

亂流流動과 亂流熱傳達의 數值解析

崔 英 惇

<高麗大 工大 機械工學科 · 工博>

1. 序 論

많은 工學問題에서 亂流流動과 亂流熱傳達 現象을 發見할 수 있다. 이런 問題에서 流動의 速度分布나 摩擦抵抗 등의 流動特性과 熱傳達特性에 관한 知識이 요구되는 경우가 많다. 實驗에 의해서 이와 같은 사항들을 구할 수 있으나 이 방법은 流動特性과 境界條件이 變할 때마다 實驗을 해야하므로 불편한 점이 많다. 따라서 쉽게 여러 形態의 境界條件에 적용될 수 있는 亂流流動의 解析法이 연구되어 왔다.

그러나 일반적으로 亂流流動과 熱傳達方程式의 完全解는 구하기가 어려우므로 積分方程式등에 의하여 近似解를 구하거나 컴퓨터를 이용한 數值解析法으로 解를 구하고 있다. 요즘은 컴퓨터의 발달로 數值解析法이 널리 사용되고 있는데 亂流流動의 數值解析計算은 종종 收斂이 잘 되지 않거나 解析結果가 實驗結果와 잘 일치하지 않는 경우가 많다.

本 講座에서는 數值解析 計算의 收斂과 解의 正確度에 가장 큰 영향을 미치는 亂流모델의 設定과 亂流流動과 熱傳達의 基本方程式을 數值解析하기 위하여 差分型方程式 (finite difference equation)으로 전환하는데 발생하는 문제점을 檢討하고자 한다.

2. 亂流모델의 設定

亂流流動을 解析하기 위해서는 먼저 波動速度 (fluctuation velocity)를 포함한 亂流流動의 基本方程式을 유도하고 波動成分이 포함된 항들에 대한 亂流모델의 設定이 필요하다. 亂流모델은 어떻게 정하며, 亂流모델 設定에서 문제점은 무엇이며, 여타가지 모델의 차이점은 무엇인지를 檢討해 보자.

說明의 편의상 二次元 境界層流動에 대하여 검토해 보자. 二次元流動이나 軸對稱流動의 基本方程式은 아래와 같다.

[運動方程式]

$$\bar{\rho}\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x} + \bar{\rho}\bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} = -\frac{d\bar{p}}{dx} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial y}(r\tau) \quad (1)$$

[에너지方程式]

$$\begin{aligned} \bar{\rho}\bar{u}C_p\frac{\partial\bar{T}}{\partial x} + \bar{\rho}\bar{v}C_p\frac{\partial\bar{T}}{\partial y} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial y}(-\dot{q}_y) \\ + \bar{u}\frac{d\bar{p}}{dx} + \tau\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} \end{aligned} \quad (2)$$

[連續方程式]

$$-\frac{\partial}{\partial x}(r\bar{\rho}\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y}(r\bar{\rho}\bar{v}) = 0 \quad (3)$$

直交座標系에서 二次元流動일 경우는 위의 식에서 $r=1$ 으로 하던 된다. 여기서

$$\tau = \mu\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} - \bar{\rho}\bar{u}'\bar{v}' \quad (4)$$

이고

$$q_s = -\lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + \bar{\rho} C_P \overline{v'T'} \quad (5)$$

이다. 위의 方程式들이 層流流動의 基本方程式과 다른점은 레이놀드 스트레스 항 $\bar{\rho} \overline{u'v'}$ 와 亂流熱流動率(turbulent heat flux) $\bar{\rho} C_P \overline{v'T'}$ 항이 첨가된 것이다. 式 (1), (2), (3)을 解析하기 위해서는 $\bar{\rho} \overline{u'v'}$ 항과 $\bar{\rho} C_P \overline{v'T'}$ 항에 대한 亂流모델의 設定이 필요하다.

일반적으로 亂流모델은 Boussinesq의 假定을 사용하느냐 않느냐에 따라서 大別할 수 있다. Boussinesq의 假定을 사용한 레이놀드 스트레스에 대한 亂流모델은

$$-\bar{\rho} \overline{u_i u_j} = \mu_T \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \left(\mu_T \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} + \bar{\rho} k \right) \delta_{ij} \quad (6)$$

이며, 이 모델은 渦粘性係數모델이라고도 한다. 境界層流動에 式(6)을 적용하면

$$-\bar{\rho} \overline{u'v'} = \mu_T \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (7)$$

$$-\bar{\rho} C_P \overline{v'T'} = \lambda_T \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \quad (8)$$

가 된다. μ_T 와 λ_T 는 流動條件과 境界條件에 따라 변하는 係數이므로 이 係數에 대한 모델設定이 역시 필요하다. μ_T 와 λ_T 의 모델設定方法을 정리해보자.

2.1. 0-方程式 모델

亂流모델은 일반적으로 渦粘性係數 μ_T 와 亂流熱擴散係數 λ_T 의 모델을 設定하기 위하여 풀어야 할 常微分方程式과 偏微分方程式의 數에 따라서 0-方程式모델, $\frac{1}{2}$ -方程式모델, 1-方程式모델, $1\frac{1}{2}$ -方程式모델, 2-方程式모델로 分類된다.

0-方程式모델이란, μ_T 나 λ_T 를 設定하기 위하여 微分方程式을 풀지 않고 μ_T 나 λ_T 를 局部的인 流動特性的 函數로 표시하는 방법으로 가장 간단하고 널리 사용되어온 모델이다. 流動의 境界條件이 단순한 流動에서는 이 모델로 쉽고 정확하게 亂流流動을 解析할 수 있다. 이 모델이 가장 성공적으로 사용된 것은 Prandtl의 混合거리(mi-

xing length) 理論이라 하겠다. 混合거리 理論에 따르면 渦粘性係數는

$$\mu_T = \bar{\rho} l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \quad (9)$$

이 된다. 여기서 l 은 混合거리로 작은 流體덩어리가 運動量을 잃지 않으며 움직일 수 있는 거리로 분자운동에서 mean free path와 비슷한 것이다. 여기서 $l \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|$ 는 亂流特性速度(v_T)로 解析되므로 式 (9)는 $\mu_T = \bar{\rho} v_T l$ 이 된다. 일반적으로 l 은 壁面の 영향을 많이 받는 Inner region의 完全亂流區域(fully turbulent region)에서는 $l = \kappa y$ 가 되며 壁面에 가까운 層流亞層(laminar sublayer)에서는 y^2 에 비례한다고 알려져 있다.¹⁾ 혼합거리를 固體壁面으로부터 完全亂流區域까지 하나의 식으로 표시하는 방법이 여러가지 있으나 van Driest의 damping function을 사용하는 방법이 가장 널리 사용되는 방법이다. van Driest의 damping function을 사용하면 혼합거리는

$$l = \kappa y \left(1 - e^{-y^+ / A^+} \right) \quad (10-a)$$

$$= \kappa y D \quad (10-b)$$

가 된다. 여기서 $D = 1 - e^{-y^+ / A^+}$ 는 van Driest의 damping function이고 A^+ 는 압력구배와 壁으로부터의 流體流入速度에 따라 변하는 값으로 압력구배와 流體의 流入이 없는 경우는 $A^+ = 26$ 이 일반적으로 사용된다.

壁面的 영향이 적은 Outer region에서의 渦粘性係數는 Clauser 모델²⁾

$$\mu_T = \alpha \bar{\rho} u_c \delta^* \quad (11)$$

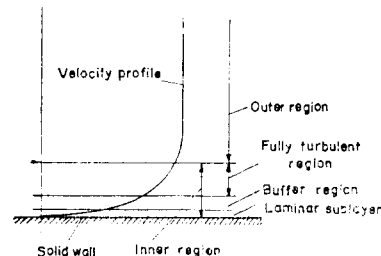


그림 1. 亂流流動의 速度分布圖

가 사용되거나 一定混合거리모델

$$l = C\delta^* \quad (12)$$

가 사용된다. 여기서 δ^* 는 變位두께로

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{\bar{u}}{u_e}\right) dy \quad (13)$$

이다. C 는 상수로 대략 0.09 정도의 값을 갖는다. Inner region과 Outer region의 境界點은 境界層 두께의 약 22%되는 위치인데 일반적으로

$$y_c = \frac{C\delta}{K} \quad (14)$$

로 계산한다. 일반적으로 管流動에서는 式 (11)과 같은 형태의 亂流모델이 Outer region에서 적합하고 平板위의 流動에서는 式 (12)와 같은 亂流모델이 적합하다고 알려져 있다.³⁾

다음으로 檢討해보아야 할 사항은 亂流熱流動率의 모델設定이다. 亂率熱流動率은 亂流 Prandtl數, $P_{r,T}$ 를 사용하면

$$-\bar{\rho} C_p \bar{v}' T' = \frac{\bar{\rho} C_p \mu_T}{P_{r,T}} \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} \quad (15)$$

로 표시된다. 따라서 $P_{r,T}$ 의 모델만 설정해주면 된다. $P_{r,T}$ 는 일반적으로 0.89~0.9 정도의 값으로 거의 일정한 값을 가지나 壁面 가까운 곳에서는 1.5~1.7로 증가하고 壁에서 멀리 떨어진 구역에서는 0.6~0.7로 감소한다고 알려져 있다.^{3),4)} $P_{r,T}$ 는 층류 Prandtl數(P_r)에 따라서도 변하며 P_r 이 감소하면 일반적으로 $P_{r,T}$ 는 증가한다.³⁾ 공기의 亂流解析에서는 흔히 $P_{r,T}=0.9$ 로 가정하고 計算한다.

혼합거리모델을 사용한 0-方程式모델은 간단하여 널리 사용되어온 모델이지만 l 값이 根本적으로 實驗에 의해서 구해진다는 것과 l 값을 정할 때 上流의 亂流構造의 영향을 考慮하지 않는다는 概念的 缺陷이 있다. 따라서 流動形態가 복잡해지면 이 모델은 적용하기가 어렵고 概念的으로 더 進歩된 모델이 요구된다.

2.2. $\frac{1}{2}$ 方程式모델, 1-方程式 모델

μ_T, ν_T, l 값을 구하는데 上流의 亂流構造의 영향을 考慮하기 위하여 1개의 常微分方程式을 푸

는 경우를 $\frac{1}{2}$ -方程式모델이라 하고 1개의 偏微分方程式을 푸는 경우를 1-方程式모델이라 한다. $\frac{1}{2}$ -方程式모델은 한 방향만의 전달방정식(transport equation)을 풀기 때문에 간략하고, 정해 줄 모델상수가 적어서 어느 경우에는 1-方程式 모델보다 좋은 결과를 준다. 그러나 1-方程式 모델은 概念的으로 더 一般性이 있어서 더 광범위한 流動條件에 적용할 수 있다.

혼합거리모델에서 概念的으로 결합이라 할 수 있는 것은 $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = 0$ 일 때 μ_T 가 0이 되는 것이다.

그러나 μ_T 를 실제로 測定해보면 $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = 0$ 인 경우 반드시 μ_T 가 0이 되는 것은 아니다. λ_T 에 대해서도 마찬가지이다. 이 점을 보완한 모델이 Prandtl-Kolmogorov의 亂流運動에너지 모델이다. 이 모델은 $\mu_T = \rho \nu_T l$ 에서 ν_T 가 亂流運動에너지

$$k = \frac{1}{2} \overline{u_i' u_i'} = (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}) / 2 \quad (16)$$

의 平方根에 비례한다고 가정한다. 따라서

$$\mu_T = C_K \bar{\rho} k^{1/2} l \quad (17)$$

이 되어서 μ_T 는 $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = 0$ 인 경우에 반드시 0이 되지 않는다. k 값은 Navier-Stokes 方程式에서 유도된 亂流運動에너지 保存方程式

$$\bar{\rho} \frac{Dk}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{\rho} \overline{v'k'} + \overline{v'p'} - \nu \frac{\partial k}{\partial y} \right) - \bar{\rho} \overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \mu \left(\frac{\partial \bar{u}'}{\partial y} \right)^2 \quad (18)$$

에서 얻을 수 있다.

레이놀드數가 클 경우 亂流모델을 적용하면

$$\bar{\rho} \frac{Dk}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left(\nu + \frac{\mu_T}{P_{r,K}} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right\} + \mu_T \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 - \frac{C_D \rho k^{3/2}}{l} \quad (19)$$

가 된다.

여기서 $P_{r,K}$ 는 亂流에너지에 대한 Prandtl數이다. 式 (19)의 우변 3항은 레이놀드數가 클 때 적용되는 식이므로 式 (19)를 流速이 작은 壁附近에서 적용하는 것은 적합하지 않다. 壁面附近에서 k 값을 구하기 위하여 式 (19)의 우변 3항에 壁面의 영향이 考慮된 모델을 設定하여 式 (19)를 解析하기도 하고⁵⁾, $y^+ < 50$ 이어서 壁에 가

가운 곳에서는 0-方程式 모델을 사용하고 $y^+ > 50$ 이어서 벽에서 먼 곳에서는 식(19)를 풀어서 μ_T 를 구하기도 한다.⁶⁾

2.3. $1\frac{1}{2}$ -方程式 모델, 2-方程式 모델

1-方程式 모델에서 길이變數(length parameter)는 혼합거리를 사용하였다. 그러나 길이變數도 역시 上流流動의 亂流構造의 영향을 받는다는 일반적인 견해에 따라 이 영향을 考慮한 길이變數를 구하려는 노력이 진행되어 왔다.

길이變數를 구하기 위하여 1개의 常微分方程式을 푸는 경우가 $1\frac{1}{2}$ -方程式 모델이고, 하나의 偏微分方程式을 사용하는 경우가 2-方程式 모델이다.

Pletcher⁷⁾가 $1\frac{1}{2}$ -方程式 모델을 사용하여 流動剝離現象이 일어나는 流動을 解析해본 結果는 $1\frac{1}{2}$ -方程式 모델과 거의 비슷한 結果를 보여 주었다.

길이變數에 대하여 식(18)과 같은 保存方程式을 풀어서 l 을 구하고 이 값을 식(17)에 代入하여 μ_T 를 구하려는 연구가 있었으나 實效를 거두지 못하고, 亂流에너지消滅率에 대한 保存方程式과 식(18)을 동시에 풀어서 μ_T 를 구하는 방법은 實效를 거두고 있다.⁸⁾ 일반적으로 亂流에너지消滅率은 $\varepsilon = Ck^3/l^2$ 로 가정되고 渦粘性係數 μ_T 는

$$\mu_T = C\mu\bar{\rho}k^2/\varepsilon = C'\bar{\rho}k^{1/2}l \quad (20)$$

로 계산된다. Jones and Launder⁹⁾가 제시한 ε 에 대한 保存方程式은 다음과 같다.

$$\bar{\rho} \frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tau_T}{P_r\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + \frac{C_1 \mu_T \varepsilon}{k} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 - \frac{C_2 \bar{\rho} \varepsilon^2}{k} \quad (21)$$

여기서 P_r 은 ε 에 대한 Prandtl數이고 C_1 , C_2 는 常數이다.

1-方程式 모델, 2-方程式 모델 등의 次元 높은 亂流 모델은 一般성이 큰 모델이므로 여러가지 形態의 流動에 共通적으로 적용될 수 있는 반면 正確한 解析結果를 얻기 위해서는 식(19), 식(21)에서 모델 常數들을 적절히 選定해주어야 한다. 따라서 流動條件이 단순한 流動에서는 모

델常數가 적은 0-方程式 모델, $1\frac{1}{2}$ -方程式 모델이 오히려 좋은 解析結果를 주기도 한다.

2.4. 레이놀드 스트레스 方程式 모델

2-方程式 모델은 進歩된 亂流 모델이지만 Boussinesq의 假定을 사용하고 있으므로 Boussinesq의 假定이 맞지 않는 運動에서는 적합하지 못하다고 할 수 있다. Boussinesq의 假定에 의하면 $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ 가 0일 때 $\overline{u'v'}$ 도 0이 되어야 하는데 二重同心管과 같이 流動分布가 非對稱인 流動에서는 이 假定이 맞지 않는다.⁹⁾

$\overline{u'v'}$ 에 대해서 더 一般的인 모델은 $\overline{u'v'}$ 에 대한 偏微分方程式을 직접 푸는 방법이다. 이 偏微分方程式은 레이놀드 스트레스 方程式이라 하며 Navier-Stokes 方程式에서 유도된다. 非壓縮性 流體에서 레이놀드 스트레스 方程式은 다음과 같다.¹⁰⁾

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{u_i' u_j'} + \overline{u_j' u_k'} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \overline{u_i' u_k'} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} \\ + \bar{u}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_i' u_j'} = - \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_i' u_j' u_k'} \\ - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \overline{p' u_j'} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{p' u_i'} \right) \\ + \frac{1}{\rho} \overline{p' \left(\frac{\partial u_j'}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right)} \\ + \nu \frac{\partial^2 \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_i \partial x_i} - 2\nu \frac{\partial \overline{u_i' \partial u_j'}}{\partial x_i \partial x_i} \end{aligned} \quad (22)$$

이 모델에서는 일반적으로 식(22)에서 $\overline{u'v'}$, $\overline{u'^2}$, $\overline{v'^2}$, $\overline{w'^2}$ 에 대한 偏微分方程式을 풀고 ε 에 대한 保存方程式을 풀어야 하기 때문에 대단히 방대한 計算과 亂流 모델의 적용이 필요하다. 따라서 아직 工學的인 問題에는 거의 이용되고 있지 못하다. 이 모델을 工學問題에 이용하려면 많은 연구가 필요하다고 생각된다.

3. 差分型 方程式의 樹立

基本方程式이 誘導되고 亂流 모델이 設定되면 基本方程式을 數值解析하기 위하여 差分型(finite difference)으로 轉換시켜야 한다. Taylor級數

를 이용하여 轉換시키는 방법과 node 를 둘러싼 control volume에서 基本方程式을 積分하여 轉換시키는 방법이 있다. control volume에 의한 방법은 運動量, 에너지등의 保存法則을 만족시켜주어 物理的 意味를 더 많이 제공하므로 바람직한 방법이라 하겠다. 一般的으로 差分方程式을 만들 때 二次微分項 以上은 생략하는데 流動特性이 指數的으로 변할 경우 이 방법은 不正確한 解를 산출하거나 計算값이 收斂이 잘 되지 않게 한다. 亂流流動의 數值解析에서 이 문제는 대단히 중요한 사항이므로 이에 관하여 검토해보자.

方程式 (1), (2), (19), (21) 등의 保存方程式을 一般化한 式으로 나타내면

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\phi) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\bar{u}_j\phi) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right) + S \quad (23)$$

이 된다. 여기서 ϕ 는 流動特性이고 Γ 는 擴散係數이고 S 는 source項이다. 說明의 편의상 一次元流動이고 source項이 없는 流動을 檢討해 보자. 式(23)은

$$\frac{d}{dx}(\bar{\rho}\bar{u}\phi) = \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right) \quad (24)$$

가 되고 連續方程式은

$$\frac{d}{dx}(\bar{\rho}\bar{u}) = 0 \quad \text{혹은} \quad \bar{\rho}\bar{u} = C \quad (25)$$

이 된다. 差分型方程式을 얻기 위해서 그림 2의 control volume에서 式(24)를 w 에서 e 까지 積分해 보자. 여기서 w 는 W 와 P 의 中點이고 e 는 P 와 E 의 中點이다. 積分하는 方法의 差異가 解에 어떤 영향을 미치는가를 檢討해 보자.

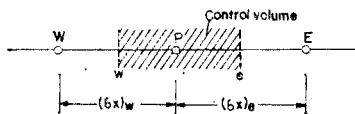


그림 2. 1차원 유동의 grid와 control volume.

3.1 Central Difference Method

式 (24)를 w 에서 e 까지 積分하면

$$(\bar{\rho}\bar{u}\phi)_e - (\bar{\rho}\bar{u}\phi)_w = \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right)_e - \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right)_w \quad (26)$$

가 된다. ϕ 의 分布가 線形的이라고 假定하면

$$\phi_e = \frac{1}{2}(\phi_E + \phi_P), \quad \phi_w = \frac{1}{2}(\phi_P + \phi_W) \quad (27)$$

이 된다. 따라서 式 (26)은

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\bar{\rho}\bar{u})_e(\phi_E + \phi_P) - \frac{1}{2}(\bar{\rho}\bar{u})_w(\phi_P + \phi_W) \\ &= \frac{\Gamma_e(\phi_E - \phi_P)}{(\delta x)_e} - \frac{\Gamma_w(\phi_P - \phi_W)}{(\delta x)_w} \end{aligned} \quad (28)$$

가 된다. $F \equiv \bar{\rho}\bar{u}$, $D \equiv \frac{\Gamma}{\delta x}$ 로 定義하고 式 (28)을 정리하면

$$a_P\phi_P = a_E\phi_E + a_W\phi_W \quad (29-a)$$

$$a_E = D_e - \frac{F_e}{2} \quad (29-b)$$

$$a_W = D_w + \frac{F_w}{2} \quad (29-c)$$

$$a_P = a_E + a_W + (F_e - a_w) \quad (29-d)$$

가 된다. 여기서 下添字는 각 點의 위치를 나타낸다. 連續方程式에서 $F_e = F_w$ 이므로 $a_P = a_E + a_W$ 가 얻어진다. 이와 같이 差分型方程式을 만드는 法을 Central difference method라 한다. 그런데 만약 어떤 流動에서

$$D_w = D = 1 \text{ 이고 } F_e = F_w = 4,$$

$$\phi_E = 200 \text{ 이고 } \phi_W = 100$$

이었다면 式 (29-d)에서 $\phi_P = 50$ 됨을 알 수 있다. 그런데 이것은 物理的으로 實在性이 없는 결과이다. 이것은 擴散係數에 相對的으로 速度가 커서 $|F| > 2D$ 일 경우 생기는 현상이다. 이 경우 數值解는 收斂하지 않고 發散한다. 따라서 一般的으로 Central difference method는 레이놀드수가 작은 層流流動에는 적합하지만 레이놀드수가 큰 亂流流動에서는 數值解의 收斂이 잘 되지 않게 한다. 이 방법으로 수치해를 收斂시키기 위해서는 grid를 작게 해주어야 한다.

3.2 Upwind Method

Central difference method의 缺點을 보완하기 위해서 Upwind method가 1950년대부터 널리 사용되어 왔다. 이 방법은 式(27)에서 ϕ_e 값으로 E 점과 P 점의 平均값을 사용하지 않고 流動의 上流에서의 ϕ 값을 택하는 방법으로

$$F_e > 0 \text{ 인 경우 } \phi_e = \phi_P \quad (30-a)$$

$$F_e < 0 \text{ 인 경우 } \phi_e = \phi_E \quad (30-b)$$

講 座

를 택한다. 따라서 윗식을 간단히 표현하면

$$F_c \phi_c = \phi_P \| \phi_c, 0 \| - \phi_E \| -F_c, 0 \| \quad (31)$$

가 된다. 여기서 $\| A, B \|$ 는 A, B 중 큰 값을 의미한다. 이 방법을 사용하는 경우 식 (29-b)~(29-d)는

$$a_E = D_c + \| -F_c, 0 \| \quad (32-a)$$

$$a_W = D_w + \| F_w, 0 \| \quad (32-b)$$

$$a_P = D_c + \| F_c, 0 \| + D_w + \| -F_w, 0 \| \quad (32-c)$$

$$= a_E + a_W + (F_c - F_w) \quad (32-d)$$

로 된다. Upwind method는 레이놀드수가 큰 경우에도 收斂이 잘되어 亂流解析에 많이 사용되고 있다. 그 이유는 다음에 說明하기로 한다.

3.3. 完全解

基本方程式을 差分型으로 고치는 과정에서 발생하는 問題點을 알아보기 위하여 식(24)의 完全解를 구해보자. $0 \leq x \leq L$ 에서 境界條件이

$$x=0 \text{에서 } \phi = \phi_0 \quad (33-a)$$

$$x=L \text{에서 } \phi = \phi_L \quad (33-b)$$

일 때 식 (24)의 完全解는

$$\frac{\phi - \phi_0}{\phi_L - \phi_0} = \frac{\exp\left(\frac{Px}{L}\right) - 1}{\exp(P) - 1} \quad (34)$$

이다. 여기서 P 는 Peclet 수로 $P = \frac{\rho \bar{u} L}{T}$ 이며 對流項과 擴散項의 세기의 比이다. 식(34)을 P 값을 변화시키며 計算하여 圖示하면 그림 3과 같다. 이 그림에서 $P=0$ 인 경우 ϕ 의 변화가 線形的이어서 Central difference method의 假定과 같다. 그러나 $|P| \gg 1$ 인 경우는 $x = \frac{L}{2}$ 의 값에서 ϕ 값은 Upwind method의 假定과 같으며 Central difference method의 假定과는 큰 차

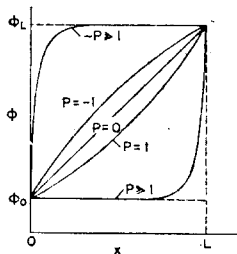


그림 3. 1차원 대류 확산 문제의 완전해

이가 있다. P 가 큰 것은 流速이 빠른 경우이다. 따라서 레이놀드수가 큰 亂流流動에서 Central difference method가 正確하지 않고 Upwind method가 더 正確한 計算結果를 주게 된다.

3.4. Exponential Method

이 방법은 식 (34)의 完全解를 差分型方程式을 만드는데 사용하는 방법으로 어떤 범위의 P 값에 대해서도 正確한 解를 준다.

$$J \equiv \bar{\rho} u \phi - \Gamma \frac{d\phi}{dx} \quad (35)$$

라고 할 때 完全解를 이용하여 e 점의 J 값을 구하면

$$J_e = F_c \left(\phi_P + \frac{\phi_P - \phi_E}{\exp(P_c) - 1} \right) \quad (36)$$

이 된다. 여기서 P_c 는 e 점의 Peclet수이다. w 점에 대해서도 식 (36)과 같은 식을 유도하여 식 (26)에 대입하여 정리하면 식 (29-a)에서 a 값은

$$a_E = \frac{F_c}{\exp(F_c/D_c) - 1} \quad (37-a)$$

$$a_W = \frac{F_w \exp(E_w/D_w)}{(F_w/D_w) - 1} \quad (37-b)$$

$$a_P = a_E + a_W + (F_c - F_w) \quad (37-c)$$

가 된다. Exponential method는 一次元流動에서는 完全히 正確하지만 컴퓨터계산비용이 많이 들므로, Exponential method와 效能이 거의 같으며 컴퓨터계산이 편리한 방법이 연구되었다. 그리고 二次元, 三次元流動과 source項이 있는 流動에서는 Exponential method가 完全히 正確하지는 않다.

3.5. Hybrid Method

이 방법은 Patankar and Spalding¹¹⁾ 등에 의해서 Exponential method를 修正한 것으로 $|P|$ 가 클 때에는 Upwind method를 쓰고 P 가 작을 때에는 Central difference method를 쓰는 방법으로 Exponential method에 近似한 解를 준다. 보통 $-2 \leq P \leq 2$ 에서 Central difference method를 쓰고 $P > 2$, $P < -2$ 에서 Upwind method를 쓴다. 이 방법을 쓰는 경우 식(29-a)에서 a_E , a_W , a_P 는

$$a_E = \left\| -F_e, D_e - \frac{F_e}{2}, 0 \right\| \quad (38-a)$$

$$a_W = \left\| F_w, D_w + \frac{F_w}{2}, 0 \right\| \quad (38-b)$$

$$a_P = a_E + a_W + (F_e - F_w) \quad (38-c)$$

가 된다.

3.6 Power-law method

完全解와 거의 一致하면서 計算하기 편리한 방법으로 Patankar¹²⁾에 의해서 제안된 방법으로

$P_e < -10$ 에서

$$\frac{a_E}{D_e} = -P_e \quad (39-a)$$

$-10 \leq P_e < 0$ 에서

$$\frac{a_E}{D_e} = (1 + 0.1P_e)^5 - P_e \quad (39-b)$$

$0 \leq P_e \leq 10$ 에서

$$\frac{a_E}{D_e} = (1 - 0.1P_e)^5 \quad (39-c)$$

$P_e > 10$ 에서

$$\frac{a_E}{D_e} = 0 \quad (39-d)$$

을 사용한다. 이 식들을 간략히 하면

$$a_E = D_e \left\| 0, \left(1 - \frac{0.1|F_e|}{D_e}\right) \right\| + \left\| 0, F_e \right\| \quad (40)$$

이 된다.

그러면 앞에서 論한 각 방법들이 一次元流動 解析에서 ϕ 값의 예측에 어떤 영향을 미치는지를 檢討해보자, 그림 2에서 $(\delta x)_e = (\delta x)_w$ 이고 $\phi_E = 1$, $\phi_W = 0$ 인 경우 P 값을 변화시키며 式 (24)을 풀어서 ϕ_P 값을 구하여 도시한 것이 그림 4이다. 이 그림은 각 방법의 차이를 보여준다. Central difference method는 $|P| < 1.5$ 일 경우는 正確

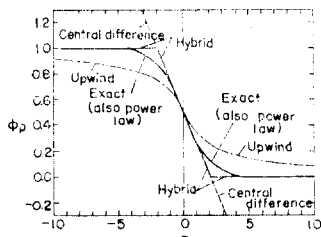


그림 4. 여러 방법으로 예측한 pecllet수의 변화에 따른 ϕ_P 의 값

한 解를 주지만 $|P| > 1.5$ 인 경우 完全解와 차이가 커진다. Upwind method는 完全解와 일치하지 않으나 全區間에서 完全解와 변화의 경향이 비슷하여 近似的으로 사용될 수 있다. Hybrid method는 $|P|$ 가 클 경우와 작을 경우 完全解와 일치하며 Power law method는 完全解와 完全히 일치한다. 그리고 Power law method는 Exponential method 보다 간이하므로 추천할 만한 방법이라 하겠다.

二次元, 三次元流動과 source 항이 있는 경우도 앞에서 논한 각 방법에 대한 원리는 같이 적용되리라 생각되나 이 방법들을 二次元, 三次元流動과 source 항이 있는 유동에 正確히 적용하려면 연구가 좀 더 되어야 된다고 생각된다.

4. 結 論

앞에서 亂流流動과 亂流熱傳達 問題를 數值解析할 때 亂流모델의 設定과 差分型方程式의 樹立에서의 問題點을 개략적으로 檢討해 보았는데 이에 관한 研究들은 주로 (1) 數值解析의 正確性, (2) 數值計算의 簡易性, (3) 광범위한 流動條件에 共通적으로 적용될 수 있는 一般性 있는 모델을 찾는 데 重點을 두고 행해지고 있다고 생각된다. 물론 이 3가지 조건이 동시에 만족되기는 어렵다고 생각된다. 그러나 數值解析하려는 流動條件과 解의 要求條件에 따라 가장 적합한 방법을 찾아야 된다고 생각된다. 亂流모델의 設定 方法과 差分型方程式의 樹立方法은 現在 많은 연구가 되고 있는 과제들이므로 앞으로 연구가 진행됨에 따라 더 正確하고, 計算이 편리하고, 一般性이 있는 모델과 解析方法이 나오리라 생각된다.

記 號 說 明

- a : 差分型 方程式의 係數
- A^* : damping 常數
- $C, C', C_1, C_2, C_D, C_\mu, \alpha$: 常數
- C_P : 定壓比熱
- D^* : van Driest의 damping function

D : $\frac{\Gamma}{\delta x}$
 F : $\bar{\rho} \bar{u}$
 k : 亂流運動에너지
 l : 混合거리
 $l\epsilon$: 亂流에너지 消滅거리
 p : 壓力
 P : Peclet 數
 P_r : Prandtl 數
 \dot{q}_y : 熱流動率
 r : 中心軸으로 부터의 거리
 u, v, w : 速度成分
 u_e : 境界層 外廊速度
 u_τ : 摩擦速度
 t : 時間
 T : 溫度
 v : $(\bar{\rho}v + \overline{\rho'v'})/\bar{\rho}$
 y_c : Inner region과 Outer region의 境界點
 y^+ : 無次先거리 ($= \frac{\rho u_\tau y}{\mu}$)
 x, y : 座標軸
 τ : 剪斷應力
 ρ : 密度
 μ : 粘性係數
 μ_T : 渦粘性係數
 λ : 熱傳導係數
 λ_T : 亂流熱傳導係數
 δ : 境界層 두께
 δ_{ij} : Kronecker delta
 δ^* : 變位 두께
 ν : 層流動粘性係數
 ϵ : 亂流에너지 消滅率
 ϕ : 流動特性
 Γ : 擴散係數
 κ : von Karman의 常數
 上添字
 $()'$: 波動成分
 $(\bar{\quad})$: 平均값
 下添字
 i, j, k, l : tensor 表記를 위한 添字

p.7, 1951
 2. T. Cebeci and A.M.O. Smith, Analysis of Turbulent Boundary Layers, Academic Press, 1974.
 3. M.E. Crawford and W.M. Kays, STAN5-A-Program for Numerical Computation of Two-Dimensional Internal/External Boundary Layer Flows, Stanford University, Rep. HMT-23, 1975.
 4. T. Cebeci, A Model for Eddy Conductivity and Turbulent Prandtl Number, Tran. of ASME, J. of Heat Transfer, May, pp. 227-234, 1973.
 5. L.H. Norris and W.C. Reynolds, Turbulent Channel Flow with Moving Wavy Boundary, Stanford University, Dep. Mech. Eng. Rep. FM-10, 1975.
 6. D.W. Kearney et al., Turbulent Boundary Layer, Experimental Heat Transfer with Strong Pressure Gradients and Blowing, Stanford University, Dep. Mech. Eng. Rep. HMT-12, 1970.
 7. R.H. Pletcher, Prediction of Incompressible Turbulent Separating Flow, Submitted to ASME, J. of Fluids Eng., 1978.
 8. W.P. Jones and B.E. Launder, Prediction of Low Reynolds Number Phenomena with a Two-Equation Model of Turbulence, Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 16, pp.1119-1130, 1973.
 9. K. Hanjalic and B.E. Launder, Contribution towards Reynolds-Stress Closure for Low-Reynolds Number Turbulence, J. Fluid Mech., vol. 74, pp.593-610, 1976.
 10. J.O. Hinze, Turbulence, 2nd ed., pp.323-324, McGraw-Hill, 1975.
 11. S.V. Patankar and D.B. Spalding, Heat and Mass Transfer in Boundary Layers, 2nd ed., Intertext, London, 1970.
 12. S.V. Patankar, A Calculation Procedure for Two-Dimensional Elliptic Situations, Num. Heat Transfer, vol. 2, to be published, 1979.

參 考 文 獻

1. H. Reichart, Ann. Angew. Math., vol. 31,
 204/Vol. 21, No. 3, 1981/大韓機械學會誌