
4	0.0005	1×10^4	0.5	4.113
5	0.0005	1×10^4	1.0 (1.5)	5.601 (0.969)
6	0.0005	1×10^4	2.0	2.320
7	0.0005	3×10^4	0.5	5.256
8	0.0005	3×10^4	1.0 (1.5)	7.034 (1.455)
9	0.0005	3×10^4	2.0	4.734
10	0.0005	5×10^4	0.5	5.899
11	0.0005	5×10^4	1.0 (1.5)	7.651 (1.793)
12	0.0005	5×10^4	2.0 (2.5)	7.212 (1.543)
13	0.0002	1×10^4	0.5	5.767

로 2 個식으로 하였다.

모든 演算에서 初期值로서 U, V 및 T는 0 으로 그리고 P는 300 으로 取하였다.

4-1 컴퓨터 프로그램의 試算

時間増分, 時間增加의 反復數, SOR의 加速係數 및 格子의 크기 등의 變化가 計算結果에 주는 영향을 보기 爲하여 豫備試算을 하였다.

時間増分, $\Delta\tau$ 는 增加할 수록 定常解에 이르는 時間이 짧아지나 精度가 떨어지고 (14)式의 安定性의 基準을 벗어나면 計算이 發散하여 버린다. Grashoff 數 1×10^4 , $X\ell=0.5$ 의 入力 데이터를 가지고 $M \times N=9 \times 18$ 의 格子網으로 $\Delta\tau$ 를 變更하면서 試算한 結果 $\Delta\tau$ 의 값이 0.0004 및 0.0005에서 發散을 하고 0.0003以下에서는 收斂을 하였다. 이때 ITER=200에서 $U_{max}=11.94$ 이고 $V_{max}=21.19$ 이고 (14)式으로부터 $\Delta\tau$ 의 값을 求하면 0.00162를 얻는다.

이러한 關係로부터 12 번에 걸친 計算에 있어서 모두 安定하게 收斂하는 $\Delta\tau$ 의 範圍로서 다음을 取하였다.

$$\frac{|U|_{max}\Delta\tau}{\Delta X} + \frac{|V|_{max}\Delta\tau}{\Delta Y} + \frac{2 \cdot \Delta\tau}{N_{Pr}} \left(\frac{1}{\Delta X^2} + \frac{1}{\Delta Y^2} \right) \leq 0.2$$

適合한 $\Delta\tau$ 의 값을 選定한다는 것은 演算時間과 truncation error사이의 折衷問題가 된다.

格子크기를 줄이면 誤差는 작아지나 이에 따라 $\Delta\tau$ 가 減小되어 計算時間이 增加하고 그 反對의 境遇는 計算時間은 짧아지나 誤差가 增加되어 計算結果의 精度가 問題가 된다. $X\ell=0.5$, ($H/L=1$)인 境遇에 ΔX 는 0.125 이고 가는 格子의 크기는 0.0625이며 ΔY 도 마찬가지다. 다만, $X\ell=1$ 및 2 일 때에는 格子의 크기가 커져서 精度가 떨어진다. 그러나 이때 Nusselt 數의 計算에 있어서는 ΔY 의 크기만이 영향을 줄 뿐이므로 Nusselt의 精度에는 영향을 안준다.

定常解를 주는 反復數로서 300 을 取하였음

은 이미 上述하였다. Grashoff 數 1×10^4 , $M \times N=5 \times 10$, 最大反復數, ITMAX=500으로 取하고 $X\ell=1.0$ 인 경우를 보면 溫度T는 反復數에 따른 變化가 1% 未滿으로서 아주 작으며 한편, 變化가 比較的 큰 速度의 變動을 보면 反復數 300과 400 사이의 水平速度, U의 差異는 平均 1~3% 程度이며 最大 8.3%인 速度가 있고 400에서 500사이도 비슷한 傾向이다. 한편 總平均 運動에너지의 變動을 보면 反復數 300에서 400으로 갈 때 0.1%도 안되며 300에서 301이 될 때 0.001% 밖에 되지 않는다.

Poisson 方程式에 適用한 SOR Scheme의 計算에 있어서 最大反復數(ICNTMX)를 60으로 固定해서 加速係數 ω 의 變化에 따르는 相對誤差 $\frac{P_{i,j}^{n+1}-P_{i,j}^n}{P_{i,j}^n}$ 의 變化를 計算하여 Fig. 5에 나타내었다.

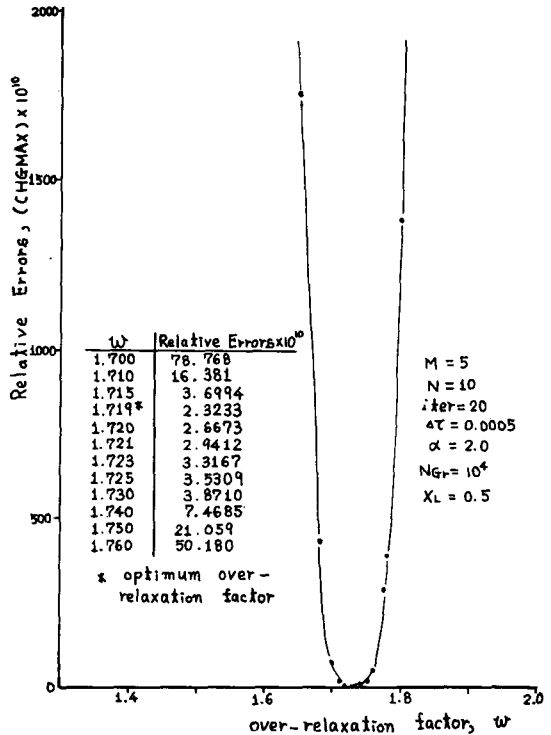


Fig. 5. Relative errors against over-relaxation factor for a given iteration number of 20.

Fig. 5 內에 表示되어 있는 ITER는 有限差分에너지 方程式에서 時間增分 $\Delta\tau$ 가 增加할 때마다 하나씩 增加하는 反復數로서 本 計算은 最大 300으로 演算을 하였으나 最適의 加速係數를 求할때는 20으로 固定하여 Fig. 5의 結果를 얻은 것이다. ITER 10일 때에도 Fig. 5와 같은 傾向을 가지며 最適值도 같다. Fig. 5를 보면 最適加速係數는 1.719이다. ICNTMX의 變化에 따라서는 이 最適加速係數는 좀 變하나 큰 變化는 없고 ICNTMX=20에서는 1.715로 나타났다.

格子크기의 差에 따른 計算結果의 差異는 큰 것으로 나타났다. Grashoff 數 1×10^4 및 $X\ell = 0.5$ 에 있어서 200番까지의 反復數에서 얻어진 $M \times N = 5 \times 10$ 과 $M \times N = 9 \times 18$ 의 結果는 密閉空間의 中央點에서 갖는 兩境遇의 溫度差는 22.6%程度에 이르고 있다. 그러나 平均 Nusselt 數의 差異는 3%이다.

이와 같이 해석 얻은 數値計算의 結果로서 時間에 따르는 平均運動에너지의 變動, 無次元速度 U 및 V 그리고 無次元溫度 T의 分布 등의 時間에 따르는 變動等を 圖示하고 無次元等溫線과 바닥 平面의 平均 Nusselt 數의 定常解를 圖示하였다. 同時에 標識粒子에 依하여 얻어진 經路線의 時間에 따르는 變動을 圖示하였다.

Grashoff 數와 H/L의 여러 값에 對하여 速度와 溫度等の 定常解와 非定常解를 모두 그림으로 나타내기에는 그 數가 너무 많으므로 代表的인 것만 추려서 나타낸다.

4 - 2 運動에너지의 變動

計算領域에 對한 空間平均運動에너지의 時間에 따르는 變化를 Fig. 6에 보여준다. 그림에서 보면 $\tau = 0.1 \sim 0.15$ 程度에서 모두 定常解에 收斂하고 있음이 보인다. B. J. Daly¹⁶⁾의 數値研究에서의 結果와 마찬가지로 Grashoff 數가 增加할때 平均運動에너지의 값이 增加하고 있다.

B. J. Daly¹⁶⁾가 對流流動에서의 亂流로서 遷

移에 關한 研究에 따르면 Rayleigh 數, N_{Ra} 가 $10^4 < N_{Ra} < 2 \times 10^4$ 의 範圍에서 空氣의 對流는 亂流로 遷移하고 있음을 밝히고 있다. 또한 R. Krishnarmurti²⁸⁾의 論文에서도 類似한 結果로서 Rayleigh 數에 따르는 Regime Diagram에서 $N_{Ra} = 5.3 \times 10^3$ (Prandtl 數 0.73일때의 $N_{Gr} = 7260$)근방까지는 定常二次元 流動이고 그 以上에서는 時間從屬의 三次元流動에 들어가고 있다. 上述의 Daly의 遷移區間 $10^4 < N_{Ra} < 2 \times 10^4$ 을 Prandtl 數 0.73일때의 Grashoff 數로 고쳐서 나타내면 $13,700 < N_{Gr} < 27,400$ 이 되며 이것은 Fig. 6에서 Grashoff 數 13,700 以上에서 遷移變動中の 平均運動에너지의 變動이 Grashoff 數의 增加에 따라 增大되는 傾向이 있고 또 이 平均運動에너지의 變動은 亂流로의 遷移를 일으키는 原因이 된다고 볼 수 있다.

4 - 3 速度分布

Fig. 7~10은 X 方向의 無次元速度, U를 어느 定하여진 Grashoff와 H/L의 값에 對해서 나타낸 것으로서 Fig. 7, 8 및 10은 定常解 그리고 Fig. 9 a, b 및 c는 非定常解를 보여준다. Fig. 11은 H/L=1의 四角形密閉空間內 $X=0.25$ 인 鉛直線上에서의 無次元速度, U의 모양이 Grashoff에 따라 달라지는 變化를 나타낸 것이다.

H/L=1의 密閉空間에 있어서 水平速度의 最大值는 大體로 $X=0.25$ 인 垂直斷面에서 볼 수 있다. 非定常流動에서 Fig. 9 a, b 및 c를 보면 아래 平面근방에서는 流動은 오른쪽으로 그리고 위 平面 근방에서는 왼쪽으로 일어나고 있는데 두 流動方向의 分岐點은 처음에 垂直線의 中央보다 아래에 있다가 時間이 經過함에 따라 그 點이 위로 올라가는 傾向에 있다. 따라서 아래쪽의 最大速度는 減小하면서 速度分布는 납작해지며 (Fig. 11에서 Grashoff 數 3×10^4 및 5×10^4 의 境過) 境界層內 速度기울기도 작아지며 한편 위쪽의 左方向流速分布에서

最大速度는 反對로 커지는 傾向에 있고 速度기울기도 커져가고 있다. 이러한 傾向은 Grashoff 數가 5×10^3 과 1×10^4 에서는 볼 수 없다.

Grashoff 數 5×10^3 에 있어서는 時間이 지남에 따라 境界層에서 速度기울기가 오히려 커지며 Grashoff 數 1×10^4 에 있어서는 別로 變動이 없다.

Fig. 12에서 Fig. 16까지는 定하여진 Grashoff 數와 H/L의 값에서 $Y = 0.3125, 0.5625$ 및 0.8125 의 3垂置높이에서의 Y方向的 無次元速度, V의 모양을 보여준 것이고 Fig. 17는 이들 無次元速度의 모양이 Grashoff 數에 따라 變하는 모습을 表示한 것이다.

H/L = 1의 密閉空間에 있어서는, 左側壁面을 따라 내려오는 氣流의 速度는 Grashoff 數 5×10^3 을 除外한 $1 \times 10^4, 3 \times 10^4$ 및 5×10^4 의 모든 Grashoff 數에 對해서 $Y = 0.8125$ 의 位置에서 가장 낮고 $Y = 0.5625$ 인 無次元 높이의 中央부근에서 가장크고 流動이 바닥平面에 가까워오면 바닥平面의 영향으로 減速되고 있다. 또한, 充分히 發達된 境界層의 이最大速度는 $X = 0.1$ 근방에서 일어나고 있다. 同時에 右側의 對稱軸에서의 上昇氣流의 速度가 左側に 있는 下降氣流의 速度보다 더 크며 이것은 上昇 또는 下降氣流의 分岐點이 Fig. 12, 13 및 14에서 그림의 中央인 $X = 0.25$ 의 右側に 있다는 것과 符合된다. 그림으로 나타내지는 안하였으나 이 分岐點은 時間이 經過함에 따라 右側으로 移動하는데 이것은 上昇氣流의 速度가 漸次 增加하고 反對로 下降速度는 減小한다는 것을 意味한다.

한편, H/L = 0.5에서는 Grashoff 數 3×10^4 에 對한 Fig. 15로부터 그 밖의 Grashoff 數의 境過를 包含해서 境界層의 最大速度는 $X = 0.05$ 의 곳이나 이보다 좀 큰 곳에서 그리고 H/L = 0.2에서는 Fig. 16 a, b 및 C를 보면 $X = 0.07$ 근방에서 일어나고 있다. Fig. 16 a, b 및 c는 H/L = 0.2 그리고 Grashoff 數 3×10^4 인 境過로서 右側 垂直平面을 따라 下降氣流가

흐르고 있고 그 오른쪽에 上昇氣流, 다음에 또 下降氣流 그리고 다시 上昇氣流가 發生되고 있다. 이것은 $H/L = 0.25 (X_\ell = 2.0)$ 에 對한 것이긴 하지만 Fig. 34에서와 같이 反對方向의 순환을 가진 3變의 roll이 四角形密閉空間內에 發生하고 있다는 것을 알 수 있다.

Fig. 17은 $Y = 0.5$ 인 斷面에서의 Y方向的 無次元速度分布가 Grashoff 數에 따라 變하는 모양을 보여준다. 어느 境遇건 上昇速度가 下降速度보다 크며 Grashoff 數가 커짐에 따라 速度의 크기는 커지고 있다.

4-4 溫度分布 및 等溫線

Fig. 18 및 Fig. 19는 計算領域內의 任意의 4點에서 各기 溫度가 時間에 따라 變하는 모양을 나타낸 것이다. T(6, 2) 및 T(2, 11)은 各기 右側下端과 左側上端구석의 溫度로서 이들은 定常狀態에 非較的 빨리 이르지만 T(4, 9)와 T(3, 6)은 境界에서 멀리 안쪽에 있기 때문에 定常狀態에의 到達이 더디다.

특히 H/L = 7인 Fig. 19에서 溫度의 時間에 따르는 變動이 甚함을 볼 수 있다.

Fig. 20~Fig. 24는 密閉空間內 $Y = 0.1875, 0.4375$ 및 0.8125 의 3垂置높이에서 갖는 無次元溫度分布가 時間($\tau = 0.005, 0.05$ 및 0.1)에 따라 變하는 모양을 表示한 것이다.

그림들을 보면 大体로 密閉空間의 垂置對稱軸쪽으로 갈수록 溫度의 기울기가 緩慢하며 左側의 垂直平面에서 기울기가 가장 急하다는 것을 알 수 있다. 그러나 垂直對稱軸 근방의 낮은 기울기는 H/L = 1의 그림들에 있어서 특히 바닥平面에 가까운 $Y = 0.1875$ 의 높이에 있어서는 Grashoff 數가 클수록 또 時間이 經過함에 따라 기울기가 커져가고 있는 傾向을 볼 수 있다. 이는 自然對流의 熱傳達에 있어서는 速度의 影響을 많이 받는다는 것을 意味한다.

Fig. 24는 Grashoff 數 3×10^4 , H/L = 0.2에서 갖는 無次元溫度分布의 時間的인 變化를 보여주고 있다. $\tau = 0.1$ 에 있어서 溫度의 起伏

이 나타난 것은 Fig. 16 C에서의 垂直方向對流 速度의 영향 때문이다. 또한, 다음에 나오는 Fig. 33 과 關聯해서보면 $H/L = 0.2 (X_\ell = 2.5)$ 에서는 3雙의 roll 이 密閉空間에 나타나기 때문이라고 볼 수 있다.

Fig. 25 는 $H/L = 1, \tau = 0.1$ 그리고 $Y = 0.1875$ 의 높이에서 無次元溫度分布가 Grashoff 數에 따라 달라지는 變化를 나타낸다.

Fig. 26~Fig. 29 는 密閉空間內的 定常流動 ($\tau = 0.15$)에서의 等溫線을 나타낸 것이다. Grashoff 數가 5×10^3 및 1×10^4 에서는 퍼든 우산모양을 하고 있고 Grashoff 數가 좀 커져서 3×10^4 및 5×10^4 에서는 버섯모양으로 變하고 있다. 이들은 境界條件(周期的 垂直境界를 갖는 固定境界로서 法線方向溫度기울기 0) 이 다르긴 하지만 아래로부터 加熱을 받는 Fromm의 數値解¹²⁾에서 보여주는 等溫線等과 매우 恰似하다. 이 Fromm의 數値解中 Rayleigh 數 10^6 以上에서만 나타나는 溫度포켓은 Rayleigh 數가 이보다 낮은 여기에서도 찾아 볼 수 없다. 이들 等溫線의 分布로부터 平面의 法線方向의 溫度기울기가 가장 急激한 곳은 四角形 密閉空間의 兩下端으로서 等溫線이 複雜하게 물려 있는 곳이다. 따라서 自然對流에 依한 熱傳達の 相當한 部分이 이곳에서 일어난다고 볼 수 있다. Fig. 28 b 및 C는 세로가로比 $H/L = \frac{1}{4}$ 인 空間에서 Grashoff가 3×10^4 및 5×10^4 일 때의 等溫線을 나타낸 것이다. 이와 같은 모양의 等溫線이 나타난 것은 密閉空間內的 對流에 3個의 roll 이 發生하였기 때문이다. (Fig. 34). 그림에서 等溫線이 물린 바닥平面의 한 곳과 윗平面의 두곳은 熱傳達이 많은 곳이다.

Fig. 25 는 $H/L = 1, \tau = 0.1$ 그리고 $Y = 0.1875$ 의 높이에서 無次元溫度分布가 Grashoff 數에 따라 달라지는 變化를 나타낸다.

Fig. 26~Fig. 29 는 密閉空間內的 定常流動 ($\tau = 0.15$)에서의 等溫線을 나타낸 것이다. Grashoff 數가 5×10^3 및 1×10^4 에서는 퍼든

우산모양을 하고 있고 Grashoff 數가 좀 커져서 3×10^4 및 5×10^4 에서는 버섯모양으로 變하고 있다. 이들은 境界條件(周期的 垂直境界를 갖는 固定境界로서 法線方向溫度기울기 0) 이 다르긴 하지만 아래로부터 加熱을 받은 Fromm의 數値解¹²⁾에서 보여주는 等溫線等과 매우 恰似하다. 이 Fromm의 數値解中 Rayleigh 數 10^6 以上에서만 나타나는 溫度포켓은 Rayleigh 數가 이보다 낮은 여기에서도 찾아 볼 수 없다. 이들 等溫線의 分布로부터 平面의 法線方向의 溫度기울기가 가장 急激한 곳은 四角形 密閉空間의 兩下端으로서 等溫線이 複雜하게 물려 있는 곳이다. 따라서 自然對流에 依한 熱傳達の 相當한 部分이 이곳에서 일어난다고 볼 수 있다. Fig. 28 b 및 c는 세로가로比 $H/L = \frac{1}{4}$ 인 空間에서 Grashoff 數가 3×10^4 및 5×10^4 일 때의 等溫線을 나타낸 것이다. 이와 같은 모양의 等溫線이 나타난 것은 密閉空間內的 對流에 3個의 roll 이 發生하였기 때문이다. (Fig. 34). 그림에서 等溫線이 물린 바닥平面의 한 곳과 윗平面의 두곳은 熱傳達이 많은 곳이다.

4-5 熱傳達特性

四角形 密閉空間의 全體熱傳達特性을 나타내는데 있어서 여러 方法이 있겠으나 여기서는 熱을 放出하는 바닥平面에서의 平均 Nusselt 數를 다음과 같이 定義하고 四角形 密閉空間의 熱傳達特性을 求한다.

$$\bar{N}_{Nu} = \frac{hL}{h} = -\int_0^{x_\ell} \frac{\partial T}{\partial Y} \Big|_{Y=0} dx$$

앞서 밝힌 바와 같이 四角形 密閉空間의 自然對流의 流動特性 및 熱傳達特性은 空間의 세로가로比와 Grashoff 數에 따라 달라진다. 위에 定義한 平均 Nusselt 數, \bar{N}_{Nu} 는 $C(N_{Gr})^m$ 의 形으로 表示되지만 Batchelor¹⁾, 그리고 Newell 및 Schmidt¹⁷⁾ 등이 一般的으로 使用한 다음의 形으로 表示된다.

$$N_U = C (N_{Gr})^m (H/L)^n$$

過去の研究結果와 比較하기 爲하여 $H/L = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2.4}$ 및 $\frac{1}{2.6}$ 等の 세로 가로비에 對하여 $5 \times 10^3 \leq N_{Gr} \leq 5 \times 10^4$ 의 範圍에서 求한 結果를 Fig. 30에 나타내었다.

$H/L = 1, \frac{1}{2}$ 및 $\frac{1}{2.4}$ 의 세로 가로비를 가진 空間內的 自然對流에 있어서는 對流의 roll 은 1 雙만 存在할 뿐이며 (Fig. 33 a) $H/L < \frac{1}{2.6}$ 에 있어서는 對流의 roll 은 2 雙으로 增加되어 Fig. 30에서 볼 수 있는 바와 같이 平均 Nusselt 數는 急激하게 減小한다.

$H/L = 1 \sim \frac{1}{2}$ 의 세로 가로비에 있어서는 平均 Nusselt 數는 다음 式으로 表示된다.

$$\bar{N}_{NU} = 0.89 Gr^{0.2} (H/L)^{0.45}$$

Fig. 30에서 Pillow의 式 $\bar{N}_{NU} = 0.86 N_{Ra}^{1/4}$ 에서 N_{Ra} 를 N_{Gr} 로 換算하여 그린 것이고 이 式은 $N_{Ra} \leq 4 \times 10^5$ 的 範圍에 適用되며 N_{Pr} 은 1, $H/L = 1$ 이고 바다平面上에서 加熱되는 2 次元 對流 cell 에 對한 것이다. 또한, Fig. 30에서 Fromm¹²⁾의 直線은 Robinson이 $N_U = 0.19 N_{Ra}^{0.28}$ 로 近似的으로 表示한 것⁴⁰⁾이다. 한편 Schmidt 및 Silveston의 直線은 無限平板사이의 自然對流에 對한 實驗結果이다.

一般的으로 數直解에서 求한 Nusselt 數가 測定值보다 큰데 이것은 二次元流動이라는 것과 細胞形 對流에서 細胞波長의 制限때문이다.¹⁶⁾

한편 本論文에서 求한 $H/L \leq 1/2.6$ 에 對한 세로 가로비에서는 前述한 바와 같이 roll 數의 增加로 因하여 熱傳達特性이 顯著하게 달라지는데 各各 다음 式으로 表示된다.

$$H/L = \frac{1}{3} \text{에서 } N_{NU} = 0.04 N_{Gr}^{0.352}$$

$$H/L = \frac{1}{5} \text{ 및 } N_{Gr} < 3 \times 10^4 \text{에서 } N_{NU} = 0.0035 N_{Gr}^{0.7}$$

4-6 經路線에 依한 自然對流roll의 觀察 밑에서 均一하게 加熱을 받는 密閉空間內的 自然對流에서는 Bénard cell 이 形成된다. 이에

對한 많은 理論的인 研究나 實驗研究가 水平으로 놓인 無限의 2 平板內 流體層에 對하여 이루어졌다.

여기서는 空間內에 미리 設定하여 놓은 많은 標識粒子가 自然對流에 依하여 함께 流動하면서 그리는 經路線을 plotter로 그리고 그려진 非定常 및 定常 經路線을 觀察하여서 空間의 세로 가로비와 Grashoff 數에 따라 發生되는 roll 의 個數를 얻을 수 있다.

Fig. 31~34는 22개 또는 37개의 標識粒子를 미리 어느位置에 設定해 놓고 時間反復數를 300으로 해서 經路線을 그린 것이다. 表示된 數字는 各線의 初期位置를 나타내주는 粒子의 番號이다.

Fig. 31 a는 Grashoff 數 5000인 境遇로서 速度가 매우 낮기 때문에 Fig. 31 c 및 d와 같이 1 回轉以上을 들지 못한 것이다. $\tau = 0.15$ 以上이 되어 定常流動이 되었다 하더라도 經路線은 하나로 포개질 수 없고 平均流動周圍의 振動을 나타낸다.

Fig. 31~34에 있어서 4구석에서 逆渦流가 눈에 뜨인다. 다만, 右側對稱軸 아래의 구석에서는 逆渦流가 거의 보이지 않는다.

Fig. 31 및 32를 보면 $H/L = 1$ 및 $1/2$ 에 있어서는 四角形 密閉空間內的 自然對流의 roll 은 1 雙만 存在할 뿐이다. Fig. 33은 Grashoff 數 30000에서 H/L 을 漸次 增大시키면서 觀察한 것이다. $H/L = 1 \sim 1/2.4$ 까지는 roll 은 1 雙뿐이고 $H/L < 1/2.6$ 부터 roll 數가 갑자기 2 雙으로 增加하였다. 그러나 그 모양은 흔히 밑에서 加熱되는 2 水平平板內 自然對流의 數直解에서 세우는 假定에서의와 같이 線形安定性 理論에서 얻은 波長을 水平方向으로 一定하게 周期的으로 잡아놓은 그런 一定한 크기의 細胞모양이 아니다. 이러한 모양의 歪曲은 兩끝에 있는 垂直平板의 영향이라고 思料된다. H/L 이 좀 더 작아져서 0.25이 되면 Fig. 34에서와 같이 3 雙의 roll 이 形成되며 그중 가운데에 있는 roll 은 甚하게 일그러져 있다. $H/L = 0.2$ 인 境

遇에도 roll 은 3 雙임을 Fig. 35 에서 볼 수 있다.

5. 結 論

바닥平面에서 加熱되는 四角形 密閉空間內의 二次元層流 非壓縮性 自然對流 ($5 \times 10^3 \leq N_{Gr} \leq 5 \times 10^4$) 에 對한 以上의 計算結果로부터 다음의 結論을 얻을 수 있다.

1. 定常狀態流動의 溫度分布로부터 한雙의 roll 만이 存在하는 가로 세로比 $L/H \leq 2.4$ 範圍의 空間에 對하여 다음과 같은 바닥平面에서의 平均 Nusselt 數를 算定하였다.

$$\overline{N_{NU}} = 0.89 N_{Gr}^{0.2} (H/L)^{0.45}$$

2. 水平 및 垂直方向 速度 그리고 空間의 平均運動에 너지는 Grashoff 數의 增加와 더불어 增加하였다.

水平方向 最大速度의 位置는 空間上端부에 있으며 Grashoff 數가 增加할 수록 윗平面에 接近한다.

垂直方向速度에 있어서는 最大速度는 空間의 中央에 位置하며 이 上昇速度는 垂直平面을 따라 흐르는 下降氣流의 速度보다 크다.

3. 熱流束이 가장 큰곳은 高溫바닥 表面과 低溫垂直表面이 直交하는 密閉空間의 兩下端구석 部分이다. $5 \times 10^3 \leq N_{Gr} \leq 5 \times 10^4$ 의 Grashoff 數 範圍에서는 溫度포켓이 나타나지 않았다.

4. 가로 세로比 $L/H \leq 2$ 에서는 모든 Grashoff 數에서 自然對流의 roll 은 한雙만 存在하며 Grashoff 數 3×10^4 에 있어서, $L/H \leq 2.4$ 에서 1 雙, $L/H \geq 2.6$ 에서 2 雙 그리고 $H/L \geq 4$ 에서는 3 雙의 roll 이 形成되었다.

參 考 文 獻

1. G. K. Batchelor : Heat Transfer by Free Convection Across a Closed cavity between vertical boundaries at Different Temperature, Quarterly of Applied Math., Vol. VII No. 3, 1954. p. 209.
2. G. Poots : Heat Transfer by Laminar Free Convection in Enclosed Plane Gas Layers, Quarterly J. Mech. & Applied Math., Vol. XI, Pt. 3, 1958.
3. 寺井俊夫 : 室內熱對流仁 について (2次元, 層流의 場合), 日本建築學會 論文報告集 第 59 號 1958 年 6 月
4. 寺井俊夫 : 室內熱對流仁 について (亂流의 場合) 日本建築學會 論文報告集 第 63 號 1959 年 10 月
5. Simon Ostrach : An Analysis of Laminar Free Convection Flow and Heat Transfer about a flat plate parallel to the direction of the generating body force, NACA Tech. Note. 2635.
6. H. Stommel : An Example of Thermal Convection Trans. American Geophysical Union Vol. 31, No. 4, 1950.
7. E. Palm, T. Ellingsen & B. Gjevik : On the Occurrence of Cellular Motion in Benard Convection, J. Fluid Mech., Vol. 30, Part 4, pp. 651 - 661, 1967.
8. J. O. Wilkers & S. W. Churchill : The Finite-Difference Computation of Natural Convection in a Rectangular Enclosure, A. I. Ch. E. Journal, Vol. 12, No. 1, 1966. p. 161.
9. J. D. Hellums & S. W. Churchill : Transient and Steady State, Free and Natural Convection, Numerical Solutions A. I. Ch. E. Journal, Vol. 8, No. 5, 1962. p. 690.
10. L. Crawford & R. Lemlich : Natural Convection in Horizontal Concentric Cylindrical Annuli, Ind. Eng. Chem. Fundamentals 1, 1962. p. 260.

1. G. K. Batchelor : Heat Transfer by Free

11. F.H. Harlow & J. E. Fromm : Dynamics and Heat Transfer in the von Karman Wake of a Rectangular Cylinder, *Phys. of Fluids*, Vol. 7, No. 8, 1964, p. 1147,
12. J. E. Fromm : Numerical Solutions of the non-linear equations for a heated fluid layer, *Phys. of Fluids*, Vol. 8, No. 10, 1965, p. 1757.
13. K. Aziz & J. D. Hellums : Numerical Solution of the Threedimensional Equations of Motion for Laminar Natural Convection, *The Phys. of Fluids*, Vol. 10, No. 2, 1967. p. 314.
14. J. E. Fromm : Numerical Method for Computing Nonlinear, Time Dependent, Buoyant Circulation of Air in Rooms. *IBM J. Research Development*, 1971. p. 186.
15. Kahlid Aziz : A Numerical Study of Cellular Convection, Ph. D. Thesis Rice University, Houston, Tex., Sept., 1965.
16. B. J. Daly : A Numerical Study of Turbulence Transitions in Convection Flow, *J. Fluid Mech.*, 1974. Vol. 64, Part 1, p. 129-165.
17. M. E. Newell & F. W. Schmidt : Heat Transfer by Laminar Natural Convection within Rectangular Enclosures, *J. of Heat Transfer*, Feb., 1970. p. 159-168.
18. Loyd Crawford & Robert Lemlich : Natural Convection in Horizontal Concentric Cylindrical Annuli, *I & EC Fundamentals*, Vol. 1, No. 4, 1962.
19. A. M. C. Chan & S. Banerjee : Three - Dimensional Numerical Analysis of Transient Natural Convection in Rectangular Enclosures, *Trans. of ASME*, Vol. 101, Feb., 1979.
20. 堀江悟郎, 荒谷登, 繪内正道, 室内熱対流の解析について(換気のない場合), 日本建築學會北海道支部 第35回 研究發表會, 1971年 3月
21. B. R. Pagnani : An Explicit Finite-Difference Solution for Natural Convection in Air Rectangular Enclosures, Ph. D. Thesis, Oregon State Univ., June, 1968.
22. K. E. Torrance & J. A. Rockett : Numerical Study of Natural Convection in an Enclosure with Localized Heating from Below-Creeping Flow to the Onset of Laminar Instability, *J. Fluid Mech.*, Vol. 36, Part 1, pp. 33-54, 1969.
23. K. E. Torrance : Natural Convection in Thermally Stratified Enclosures with Localized Heating from Below, *J. Fluid Mech.*, Vol. 95, Part 3, pp. 477-495, 1979.
24. 関満基 及 金柱均 : 室内氣流の 數値解析, 空氣調和・冷凍工學 第7卷 1號, 1978年 3月.
25. K. E. Torrance, L. Orloff & J. A. Rockett : Experiments on Natural Convection in Enclosures with Localized Heating from Below *J. Fluid Mech.*, Vol. 36, Part 1, pp. 21-31, 1969.
26. 前田敏男, 石黒一郎, 松本衛 : 室内の 熱対流の 近似相似則, 日本建築學會 論文報告集 第63號, 1959年 10月
27. S. Globe & D. Dropkin : Natural -Convection Heat Transfer in Liquids Confined by Two Horizontal Plates and Heated from Below, *T. ASME*, 1959. 2.
28. R. Krishnamurti : Some Further Studies on the Transition to Turbulent Convection, *J. Fluid Mech.*, Vol. 60, Part 2, 1973, pp. 285-303.

29. W.R. Martini & S. W. Churchill : Natural Convection Inside a Horizontal Cylinder, A. I. Ch. E. Journal, Vol. 6, No. 2, June, 1960.
30. S. Ostrach : Laminar Natural - Convection Flow and Heat Transfer of Fluids with and without Heat Sources in channels with constant Wall Temperatures, NACA Tech. Note 2863, 1952.
31. J. S. Turner : Buoyancy Effects in Fluids, Cambridge Univ. Press., 1973.
32. F. H. Harlow & J. E. Welch : Numerical Calculation of Time dependence Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface, Los Alamos Scientific Lab., Univ. of Calif, Los Alamos, New Mexico, Apr., 1965.
33. Shoichiro Nakamura : Computational Methods in Engineering and Science with Applications to Fluid Dynamics and Nuclear Systems, John Wiley & Sons, 1977. p. 200.
34. F. B. Lipps, R. C. J. Somerville : Dynamics of Variable Wavelength in Finite-amplitude Benard Convection, The Physics of Fluids, Vol. 14, No. 4, April, 1971.
35. 野村 毫, 松尾陽, 具塚正光, 坂本雄三, 遠藤清尊 : 室内空氣分布の 數値解法に 關する研究 1, 日本建築學會論文 報告集 第231號, 1975年 5月.
36. C. F. Gerald : Applied Numerical Analysis 2nd Ed., Addison-Wesley Pub. Co. Inc., 1978.
37. F. K. Moore : Theory of Laminar Flows, High speed Aerodynamics and Jet Propulsion, Vol. IV, Princeton Univ. Press, 1964.
38. R. D. Richtmyer, K. W. Morton : Difference Methods for Initial-Value Problems 2nd. Ed., Wiley, 1967.
39. P. Wesseling : Laminar Convection Cells at High Rayleigh Number, J. Fluid Mech. Vol. 36, Part 4, 1969.
40. 関滿基 : 直四角形 密閉空間内 自然対流熱傳達의 數値解析, 高麗大學校 大學院 機械工學科 博士學位論文 1981年 7月.

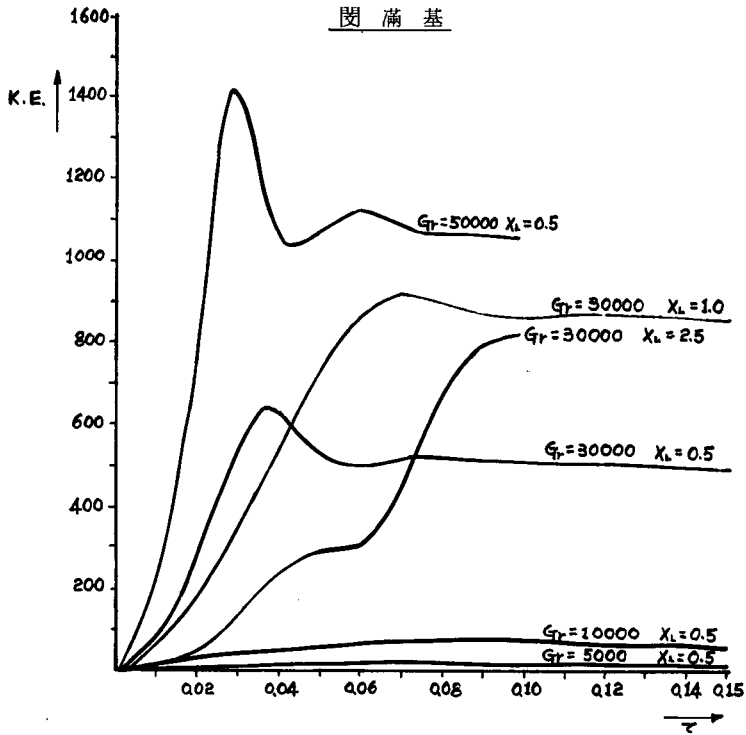


Fig. 6 Change of mean kinetic energy, KE with dimensionless time, TAU for various aspect ratio of the calculation domain and for Grasshoff number.

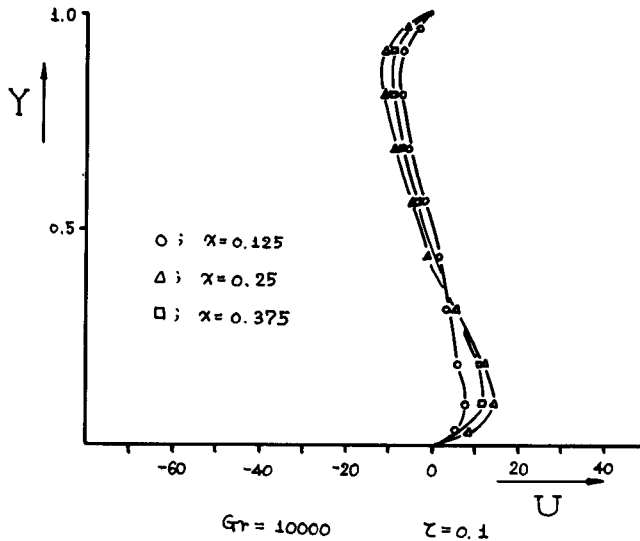


Fig. 7 Dimensionless horizontal Velocity distributions at 3 different positions for Grasshoff number 1×10^3 ($H/L = 1$)

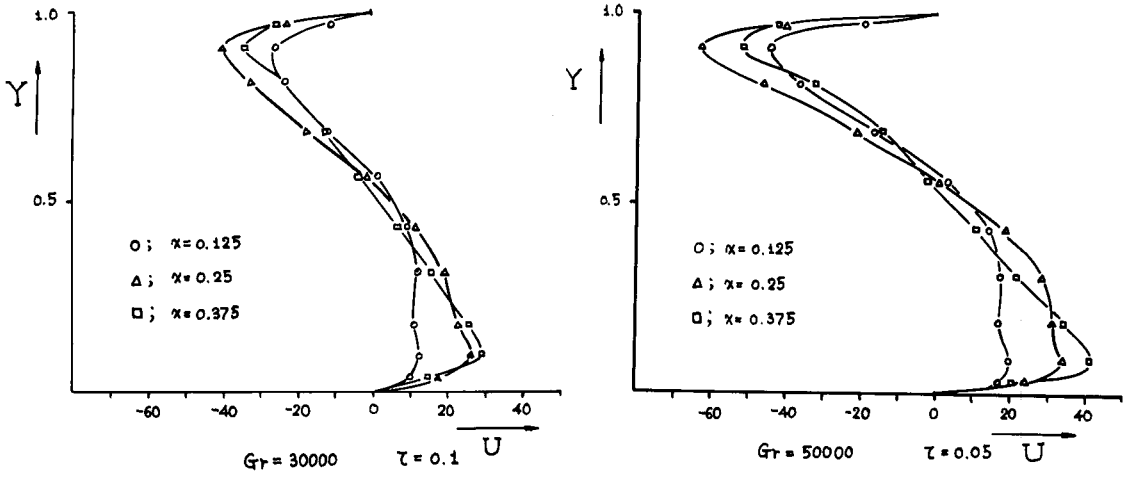


Fig. 8 Dimensionless horizontal velocity distribution at 3 different positions for Grashoff number 3×10^3 ($H/L = 1$)

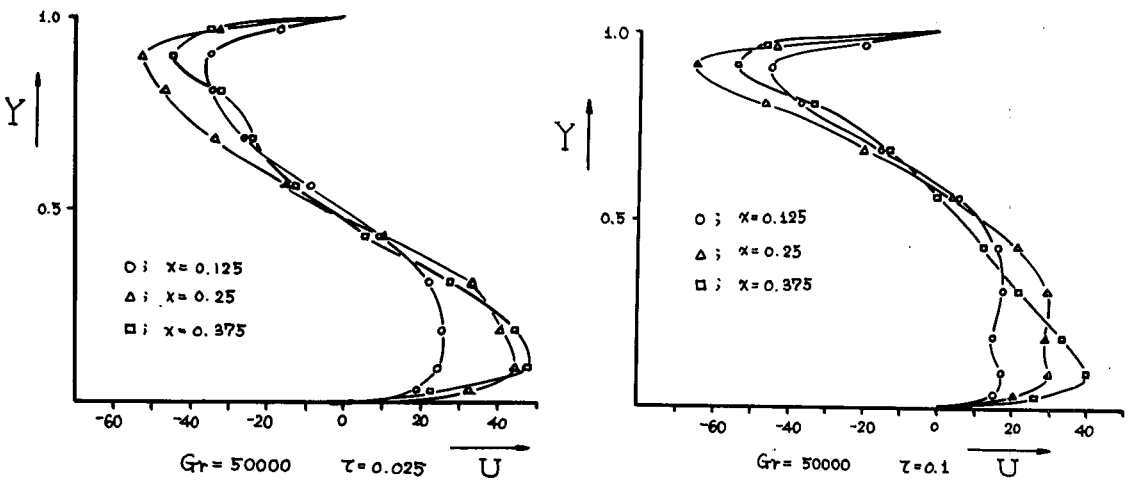


Fig. 9 Dimensionless horizontal velocity distributions at 3 different positions for Grashoff number 5×10^4 ($H/L = 1$)

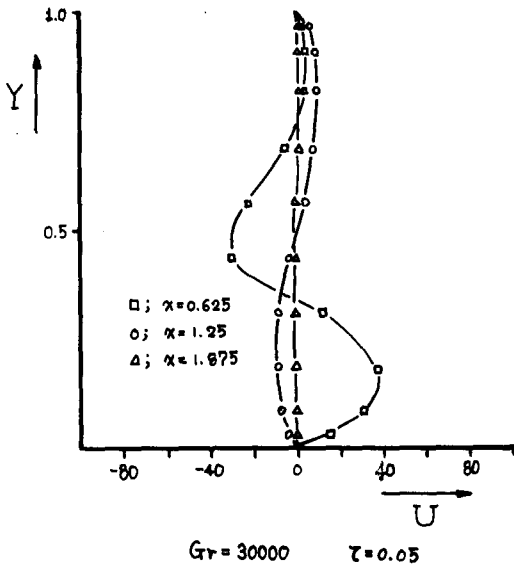


Fig. 10 Dimensionless horizontal velocity distributions at 3 different positions for Grashoff number 3×10^4 ($H/L = 0.2$)

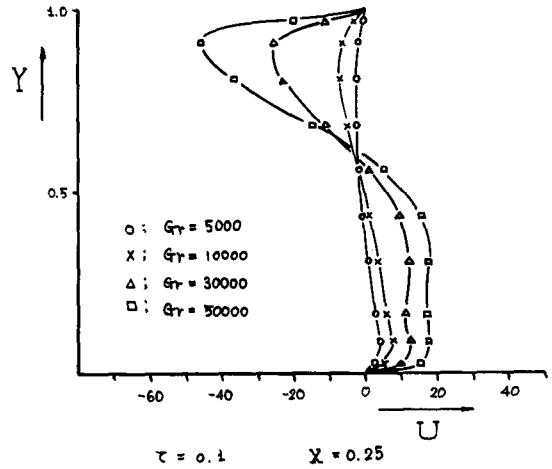


Fig. 11 Dimensionless horizontal velocity profiles for various Grashoff numbers at $X = 0.25$ ($\tau = 0.1, H/L = 1$)

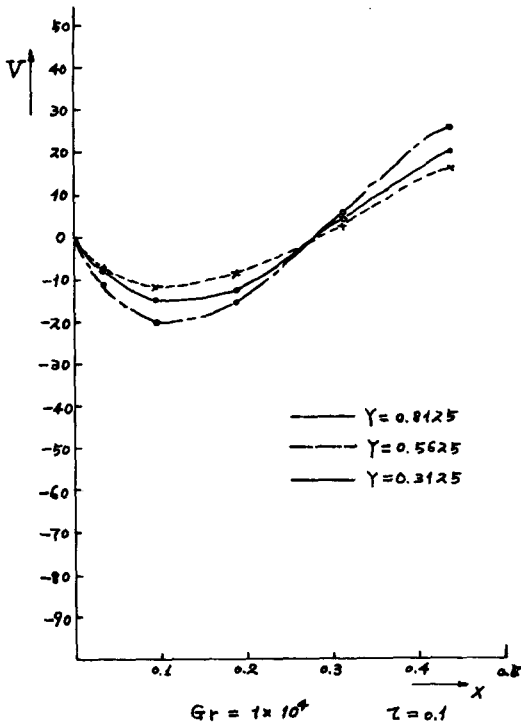


Fig. 12 Dimensionless vertical velocity distributions at 3 different heights for Grashoff number 1×10^4 ($H/L = 1$)

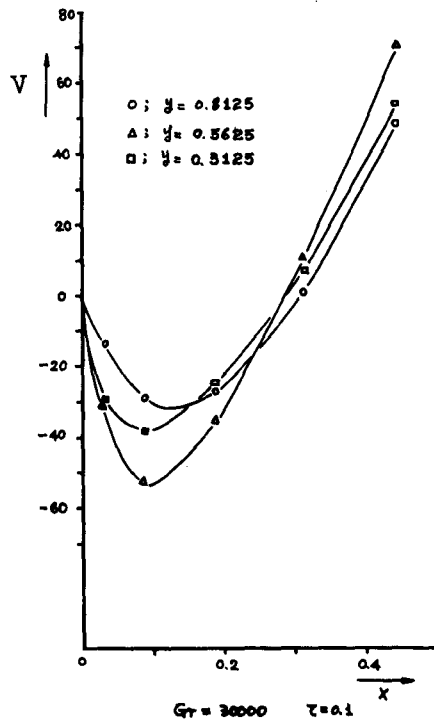


Fig. 13 Dimensionless vertical velocity distributions at 3 different heights for Grashoff number 3×10^4 ($H/L = 1$)

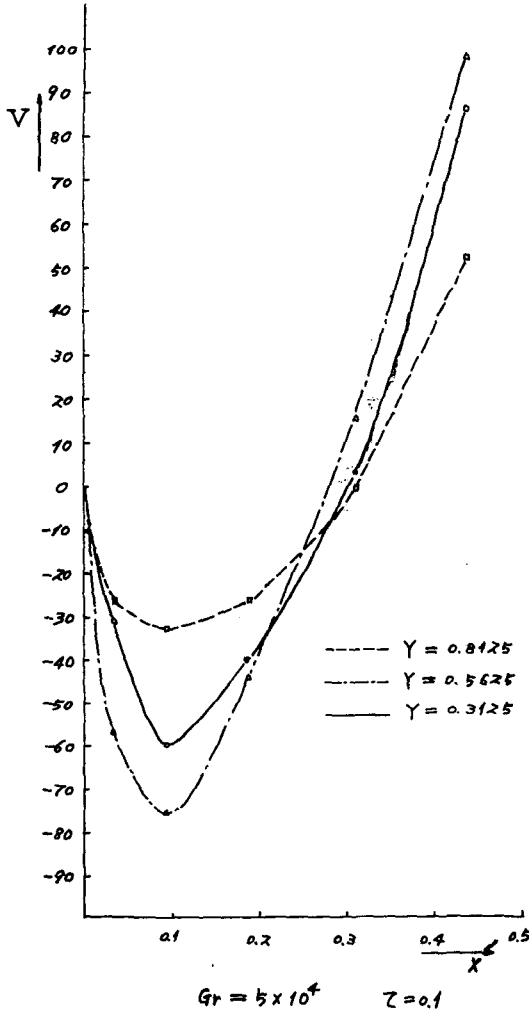


Fig. 14 Dimensionless vertical velocity distributions at 3 different heights for Grashoff number 5×10^4 ($H/L = 1$)

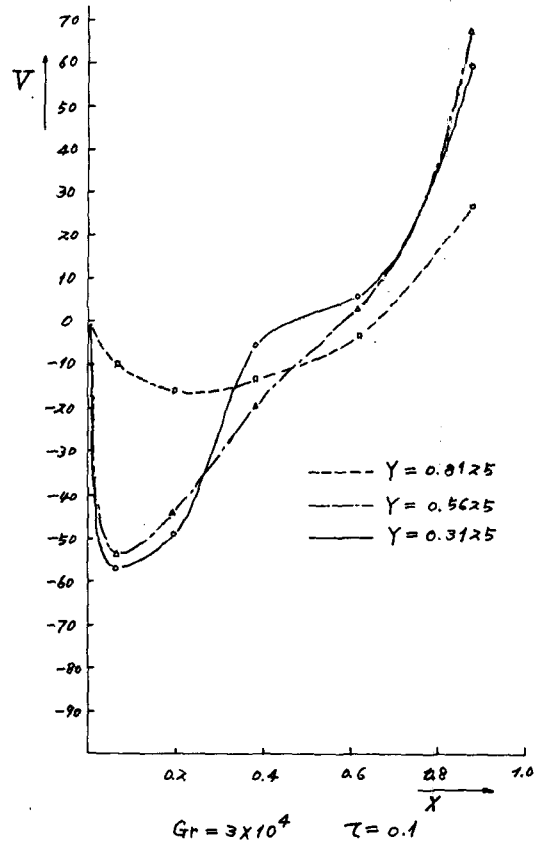
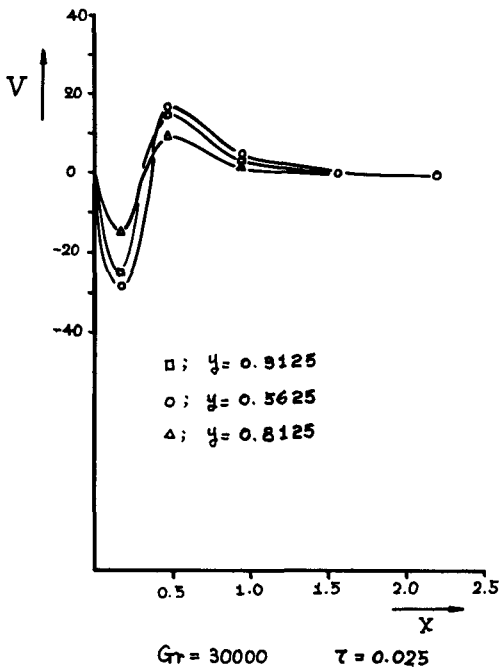
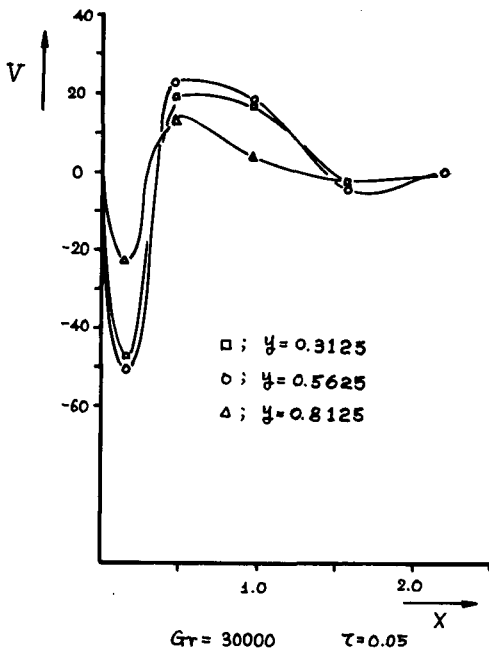


Fig. 15 Dimensionless vertical velocity distributions at 3 different heights for Grashoff number 3×10^4 ($H/L = 0.5$)

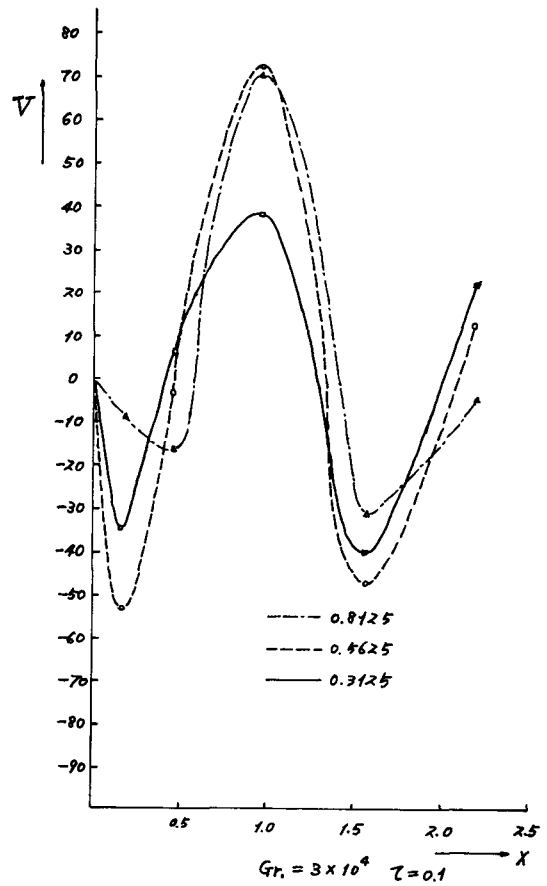


a) $\tau = 0.025$

Fig. 16 Dimensionless vertical velocity distributions at 3 different heights for Grashoff number 3×10^4 ($H/L = 0.2$)



b) $\tau = 0.05$



c) $\tau = 0.1$

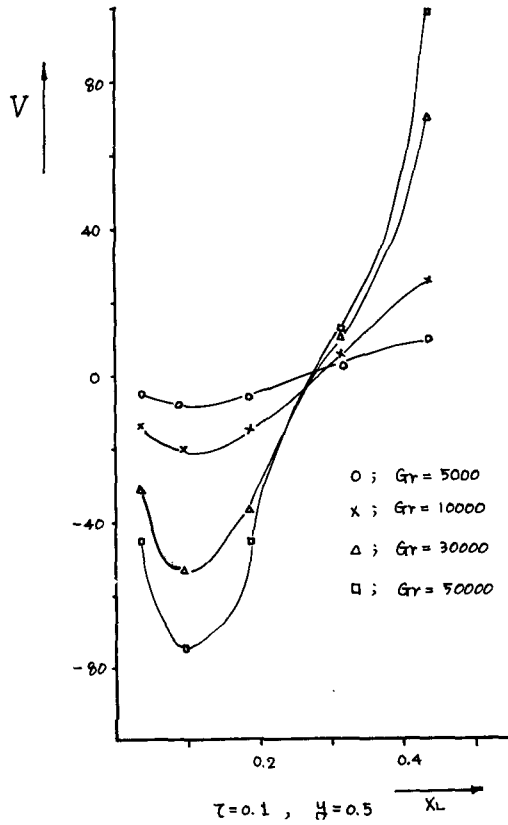


Fig. 17 Dimensionless vertical velocity profiles for various Grashoff numbers at $Y=0.5$ ($\tau = 0.1, H/L = 1$)

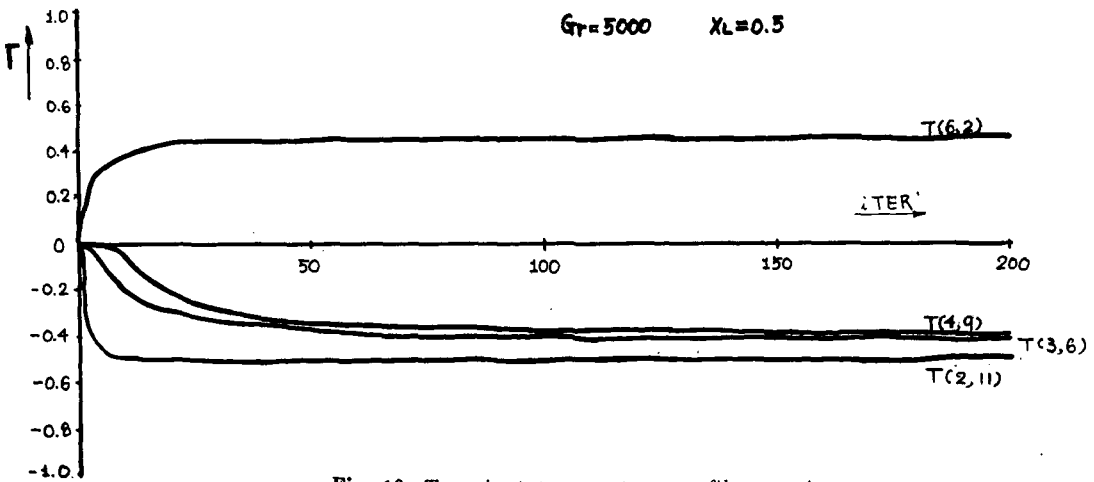


Fig. 18 Transient temperature profiles at 4 specific points for Grashoff number 5×10^3 ($H/L = 1$)

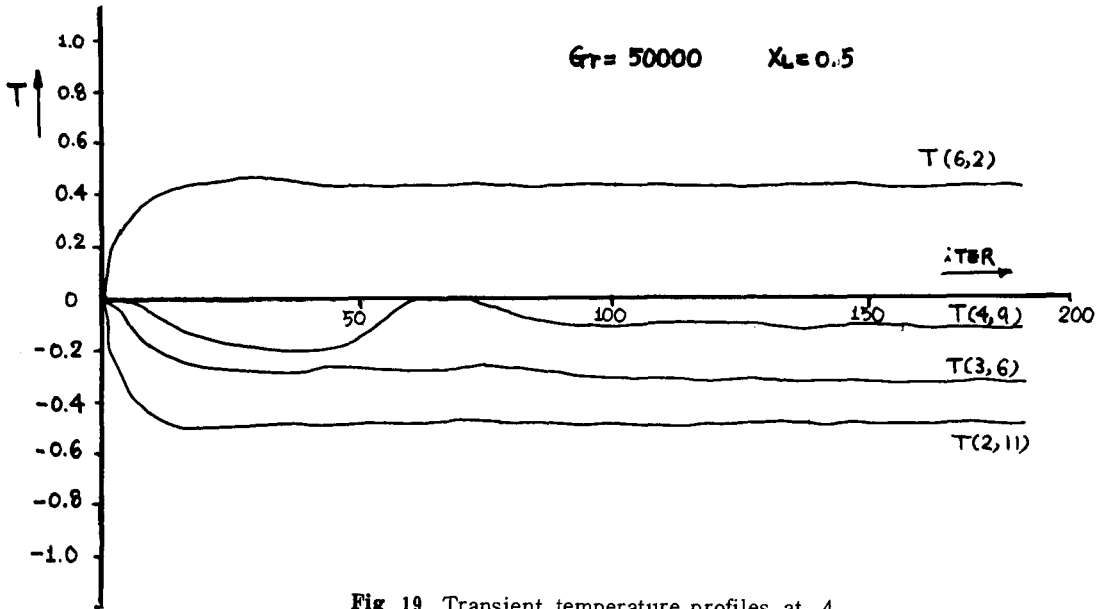


Fig. 19 Transient temperature profiles at 4 specific points for Grashoff number 5×10^4 ($H/L = 1$)

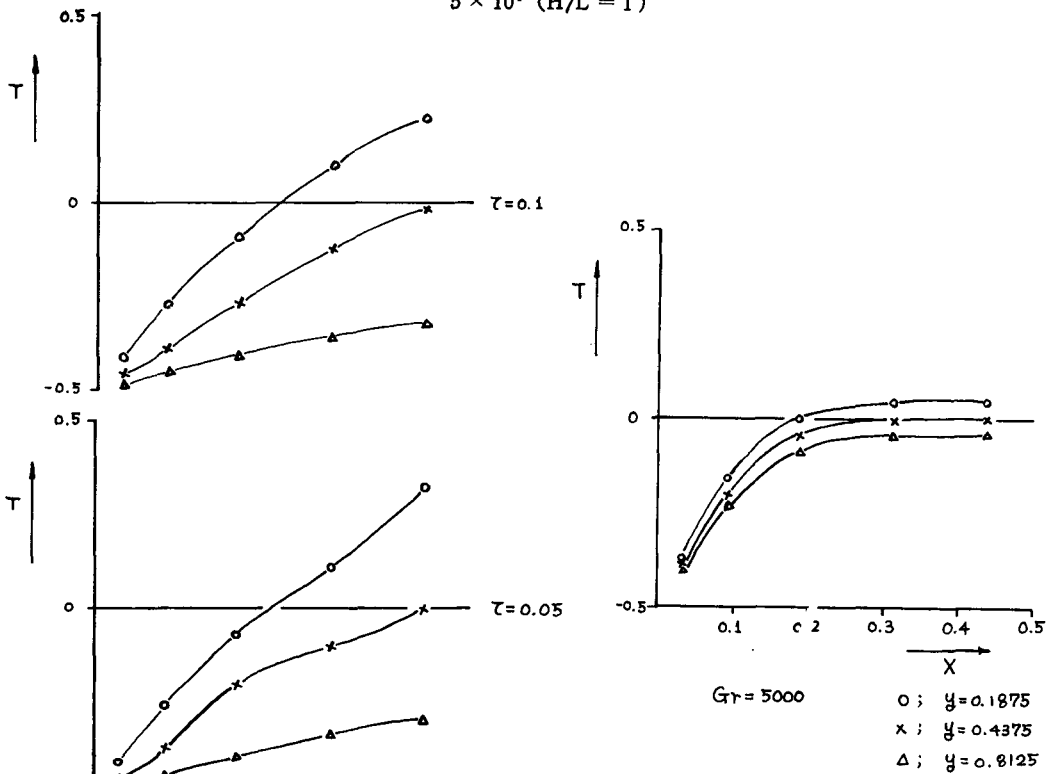


Fig. 20 Dimensionless temperature distributions at 3 different heights for Grashoff number 5×10^3 ($H/L = 1$)

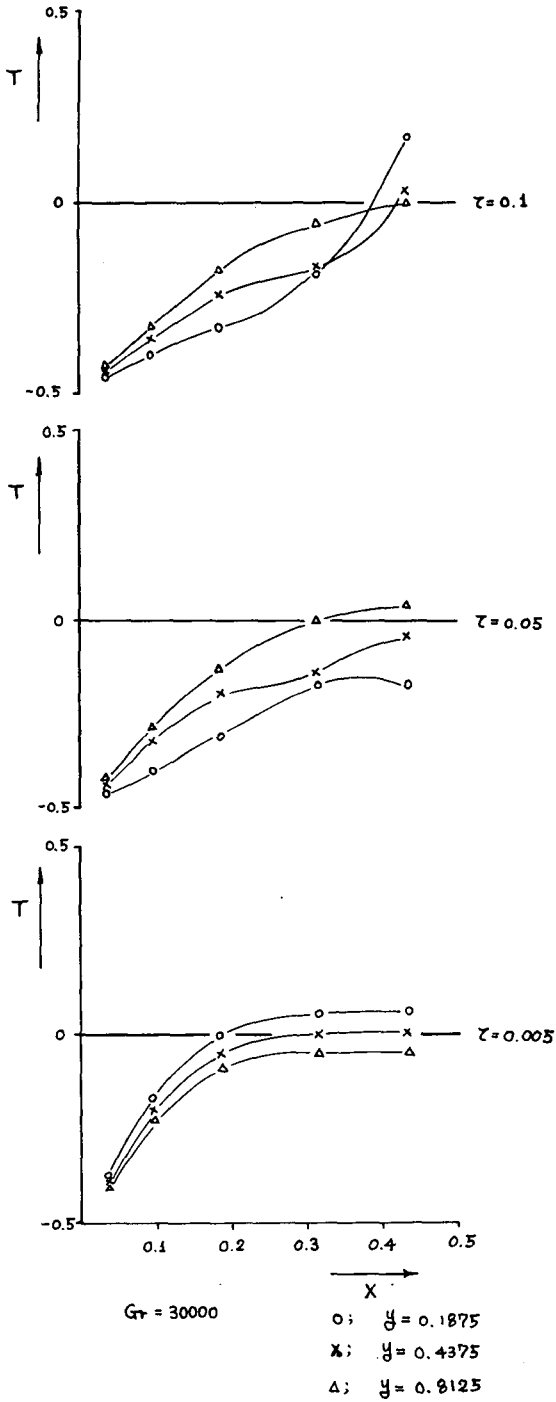


Fig. 21 Dimensionless temperature distributions at 3 different heights for Grashoff number 3×10^4 ($H/L = 1$)

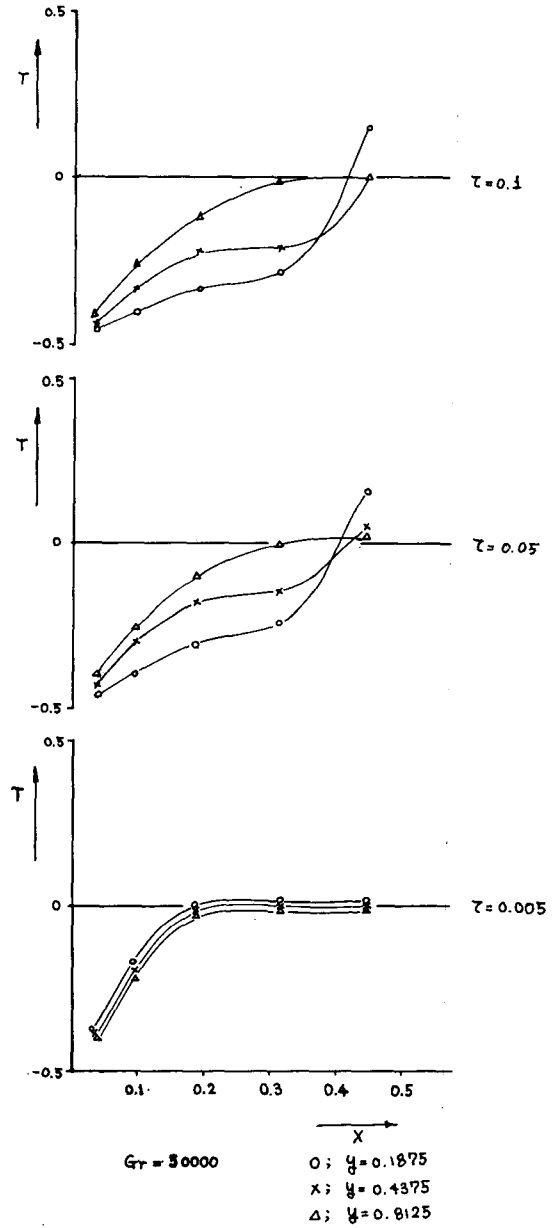


Fig. 22 Dimensionless temperature distributions at 3 different heights for Grashoff number 5×10^4 ($H/L = 1$)

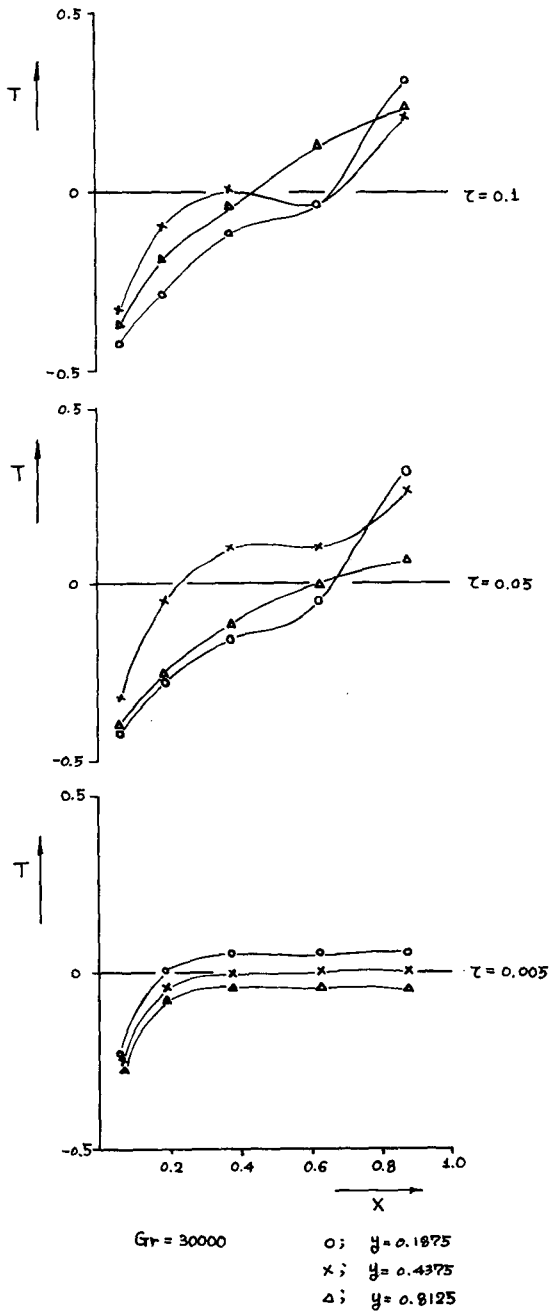


Fig. 23 Dimensionless temperature distributions at 3 different heights for Grashoff number 3×10^4 ($H/L = 0.5$)

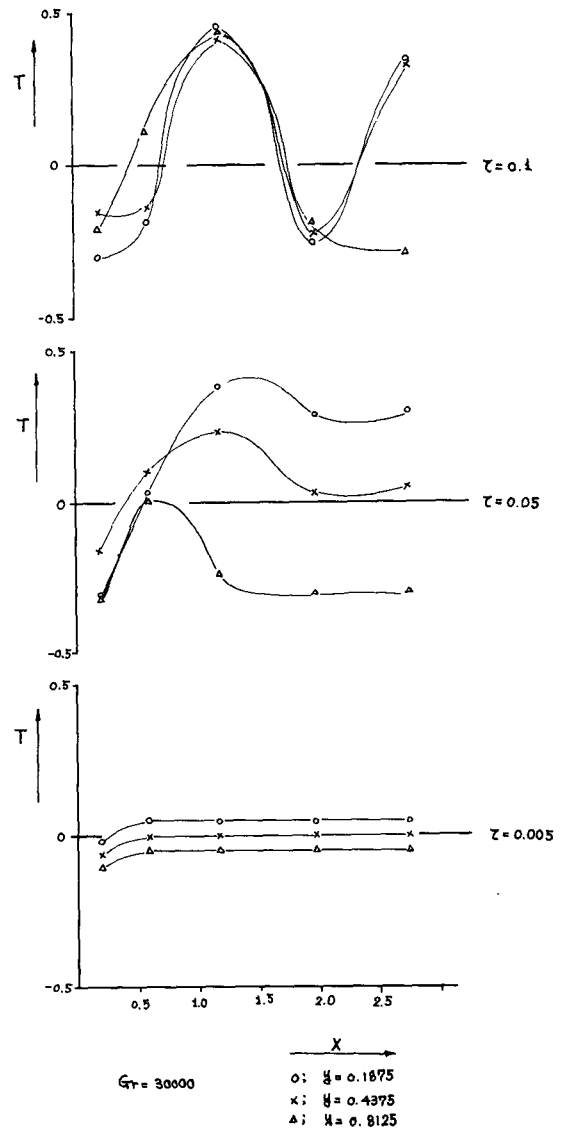


Fig. 24 Dimensionless temperature distributions at 3 different heights for Grashoff number 3×10^4 ($H/L = 0.2$)

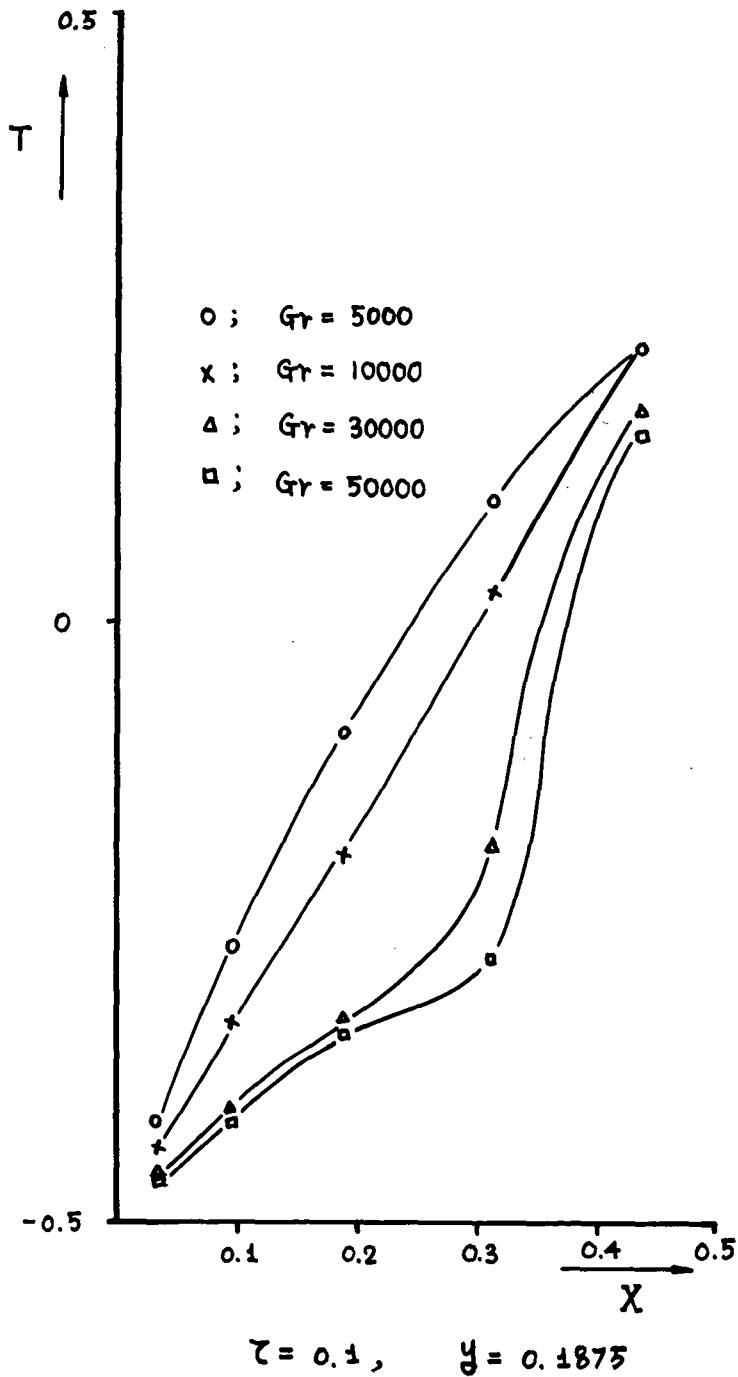
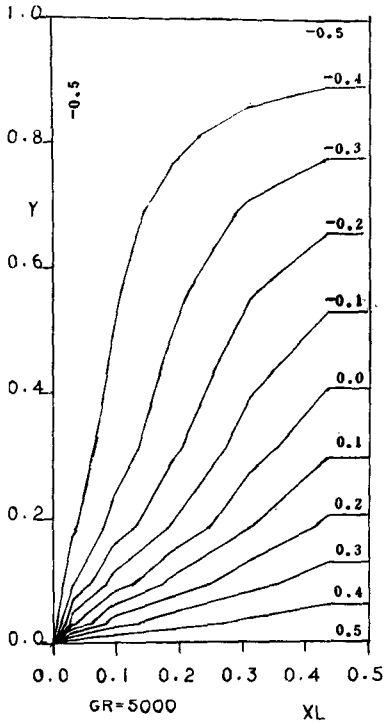
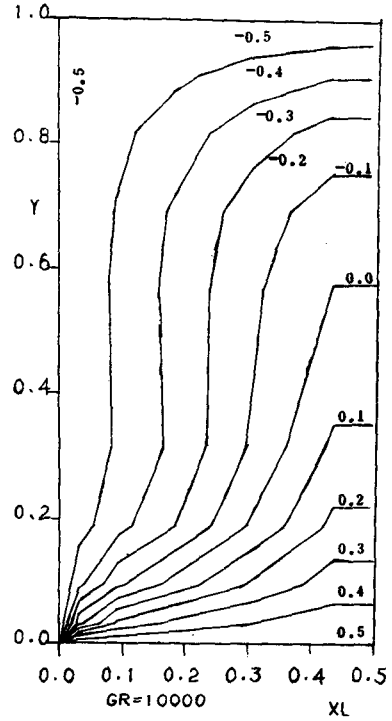


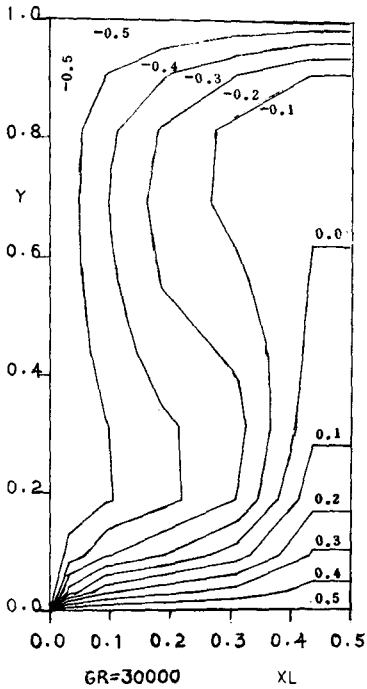
Fig. 25 Dimensionless temperature profiles for various Grashoff numbers at a specific height $Y = 0.1875$ ($\tau = 0.1, H/L = 1$)



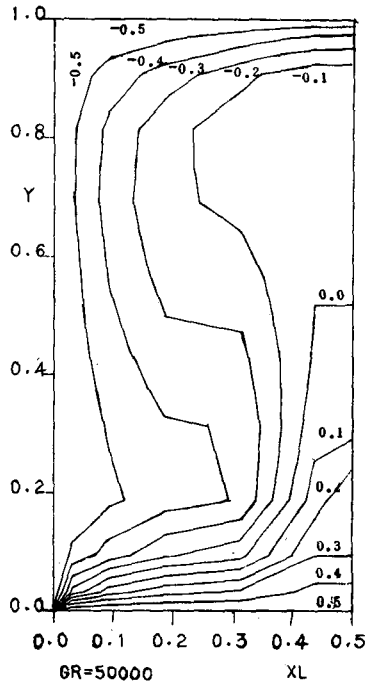
a) $N_{Gr} = 5 \times 10^3$



b) $N_{Gr} = 1 \times 10^4$



c) $N_{Gr} = 3 \times 10^4$



d) $N_{Gr} = 5 \times 10^4$

Fig. 26 Steady state dimensionless isotherms for various Grashoff numbers ($\tau = 0.15$, $H/L = 1$)

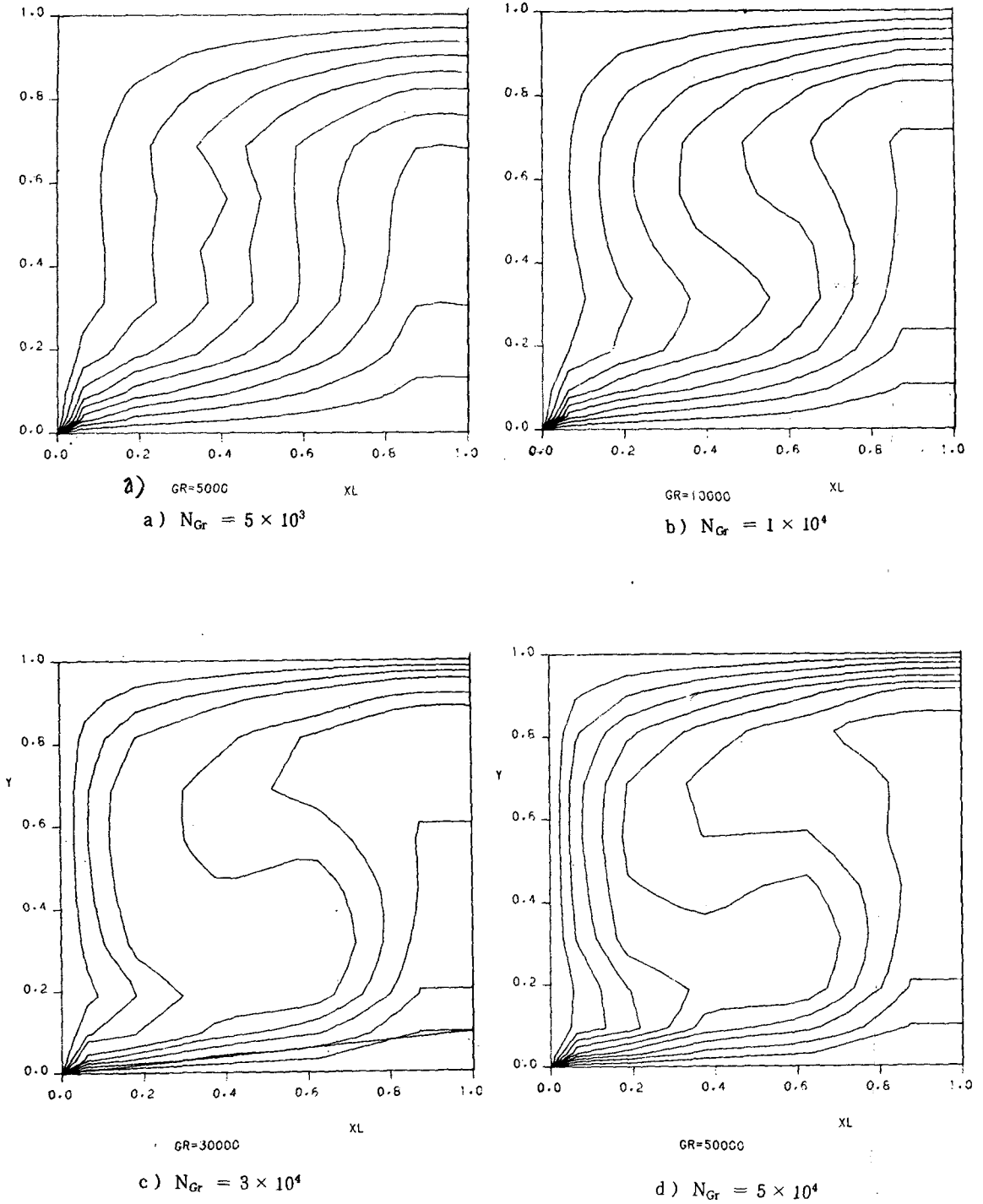
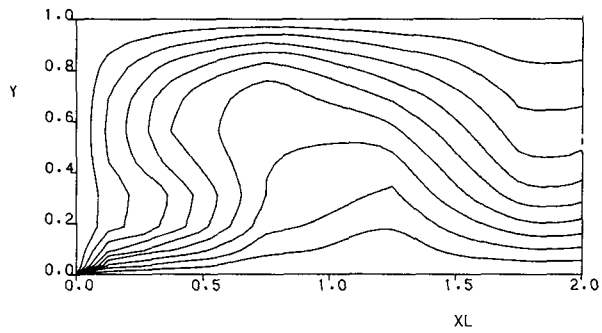


Fig. 27 Steady state dimensionless isothermals for various Grashoff numbers ($\tau = 0.15$, $H/L = 0.5$)

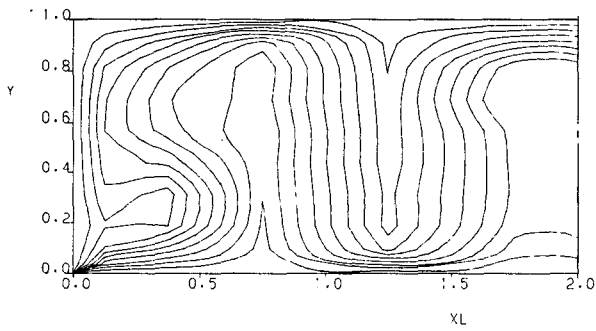
閱滿基



a)

GR=10000

a) $N_{Gr} = 1 \times 10^4$

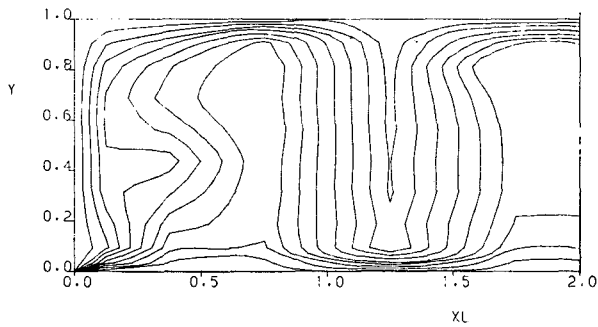


(c)

b)

GR=30000

b) $N_{Gr} = 3 \times 10^4$



c)

GR=50000

c) $N_{Gr} = 5 \times 10^4$

Fig. 28 Steady state dimensionless isothermals
for various Grashoff numbers ($\tau = 0.15$
 $H/L = 0.25$)

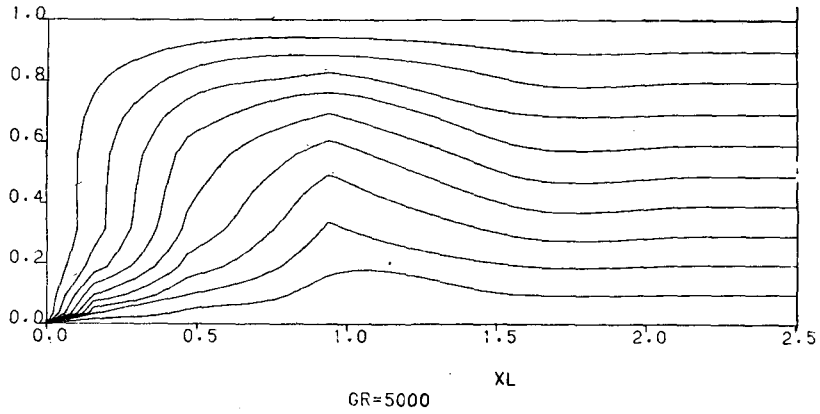


Fig. 29 Steady state dimensionless isothermals for Grashoff number 5×10^3 ($\tau = 0.15$, $H/L = 0.2$)

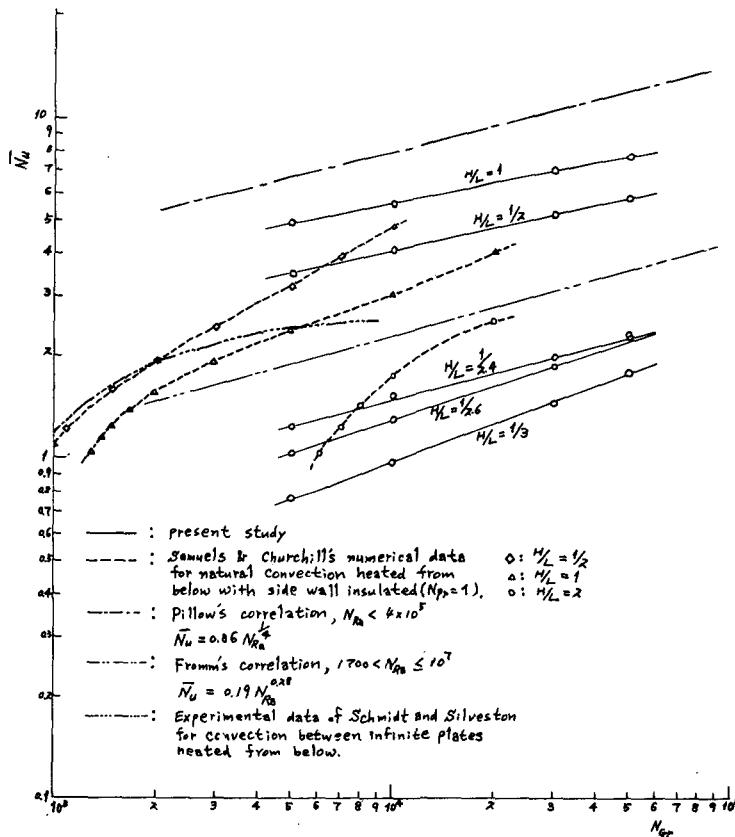
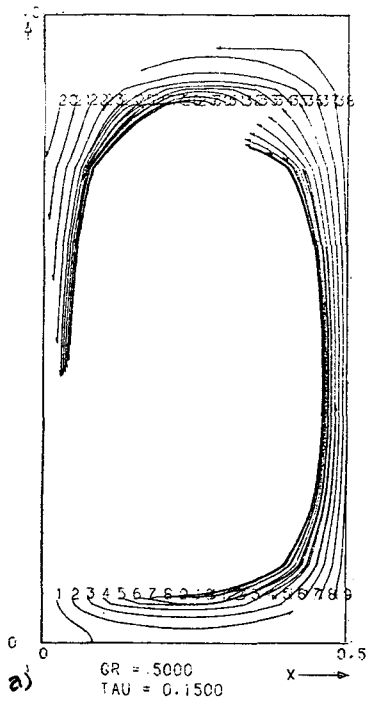
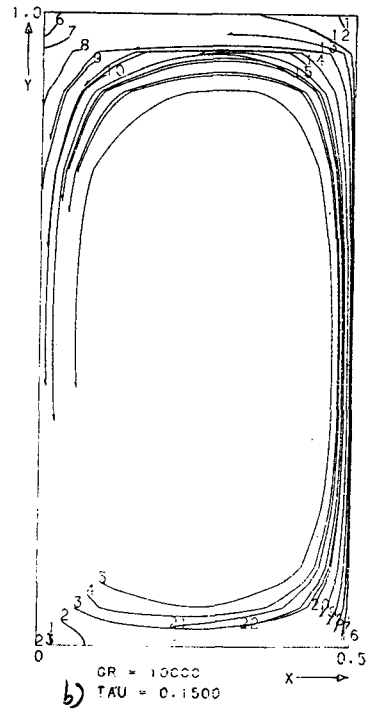


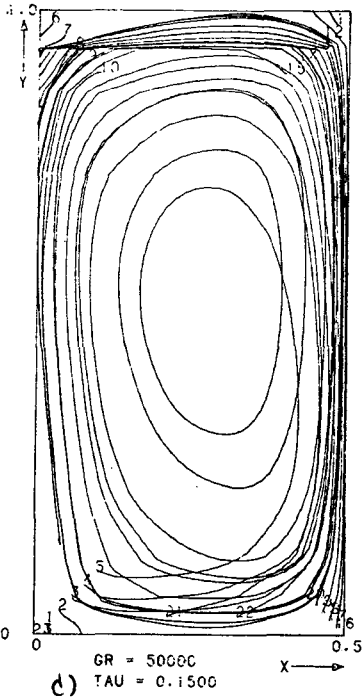
Fig. 30 Comparison of this study with published correlations for heat transfer in rectangular enclosures.



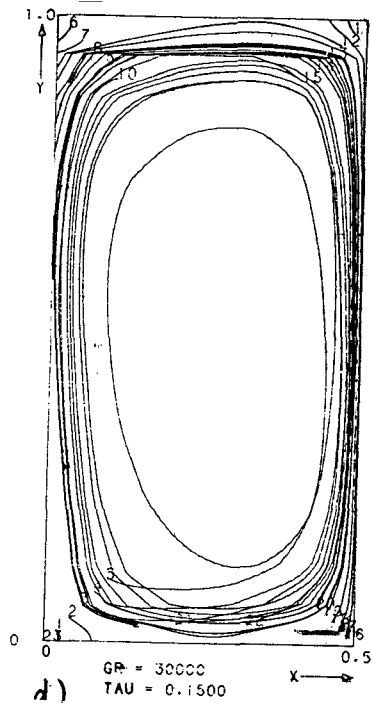
a) TAU = 0.1500



b) TAU = 0.1500

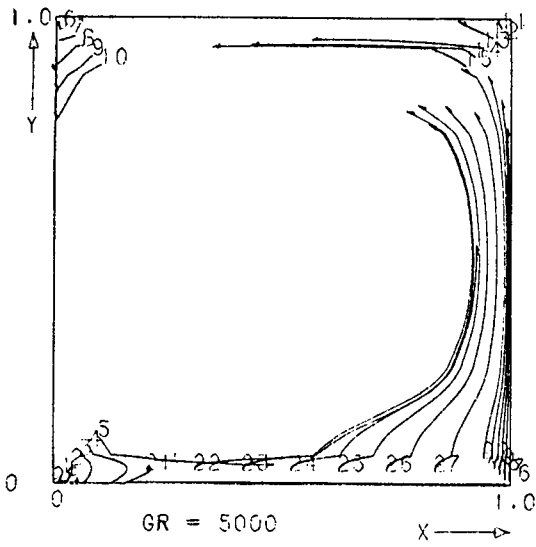


c) TAU = 0.1500

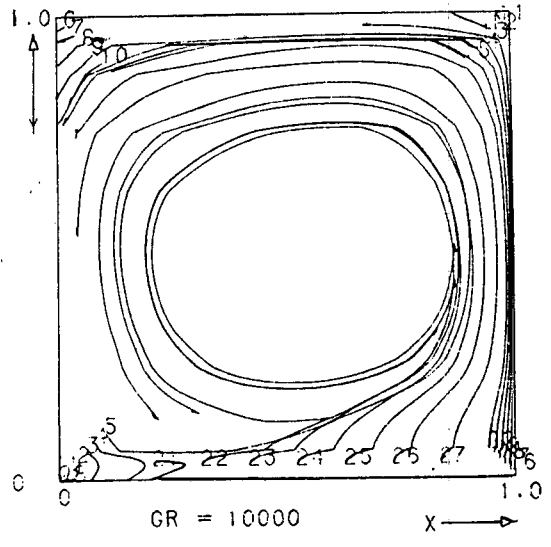


d) TAU = 0.1500

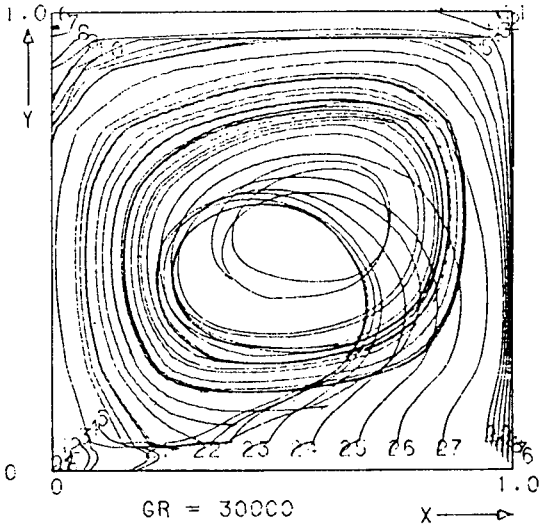
Fig. 31 Configurations of trajectories of 22 markers. (H/L = 1)



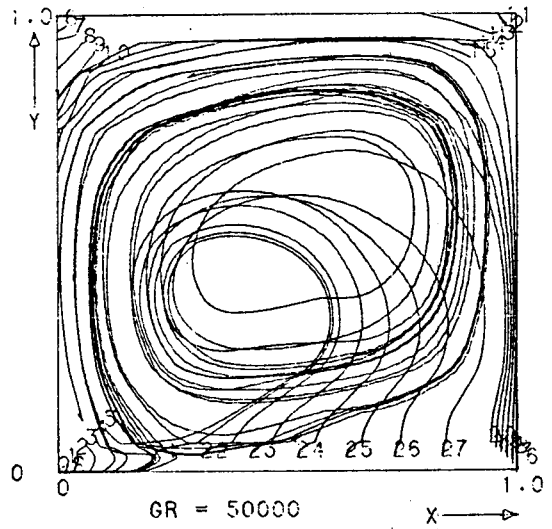
a) TAU = 0.1500



b) TAU = 0.1500



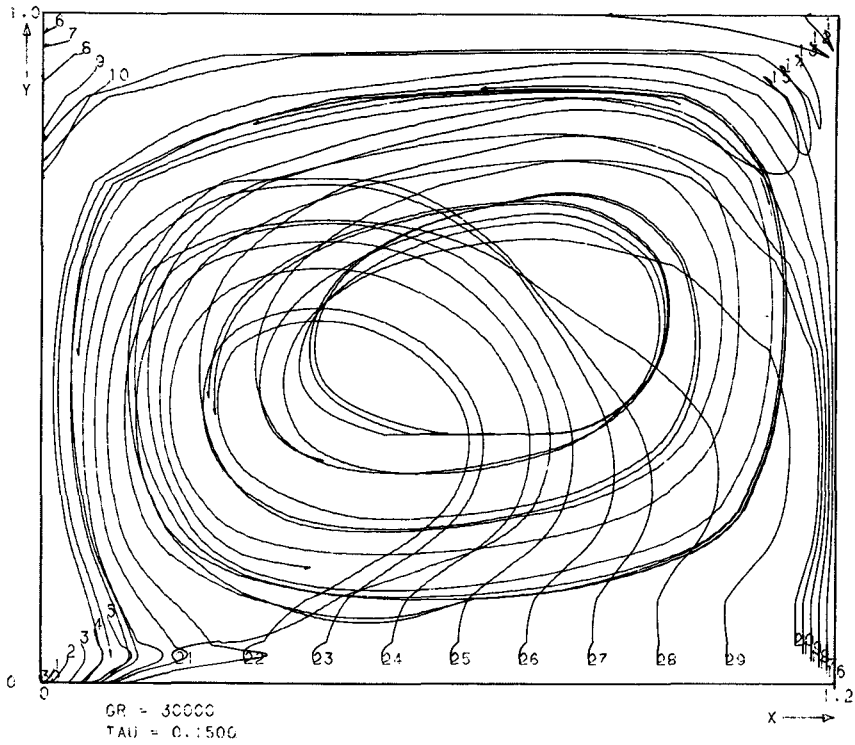
c) TAU = 0.1500



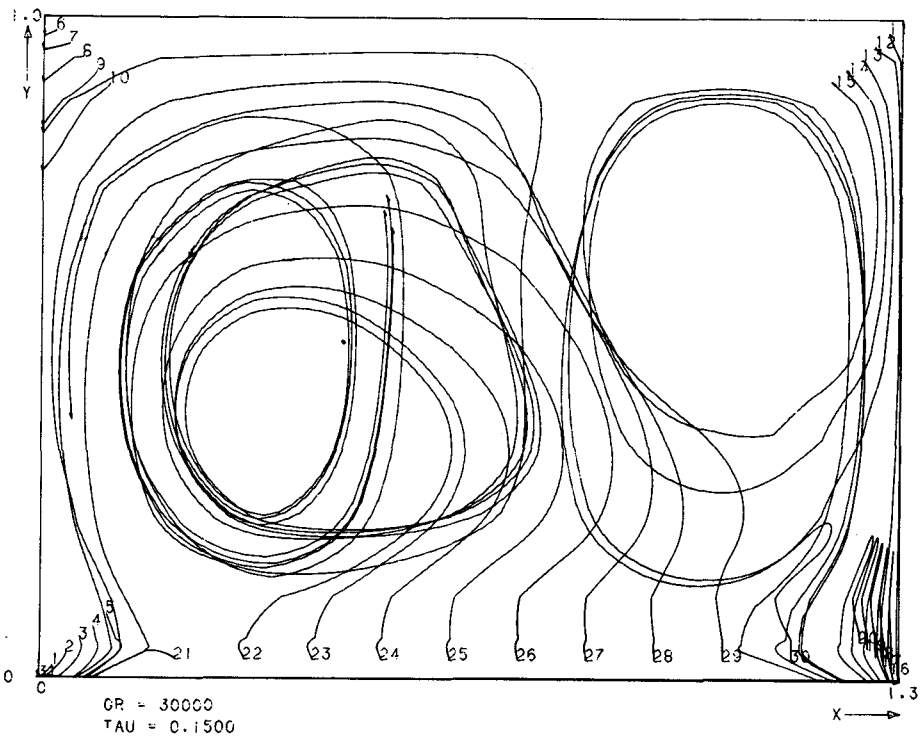
d) TAU = 0.1500

Fig. 32 Configurations of trajectories of 27 markers. ($H/L = 0.5$)

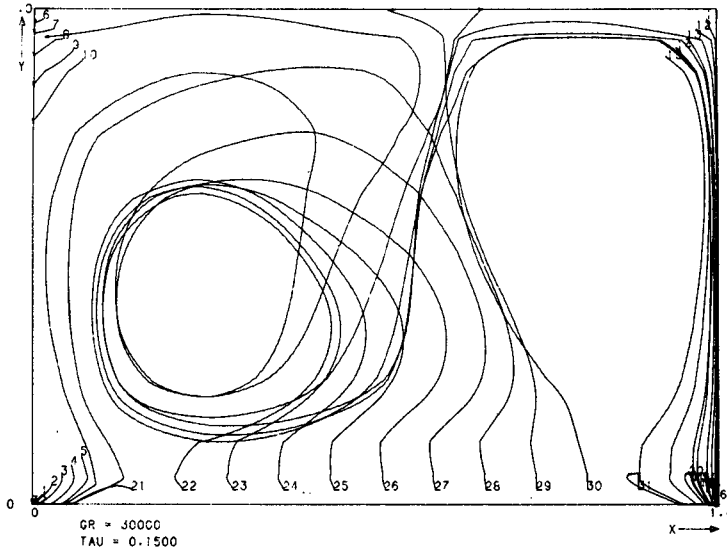
閔滿基



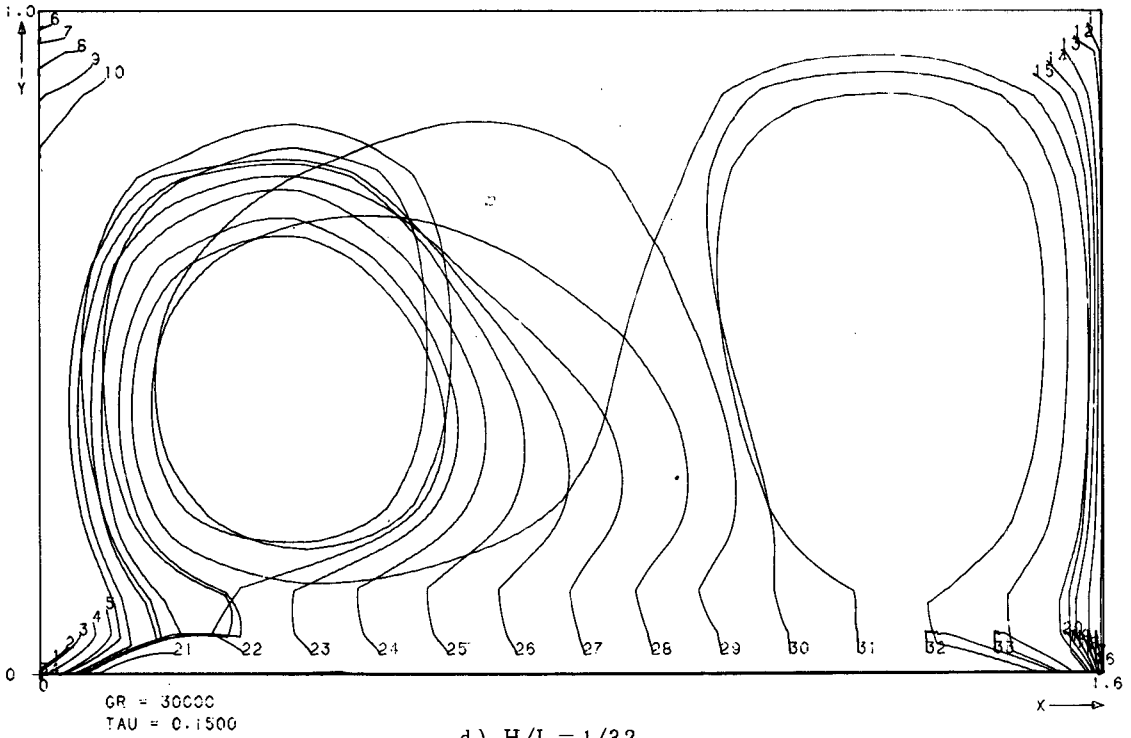
a) $H/L = 1/2.4$



b) $H/L = 1/2.6$



c) $H/L = 1/2.8$



d) $H/L = 1/3.2$

Fig. 33 Configurations of trajectories of 30 markers for various aspect ratio.
Grashoff number 3×10^4

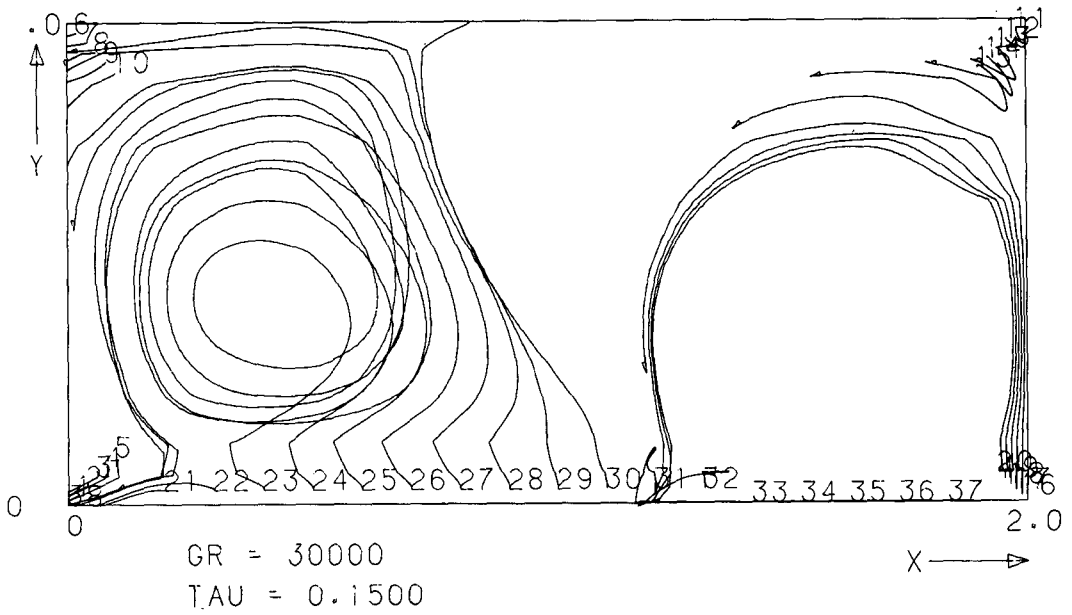


Fig. 34 Configurations of trajectories of 37 markers. ($H/L = 0.25$)