

<論 文>

낮은 프란틀수를 가지는 유체의 원관 입구 층류유동 및 열전달

백 승 옥* · 유 정 열**

(1981년 4월 15일 접수)

Laminar Flow and Heat Transfer of the Fluid with Low Prandtl Number in the Entrance Region of a Circular Pipe

Seung Wook Baik and Jung Yul Yoo

Abstract

The flow of fluid with low Prandtl number in the entrance region of a circular pipe has been considered, where the wall temperature is maintained to be constant. A finite difference method is used for the integral form of the governing equations in order that they satisfy the conservative properties of the numerical solutions. It is confirmed that the hydrodynamic entrance length can be divided into growing boundary layer region and fully viscous region, which is compared with existing results obtained by using boundary layer approximations. By assuming the developing velocity profile in the entrance region, the thermal entrance length is estimated and the local Nusselt number is obtained at various locations along the axial direction.

1. 서 론

층류유동에서의 열전달 계수는 난류유동에서의 열전달 계수보다 현저히 작을지라도 열교환 장치설계에서 펌프동력을 감소시키기 위하여 전자를 허용하는 것이 경제적으로 유리할 경우도 있다. 특히 비교적 용융점이 낮고 열전도계수가 큰 액체금속이 사용되는 원자력 발전에서는 방출된 많은 열이 제한된 공간에서 제거되어야 하는데 이 경우에도 층류강제대류가 적용된다.

이와 같이 프란틀수가 낮은 액체금속의 원관을 통한 유동에 대한 열전달을 고려함에 있어서 열전도의 효과를 무시할 수 없으며 원관 입구에서는 속도 및 온도 경계층이 형성되는데 이 구역에서의 현상은 완전히 확립된 유동구역(fully developed flow region)에서의 현

상과 큰 차이가 있다. 따라서 입구구역(entrance region)에서의 유동 및 열전달 현상을 해석하는 것은 입구 길이(entrance length)가 상대적으로 큰 비중을 차지하는 장치설계에서는 매우 중요한 문제이다.

미끄러운 관을 통한 입구유동을 최초로 해석한 사람은 Schiller⁽¹⁾로서 경계층 내에서 포물선 속도분포의 적분해석을 사용하였다. 그러나 Schiller의 적분해는 경계층의 가장자리에서 자유유동 조건을 만족시킬 수 없으므로 근본적인 의문점이 있는 것이다. 또한 벽으로부터 성장한 경계층이 관의 단면을 완전히 채우게 되는 위치로부터 바로 완전히 확립된 유동 즉 포물선 속도분포가 얻어지는 것이 아니라, 경계층이 성장하는 구역의 하류에는 일단 유동장 전체가 점성에 의하여 영향을 받지만 완전한 포물선 속도분포를 갖지 않는 구역이 존재하고 그 구역의 하류에 비로소 완전히 확립된 유동구역이 존재한다는 사실⁽²⁾과도 일치되지 않는다고 할 수 있다. Schiller의 적분방법을 보완하기 위

* 서울대학교 공과대학 대학원

**정회원, 서울대학교 공과대학

하여 Campbell과 Slattery⁽³⁾는 경계층 내부에서 점성의 효과가 크다는 점을 고려함으로써 점성소산(viscous dissipation)을 포함한 기계적 에너지 평형에 관한 적분방법을 사용하였다.

한편, 수치해석적인 방법으로 경계층 방정식의 해를 구하거나 완전한 운동방정식의 해를 구함으로써 입구 유동 문제의 연구들이 수행되기도 하였다. 예를 들어 Vrentas, Duda와 Barger⁽⁴⁾은 경계층 방정식의 수치해를 구했을 뿐 아니라 레이놀즈수가 0, 1, 50, 150, 250인 경우에 대해서 완전한 운동방정식의 수치해를 구하여 그 결과들을 비교하였다. 그들에 의하면 레이놀즈수가 작을 때에는 입구보다 상류방향으로 와도의 축방향 확산(axial diffusion of vorticity)의 영향이 커지므로 입구에서 균일한 속도분포를 경계조건으로 설정한다는 것은 다소 문제점이 있으나 레이놀즈수가 250 이상인 경우에는 균일한 속도분포의 경계조건을 만족시키는 경계층 방정식의 해가 유동장을 적절히 서술함을 알 수 있다. 그들은 또한 입구에 매우 가까운 구역의 관 중심 근처에서 오목한 속도분포를 얻었는데, 이런 현상은 두 평행판 사이의 유동에 대해서 Wang과 Longwell⁽⁵⁾이 관측한 것과 같은 현상으로서 이 경향은 레이놀즈수가 커짐에 따라 증가하며 아마도 층류유동의 안정성에 매우 중요한 역할을 할지도 모른다고 추리하였다. Atkinson 등⁽⁶⁾은 균일한 입구 속도분포를 초기조건으로 하여 매우 느린 유동(creeping flow)과 경계층 유동에 대한 운동방정식의 해를 각각 구한 후 그 해들의 일차 결합을 취함으로써 원관과 평행판에 대한 입구길이를 레이놀즈수와 관련된 식들을 산출하였다. 최근에 Mohanty와 Asthana⁽⁷⁾는 앞서 언급된 바와 같이 입구구역을 두 부분으로 나누어서 경계층이 성장하는 구역(inlet region)에 대해서는 경계층 방정식, 완전한 점성구역(filled region)에 대해서는 크기순위(order of magnitude) 해석을 포함한 나비에-스토크스 방정식의 해를 4차 다항식으로 표시한 속도분포를 사용함으로써 구하였다.

이밖에도 원관유동에 있어서 “속도입구길이”에 대해서는 많은 연구가 이루어졌으나, “열입구길이”에 대해서는 대부분의 경우 무시되거나 또는 정성적인 설명만이 주어졌는데⁽⁸⁾, 이는 매우 대조적이라고 할 수 있다. 특히, 액체금속과 같이 낮은 프란틀수를 가지는 유체의 층류 강제대류 문제에 있어서 열 경계층이 속도경계층보다 항상 빠른 비율로 형성됨을 고려할 때 열입구 길이는 속도입구길이만큼 중요한 의미를 갖는다고 할 수 있다.

본 연구에서는 원관의 내벽이 일정한 온도로 유지될 때 입구구역 전체에 걸쳐서 완전한 운동방정식 및 에너지방정식의 해를 유한차분법을 사용하여 구함으로써 속도입구길이, 축방향의 각 위치에 따른 속도분포, 경계층 두께의 형성, 압력강하, 열입구길이, 축방향의 각 위치에 따른 온도분포, 누셀트수등을 산출하고자 한다.

2. 기본방정식과 경계조건

반경이 R이고 내벽이 일정한 온도 T_w 로 유지되는 원관으로 Fig. 1에 표시한 바와 같이 균일한 속도 U_0 , 균일한 온도 T_0 및 균일한 압력 P_0 를 가지는 비압축성 점성유체가 유입되는 경우의 층류유동 문제를 고찰한다. 입구구역의 관 중앙부에서의 자유유동 속도는 U_∞ 로 표시한다. 유체의 성질들 즉 밀도 ρ , 점성계수 μ , 열전도계수 k 및 정압비열 C_p 는 일정하다고 가정하며 중력 및 원관 내의 층류유동에 의한 점성소산은 무시된다. 축방향(x)과 반경방향(r)의 유체 속도성분을 각각 u 와 v , 압력을 P 라 하면 유동의 축대칭성을 고려하여 다음과 같은 2차원 기본방정식들이 얻어진다

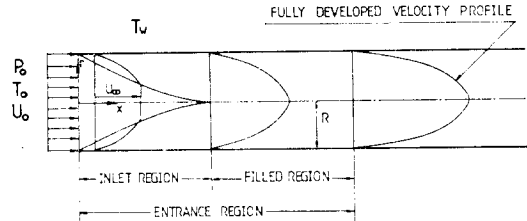


Fig. 1 Physical model of entrance region.

$$\text{연속방정식 } \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv) + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\text{운동방정식 } \rho \left(v \frac{\partial v}{\partial r} + u \frac{\partial v}{\partial x} \right) = - \frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv) \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right], \quad (2)$$

$$\rho \left(v \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right], \quad (3)$$

$$\text{에너지방정식 } \rho C_p \left(v \frac{\partial T}{\partial r} + u \frac{\partial T}{\partial x} \right) = k \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right], \quad (4)$$

경계 조건은 다음과 같다:

$$x=0 \text{에서 } u=U_0, v=0, T=T_0, \quad (5)$$

$$x=+\infty \text{에서 } u=2U_0 \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right), v=0, T=T_w, \quad (6)$$

$$r=0 \text{에서 } \frac{\partial u}{\partial r}=0, v=0, \frac{\partial T}{\partial r}=0, \text{ (축 대칭성)} \quad (7)$$

$$r=R \text{에서 } u=v=0, T=T_w. \quad (8)$$

유동함수(stream function)와 와도(Vorticity)를 사용하는 것이 더욱 편리하므로 각각 다음과 같이 정의한다:

$$v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial x}, u = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad (9)$$

$$w = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial r}. \quad (10)$$

유동함수의 정의로부터 연속방정식은 자동적으로 만족된다. 식 (2)를 x 에 관해 편미분하고 (3)을 r 에 관해 편미분하여 그 차이를 구한 후 (9), (10)의 정의와 연속방정식을 활용하면

$$\rho \left[r \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + w \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] - \mu \left(r^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + r^2 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - w + r \frac{\partial w}{\partial r} \right) = 0. \quad (11)$$

반경 R , 입구에서의 접근속도 U_0 및 $T_w - T_0$ ($T_w > T_0$ 의 경우)를 각각 기준길이, 기준속도 및 기준온도차로 하여 다음과 같이 무차원수들을 정의한다:

$$\left. \begin{aligned} u' &= \frac{u}{U_0}, v' = \frac{v}{U_0}, x' = \frac{x}{R}, r' = \frac{r}{R}, \\ \phi' &= \frac{\phi}{U_0 \kappa}, w' = \frac{Rw}{U_0}, \\ T' &= \frac{T - T_0}{T_w - T_0}, p' = \frac{p_0 - P}{\frac{1}{2} \rho U_0^2}, \\ R_c &= \frac{2\rho U_0 R}{\mu}, P_r = \frac{C_p \mu}{R}, \\ p_c &= R_c P_r = \frac{2\rho C_p U_0 R}{k}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

식 (12)의 관계들을 사용하여 식 (10), (11), (4)를 무차원화 시킨 후 무차원수들로부터 프라임을 제거하면 다음과 같은 식들이 얻어진다:

$$w = - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \right], \quad (13)$$

$$r \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + w \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{2}{R_c} \times \left(r^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + r^2 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - w + r \frac{\partial w}{\partial r} \right) = 0, \quad (14)$$

$$- \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{2}{P_c} \left(r \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + r \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (15)$$

경계조건 (5), (6), (7), (8)은 다음과 같이 표시된다:

$$x=0 \text{에서 } \phi = \frac{r^2}{2}, w=0, T=0, \quad (16)$$

$$x=+\infty \text{에서 } \phi = \frac{r^2}{2}(2-r^2), w=4r, T=1, \quad (17)$$

$$r=0 \text{에서 } \phi=0, w=0, \frac{\partial T}{\partial r}=0, \quad (18)$$

$$r=1 \text{에서 } \phi = \frac{1}{2}, w = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right), T=1. \quad (19)$$

3. 수치해석

3.1. 기본방정식의 적분

전절에 서술된 문제의 유한차분방정식들에 있어서 정확한 수치해를 구하기 위해서는 보존성(conservative property)이 유지됨이 대단히 중요하다. 이것은 와도, 질량, 운동량 또는 총에너지와 같은 기본적인 플럭스(flux)양들이 공간 구역 내에서 보존되는 것을 뜻하며 (Roache)⁽⁹⁾ 이를 위해서는 미분방정식들로부터 직접 테일러급수전개에 의하는 것보다 적분방법에 의한 유한차분방정식들을 유도하는 것이 바람직하다. 이와 같은 유한차분방정식들의 유도과정을 일반적으로 설명하기 위해서는 식(13), (14), (15)들을 다음과 같이 하나의 식으로 나타내는 것이 편리하다:

$$a \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right\} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ br \frac{\partial (c\phi)}{\partial x} \right\} - \frac{\partial}{\partial r} \left\{ br \frac{\partial (c\phi)}{\partial r} \right\} + d \cdot r = 0. \quad (20)$$

여기서 각각의 식에 대한 계수 a, b, c, d 는 Table 1과 같이 주어진다. 식(20)을 Fig. 2에 점선으로 표시된 작은 4각형*에 대해서 적분하면 다음과 같은 이중적분이 얻어진다.

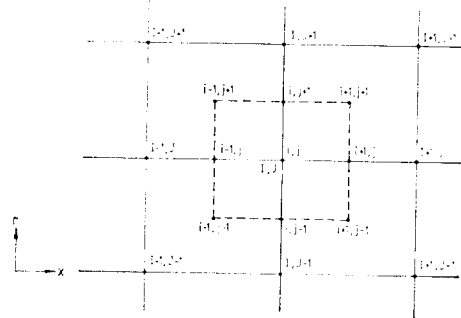


Fig. 2 Finite difference grid.

* 실제로는 축대칭 유동을 고려함으로 대칭축에 관하여 1라디안의 각도만큼 이 4각형을 회전시킴으로써 얻어진 채적에 대하여 적분이 수행된다.

Table 1 The functions a, b, c and d associated with equation(20).

Eq.	ϕ	a	b	c	d
(13)	ϕ	0	$1/r^2$	1	$-\omega/r$
(14)	ω/r	r^2	r^2	$2/Re$	0
(15)	T	1	$2/Pe$	1	0

$$\left. \begin{aligned} & \int_{r_{i,j-1}}^{r_{i,j+1}} \int_{x_{i-1,j}}^{x_{i+1,j}} a \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial}{\partial r} \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right\} dx dr \\ & - \int_{r_{i,j-1}}^{r_{i,j+1}} \int_{x_{i-1,j}}^{x_{i+1,j}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(br \frac{\partial(c\phi)}{\partial x} \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial r} \left(br \frac{\partial(c\phi)}{\partial r} \right) \right\} dx dr \\ & + \int_{r_{i,j-1}}^{r_{i,j+1}} \int_{x_{i-1,j}}^{x_{i+1,j}} d \cdot r \, dx dr = 0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Gosman등⁽¹⁰⁾은 위의 식 (21)에서 이중적분으로 표시된 세 항들을 대류(Convection), 확산(Diffusion), 및 원천(Source)항으로 구분하여 각각 적절한 가정 하에 근사한 유한차분방정식들로 대체시킬 수 있음을 상세히 설명하였다. 여기서는 그들의 방법을 그대로 적용하기로 하고 자세한 유도과정은 중복을 피하기 위하여 생략한다. 결과로서 얻어진 유한차분방정식들은 Fig. 2에 실선으로 표시된 격자선들의 교점에 해당하는 격자점들에서의 변수들의 값들로만 표현된다. 이것을 격자점 (I, J) **에서의 ϕ 의 값 즉 $\phi_{I,J}$ 에 대하여 정의하면 다음과 같다 :

$$\begin{aligned} \phi_{I,J} = & H_{I+1,J} \phi_{I+1,J} + H_{I-1,J} \phi_{I-1,J} + H_{I,J+1} \phi_{I,J+1} \\ & + H_{I,J-1} \phi_{I,J-1} + D. \end{aligned} \quad (22)$$

여기서,

$$\begin{aligned} H_{I+1,J} &= (A_{I+1,J} + B_{I+1,J} c_{I-1,J}) / \Sigma_{AB}, \\ H_{I-1,J} &= (A_{I-1,J} + B_{I-1,J} c_{I-1,J}) / \Sigma_{AB}, \\ H_{I,J+1} &= (A_{I,J+1} + B_{I,J+1} c_{I,J+1}) / \Sigma_{AB}, \\ H_{I,J-1} &= (A_{I,J-1} + B_{I,J-1} c_{I,J-1}) / \Sigma_{AB}, \\ D &= -d_{I,J} \times V_{I,J} / \Sigma_{AB}, \\ \Sigma_{AB} &= A_{I+1,J} + A_{I-1,J} + A_{I,J+1} + A_{I,J-1} + c_{I,J} \\ & \quad \times (B_{I+1,J} + B_{I-1,J} + B_{I,J+1} + B_{I,J-1}), \\ A_{I+1,J} &= a_{I,J} \{ (\phi_{I+1,J-1} + \phi_{I,J-1} - \phi_{I+1,J+1} - \phi_{I,J+1}) \} \end{aligned}$$

** L 과 M 을 각각 축방향과 반경방향 격자점의 수라 하면 축방향 첨자 I 는 0으로부터 L 까지의 정수값을 취하며, 반경방향 첨자 J 는 0으로부터 M 까지의 정수값을 취한다. 물론 하첨자 I, J 는 격자점 (I, J) 에서의 함수의 값을 나타낸다.

$$\begin{aligned} & + |\phi_{I+1,J-1} + \phi_{I,J-1} - \phi_{I+1,J+1} - \phi_{I,J+1}| \} / 8, \\ A_{I-1,J} &= a_{I,J} \{ (\phi_{I-1,J+1} + \phi_{I,J+1} - \phi_{I-1,J-1} - \phi_{I,J-1}) \\ & \quad + |\phi_{I-1,J+1} + \phi_{I,J+1} - \phi_{I-1,J-1} - \phi_{I,J-1}| \} / 8, \\ A_{I,J+1} &= a_{I,J} \{ (\phi_{I+1,J+1} + \phi_{I+1,J} - \phi_{I-1,J+1} - \phi_{I-1,J}) \\ & \quad + |\phi_{I+1,J+1} + \phi_{I+1,J} - \phi_{I-1,J+1} - \phi_{I-1,J}| \} / 8, \\ A_{I,J-1} &= a_{I,J} \{ (\phi_{I-1,J-1} + \phi_{I-1,J} - \phi_{I+1,J-1} - \phi_{I+1,J}) \\ & \quad + |\phi_{I-1,J-1} + \phi_{I-1,J} - \phi_{I+1,J-1} - \phi_{I+1,J}| \} / 8, \\ B_{I+1,J} &= \frac{b_{I+1,J} + b_{I,J}}{8} \times \frac{r_{I,J+1} - r_{I,J-1}}{x_{I+1,J} - x_{I,J}} \\ & \quad \times (r_{I+1,J} + r_{I,J}), \\ B_{I-1,J} &= \frac{b_{I-1,J} + b_{I,J}}{8} \times \frac{r_{I,J+1} - r_{I,J-1}}{x_{I,J} - x_{I-1,J}} \\ & \quad \times (r_{I-1,J} + r_{I,J}), \\ B_{I,J+1} &= \frac{b_{I,J+1} + b_{I,J}}{8} \times \frac{x_{I+1,J} - x_{I-1,J}}{r_{I,J+1} - r_{I,J}} \\ & \quad \times (r_{I,J+1} + r_{I,J}), \\ B_{I,J-1} &= \frac{b_{I,J-1} + b_{I,J}}{8} \times \frac{x_{I+1,J} - x_{I-1,J}}{r_{I,J} - r_{I,J-1}} \\ & \quad \times (r_{I,J-1} + r_{I,J}), \\ V_{I,J} &= r_{I,J} \times \frac{x_{I+1,J} - x_{I-1,J}}{2} \times \frac{r_{I,J+1} - r_{I,J-1}}{2} \end{aligned}$$

이며, a, b, c, d 는 Table 1에서 정의된 바와 같다.

3.2. 경계조건

경계조건이 함수 자체의 값으로 주어지는 경우에는 경계 격자점에서의 차분방정식은 $\phi_{I,J} = f$ 의 형태로 표시되는데 여기서 f 는 경계조건으로부터 주어지는 이미 알고 있는 상수 또는 함수일 수도 있다. 이런 종류의 경계조건으로서는 식 (19)의 $r=1$ 에서

$$w = - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \quad (23)$$

만이 문제가 되는데 Fig. 3에 $n=(1-r)$ 으로 표시된 바와 같은(경계 격자점 p 를 원점으로 하고 벽에 법선 방향으로 설정된) 좌표를 따라 w 가 선형으로 변화한다고 가정하는 것이 편리하다. 경계 격자점 및 바로 인접한 내부 격자점에서의 w 의 값들을 각각 w_p 및 w_{Np} 라 하고 두 점 사이의 간격을 N 이라 하면 이 가정은 다음과 같이 쓸 수 있다 : $w = \frac{w_{Np} - w_p}{N} n + w_p$. 이 관계식 (23)에 대입하고 벽 근처의 얇은 층에서 r 의 변화를 무시할 수 있으므로 $r \approx 1$ 이라는 가정을 적용한 후 $\frac{\partial(\cdot)}{\partial r} = - \frac{\partial(\cdot)}{\partial n}$ 임을 고려하여 식 (23)을 두번 적분한다. 결과로서 얻어지는 식을 w_p 에 대하여 정리하면 다음과 같다.

$$w_p = - \left[\frac{3(\phi_{Np} - \phi_p)}{N^2} + \frac{w_{Np}}{2} \right]. \quad (24)$$

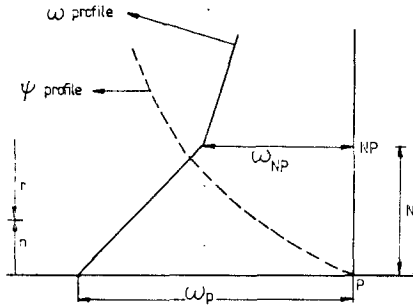


Fig. 3 Assumption of linearly varying vorticity near the wall.

여기서 ψ_p 및 ψ_{np} 는 각각 경계 격자점 및 바로 이웃하는 내부 격자점에서의 ψ 의 값들이다.

경계조건이 도함수의 형태로 주어지는 경우에는 함수의 값이 경계 격자점으로부터 바로 이웃하는 내부 격자점까지 선형으로 변화한다고 가정한다. 이런 종류의 경계조건은 식 (18)의 $r=0$ 에서 $\frac{\partial T}{\partial r}=0$ 만이 해당되는데 여기서는 단순히 $T_N=T_{Np}$ 로 표시한다.

3.3. 격자점의 설정 및 반복계산의 선택

속도 및 온도분포의 변화는 원관 입구 근처일수록 심하게 나타나므로 반경방향으로는 격자선 간격을 일정하게 취해도 좋지만 축방향으로는 다음의 관계에 의하여 격자선의 위치를 정함으로써 격자선의 간격이 점차로 넓어지도록 취한다⁽¹⁰⁾: $x=S_1 \tan(S_2 S_3)/\tan(S_2)$. 여기서 S_1 은 $x=\infty$ 의 경계조건이 설정되는 축방향 위치이고 S_2 는 1.48~1.55의 범위에서 임의로 취하며 S_3 는 0으로부터 1까지 $1/(L-1)$ 만큼씩 증가된다. 본 연구에서는 $M=15$ 로 취하였으며 레이놀즈, 프란틀수가 증가함에 따라 대략적으로 $L=21, 31, 41$ 로 취하였다. 유한차분법에 의하여 구성된 연립대수방정식의 해를 구하는 반복방법에는 여러가지가 있으나 여기서는 새로운 값들이 계산된 즉시 사용되는 Gauss Seidel 반복방법(연속배제방법)을 사용한다. 이것은 이 방법에 의하면 수렴성이 빠르고 전자계산기의 기억 장소가 적게 소요되기 때문이다. 매 반복계산은 와도, 유동함수, 온도의 순으로 이루어지며 격자점은 일정한 반경에 대하여 축방향으로 점토된다. 수치계산에 사용된 전자계산기는 한국과학기술원의 CYBER 174 System 으로서 프란틀수가 작을수록 반복계산의 횟수가 적어서 본 연구의 범위에서는 대략 100회 이내에 수렴성이 좋은 해를 얻을 수 있으며 계산시간은 격자점의 수가 15×41 일 때 약 40초가 소요된다.

4. 결과 및 토의

4.1. 속도입구길이(Hydrodynamic Entrance Length)

주어진 레이놀즈수에 대한 속도입구길이를 결정하기 위해서는 우선 축방향의 각 위치에서의 속도분포를 구한 후, 경계층 성장 구역과 완전한 점성 구역을 추산하여야 한다. $Re=150$ 인 경우에 대하여 속도분포가 발전되는 과정을 Fig. 4에 예시하였으며 이에 따른 경계층의 성장이 Fig. 5에 예시되었다.

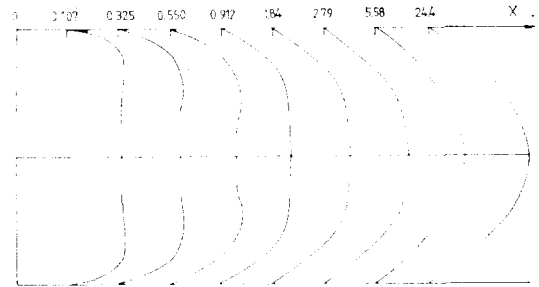


Fig. 4 Velocity profiles along the axial direction for $Re=150$.

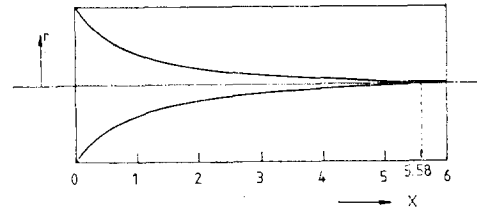


Fig. 5 Development of the hydrodynamic boundary layer for $Re=150$.

원관 입구 근처에서는 원관 중심에서 오목한 속도분포를 얻었는데 이것은 이미 서론에서 언급된대로 Vrentas등⁽⁴⁾이나 기타 다른 여러 사람들에 의해 확인된 바와 같으며 여기서도 모든 레이놀즈수에 대해서 이와같은 속도분포가 얻어졌다. 이런 효과는 입구에 매우 가까운 근처에서만 나타나므로 레이놀즈수와 관련성을 고려하기가 대단히 어려우나 대체로 레이놀즈수의 증가에 따라 효과의 크기도 약하게 증가한다고 할 수 있다. 경계층 성장 구역은 대략 $x=5.58$ 까지, 완전한 점성구역은 대략 $x=24.4$ 까지 전개되어 있음을 알 수 있다. 이 결과를 Vrentas 등의 결과와 비교한 것이 Fig. 6에 주어졌는데 두 해들은 훌륭하게 일치하므로 여기서 사용된 유한차분법으로부터 정확히 수렴하는 해를 구할 수 있음을 알 수 있다. 다른 레이놀즈수에 대해서도 같은 방법으로 속도입구길이가 결정된다. Table 2

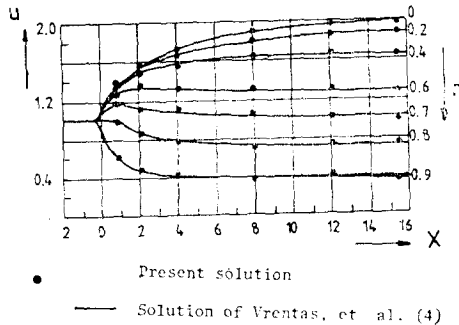


Fig. 6 Velocity distribution for $Re=150$.

에는 레이놀즈수에 따른 경계층 형성구역의 길이가 주어졌는데 대체로 $x/Re \approx 0.038$ 이 되어 Mohanty와 Asthana⁽⁷⁾의 결과인 $x/Re \approx 0.036$ 보다 약간씩 높은 값들을 보여 주고 있다. 완전한 점성 구역까지를 포함한 속도입구길이는 속도분포가 완전히 확립된 유동에

Table 2 Length of the inlet region for various Reynolds numbers.

Re	x	$\frac{x}{Re}$	Re	x	$\frac{x}{Re}$
20	1.03	0.051	556	20.8	0.037
61	2.50	0.041	601	23.5	0.039
80	3.28	0.041	645	25.5	0.040
150	5.58	0.037	749	28.9	0.039
200	7.75	0.039	800	30.1	0.038
250	9.58	0.038	851	33.7	0.040
351	13.7	0.039	1,000	37.4	0.037
400	15.3	0.038	1,111	42.3	0.038
435	16.5	0.038	1,300	50.7	0.039
455	17.1	0.038	1,500	59.7	0.040
500	19.3	0.039			

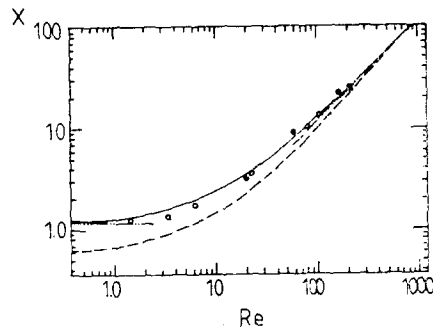


Fig. 7 Length of the entrance region as a function of Reynolds numbers⁽⁶⁾.

서의 값의 99%에 도달하는 위치까지의 거리로 정의하여 $l_{0.99v}$ 로 표시한다. $Re=20, 61, 80, 150$ 에 대하여 각각 $l_{0.99v}=3.28, 9.94, 12.9, 24.4$ 로서 $\frac{l_{0.99v}}{Re}=0.164, 0.163, 0.161, 0.163$ 이 되어 Mohanty와 Asthana의 결과인 $\frac{l_{0.99v}}{Re}=0.15$ 에 가까운 값들을 보여준다. Mohanty와 Asthana의 결과들이 큰 레이놀즈수를 가지는 층류유동(대략적으로 $Re > 500$)에서의 경계층 방정식 및 나비에-스토크스 방정식들의 근사해로부터 얻어졌으므로 현재의 결과와 직접 비교될 수 없다는 사실을 고려하면 이와 같은 편차들은 충분히 허용될 수 있다. 한편, 현재의 결과를 낮은 레이놀즈수를 가지는 유체 유동에 대하여 고찰한 Atkinson등⁽⁶⁾의 이론 및 실험결과와 비교하여 Fig. 7에 표시하였으며 두 결과는 잘 일치하는 것을 알 수 있다.

경계층 성장 구역에서의 원관을 통한 압력강하는 Fig. 1로부터 다음과 같이 베르누이정리를 사용하여 구할 수 있다.

$$\frac{P_0}{\rho} + \frac{1}{2} U_0^2 = \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} U_\omega^2,$$

$$\frac{P_0 - P}{\frac{1}{2} \rho U_0^2} = \left(\frac{U_\omega}{U_0} \right)^2 - 1.$$

몇 개의 레이놀즈수에 대한 계산 결과가 Table 3에 근사해를 사용한 다른 연구자들의 결과와 같이 주어졌다.

4.2. 열입구길이(Thermal Entrance Length)

원관 입구로부터 완전히 확립된 온도분포가 얻어지는 곳까지의 거리를 열입구 길이이라 한다. $Pe=50$ 인 경우에 대하여 축방향을 따른 온도분포의 발전 과정이 Fig. 8에 예시되었으며 이것을 각각의 반경위치에서의 온도분포로 나타낸 것이 Fig. 9에 예시되었다. 편의상 혼합평균온도(bulk temperature)가 $T=0.99$ 또는 0.98이 되는 곳까지의 거리를 열입구길이라고 정의하여 각각 $l_{0.99t}$ 와 $l_{0.98t}$ 로 표시하면 대략적으로

- Present solution ($l_{0.99v}$)
- Experimental study of Atkinson, et al.
- Creeping flow asymptote
- Boundary layer asymptote
- Sum of B. L. & C. F. solutions
- Stream tube solution of Vrentas, et al.

Table 3 Pressure drop along the axial direction.

$\frac{x}{Re}$	$(P_0 - P) / \left(\frac{1}{2} \rho U_0^2\right)$					
	Numerical solution			Boundary layer approximation		
	$Re=250$	$Re=800$	$Re=1,000$	Mohanty & asthana	Schiller	Atkinson & goldstein
0.0010	0.33	0.38	0.37	0.29	0.32	
0.0040	0.80	0.79	0.79	0.61	0.65	
0.0080	1.19	1.15	1.16	0.89		
0.0121	1.50	1.46	1.48	1.13		
0.0151	1.75	1.69	1.69	1.28	1.33	1.36
0.0201	2.09	2.02	2.04	1.51		1.63
0.0251	2.30	2.20	2.27	1.72		1.88
0.0301	2.59	2.39	2.49	1.92		2.10
0.0331	2.73	2.54	2.63	2.03		
0.0361	2.81	2.70	2.73	2.14		

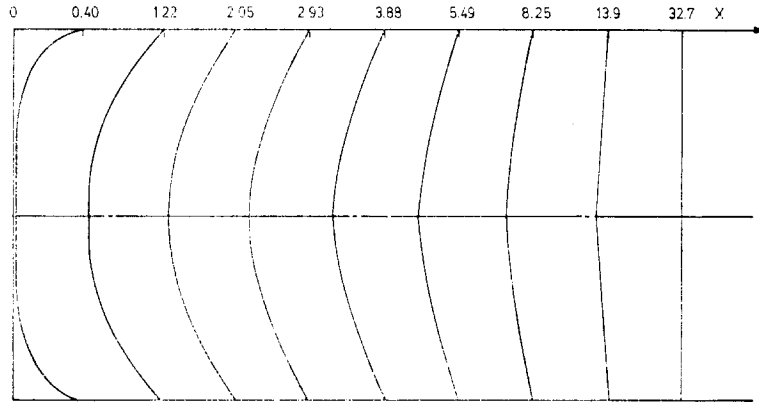


Fig. 8 Temperature profiles along the axial direction for $Pe=50.0$

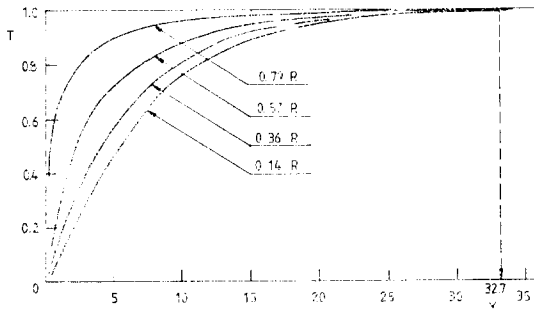


Fig. 9 Temperature distribution at various radial locations along the axial direction for $Pe=50.0$.

$l_{0.99\pm} = 32.7$ $l_{0.98\pm} = 27.8$ 을 읽을 수 있다. 마찬가지로 하여 다른 페클레수에 대해서도 열입구 길이를 결정할 수 있다. 이와 같이 페클레수에 따라 결정된 열입구길

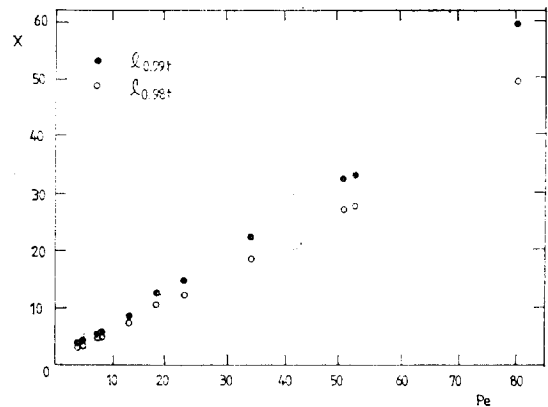
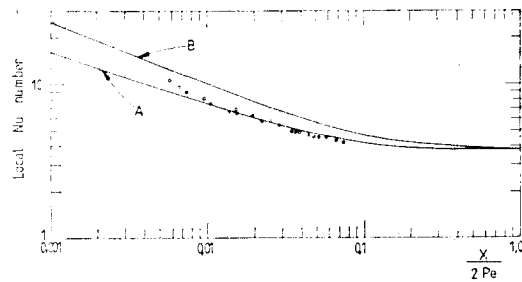


Fig. 10 Thermal entrance length.

Table 4 Thermal entrance length for various pecllet numbers.

Pe	Re	Pr	Thermal entrance length		Pe	Re	Pr	Thermal entrance length	
			$l_{0.99\tau}$	$l_{0.98\tau}$				$l_{0.99\tau}$	$l_{0.98\tau}$
4.35	435	0.01	3.92	3.31	52.0	1,300	0.04	33.3	27.8
4.50	150	0.03	4.16	3.49	80	80	1	60.0	49.8
7.45	745	0.01	5.49	4.68	150	15	10	114	91.6
7.50	250	0.03	5.63	4.80	500	500	1	355	299
12.9	645	0.02	8.63	7.39	800	800	1	579	477
17.6	351	0.05	12.8	10.2	1,000	1,000	1	742	596
22.2	556	0.04	14.9	12.3	1,300	130	10	980	789
34.0	851	0.04	22.3	18.6	1,503	1,503	1	1,101	903
50	1,111	0.045	32.7	27.2					

이가 Table 4에 주어졌으며 Fig. 10에서는 이 관계를 $Pe < 80$ 인 범위에 대해서 도시하였다. 비교적 용융점이 낮은 액체금속의 층류유동에 해당하는 $Pr < 0.05$ 및 $Pe < 60$ 의 범위에서 식 $x = \beta Pe$ 에 대해 최소자승법을 적용하면 $l_{0.99\tau}$ 일 때 $\beta = 0.654$, $l_{0.98\tau}$ 일 때 $\beta = 0.544$ 의 값을 얻는다. 레이놀즈수와 프란틀수는 다르나 페클레 수가 비슷한 $Pe = (4.35, 4.5)$ 및 $Pe = (7.49, 7.5)$ 의 경우를 각각 고찰하면 l_{τ} 의 값이 페클레 수에 의존함을 알 수 있는데 이것은 식(15)로부터도 명백한 결과이다. 한편 $Pr \geq 1$, $Pe \geq 80$ 의 범위에서는 식 $x = \beta Pe$ 로부터 $l_{0.99\tau}$ 에 대해 $\beta = 0.71 \sim 0.75$, $l_{0.98\tau}$ 에 대해 $\beta = 0.6 \sim 0.62$ 의 값을 가짐으로써 열입구 길이가 더욱 길어짐을 알 수 있는데 이것은 프란틀수가 큰 유체의 원관 입구 유동에 대해서는 열전도의 영향이 감소되기 때문이다. Fig. 11에서는 $Pr = 0.04$ 인 액체금속에 대하여 벽에서의 온도구배와 혼합평균온도를 기준으로 한 축방향의 각 위치에서의 국소누셀트수를 표시하여, 입구로부터 완전히 확립된 유동을 가정했을 경우 및 $Pr = 0.7$ 에 대해서 입구에서 균일한 속도분포를 가정했을 경우(Kays와 London⁽¹¹⁾)와 비교하였다. 원관입구로부터 먼 하류에서는 완전히 확립된 유동의 경우와 근사하며 $Nu = 3.656$ 의 값에 접근함을 알 수 있으나, 원관으로부터 대략적으로 반경의 1~2배 되는 거리에서는 많은 차이가 있음을 알 수 있다. 따라서 열입구길이가 큰 비중을 차지하는 장치설계에서는 이를 충분히 고려해야 할 것이다.



● Present solution with $Pe = 34$
 ○ Present solution with $Pe = 52$
 A Fully developed velocity profile at $X = 0$ ⁽¹¹⁾
 B Flat velocity profile at $X = 0$ for $Pr = 0.7$ ⁽¹¹⁾

Fig. 11 Local Nusselt number along the axial direction for $Pr = 0.04$.

5. 결 론

내벽이 일정한 온도로 유지되고 있는 원관을 통하여 낮은 프란틀수를 가지는 유체가 유입될 때 원관입구구역에서의 층류속도 및 온도경계층 형성에 관하여 고찰하였다. 운동방정식 및 에너지방정식의 완전한 해가 보존성을 갖추도록 적분방법을 적용한 유한차분법이 사용되었으며, 차분방정식의 해를 구하는 데는 수렴성이 좋고 전자계산기 기억장소가 적게 소요되는 Gauss-Seidel 방법이 채택되었다. 입구구역에서 축방향으로 발달되는 속도분포를 구하였으며 이를 근거로 하여 온도분포를 연이어 구하였다. 이와 같은 수치해로부터

속도입구길이, 열입구길이 등이 결정되었으며 가능한 범위 내에서 기존의 결과들과 비교되었다.

$Re=150$ 인 경우의 속도분포는 Vrentas등⁽⁴⁾의 수치해와 대체로 잘 일치되었다. 경계층 성장 구역의 길이는 Mohanty와 Asthana⁽⁷⁾의 경계층 근사해와, 전체속도입구길이는 낮은 레이놀즈수의 범위에서 Atkinson등⁽⁶⁾의 결과와 잘 일치하였으며 압력강하는 근사해를 사용한 결과들과 간접적으로 비교되었다. 열입구길이와 페클레수와의 관계가 고찰되었으며 축방향의 각 위치에서 구한 국소누셀트수의 값은 원관입구로부터 멀어질수록 긴 원관에 대한 값에 수렴함이 확인되었다.

본 연구는 또한 원관입구유동의 안정성 문제와 내벽에서 균일한 열유속이 주어지는 경우의 유동 및 열전달 문제의 해결을 위한 기초를 제공해 준다.

후 기

본 연구는 1981년도 현대연구비에 의하여 수행되었으므로, 관계자에게 감사의 뜻을 표합니다.

참 고 문 헌

1. L. Schiller; Untersuchungen über laminare und turbulente Strömung. Forschg. Ing.-Wes. Heft 428, 1922; ZAMM 2, pp. 96-106, 1922; Phys. Z. 23, pp. 14, 1922; H. Schlichting, Boundary Layer Theory, 7th Ed., p. 241, 1979.
2. S. Goldstein, Modern Developments in Fluid Dynamics, p. 299, Dover Publications, Inc., 1965.
3. W. D. Campbell and J. C. Slattery, Flow in the Entrance of a Tube, Journal of Basic Engineering, series D, Vol. 85, Trans. ASME, pp. 41-45, 1963.
4. J. S. Vrentas, J. L. Duda and K.G. Barger, Effect of Axial Diffusion of Vorticity on Flow Development in Circular Conduits: Part 1. Numerical Solutions, A.I. Ch. E. Journal, Vol. 12, No.5, pp. 837-844, 1966.
5. Y. L. Wang and P. A. Longwell, Laminar Flow in the Inlet Section of Parallel Plates, A. I. Ch. E. Journal, Vol. 10, No. 3, pp. 323-329, 1964.
6. B. Atkinson, M. P. Brocklebank, C. C. H. Card and J. M. Smith, Low Reynolds Number Developing Flows, A. I. Ch. E. Journal, Vol. 15, No. 4, pp. 548-553, 1969.
7. A. K. Mohanty and S. B. L. Asthana, Laminar Flow in the Entrance Region of a Smooth Pipe, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 90, part 3, pp. 433-447, 1978.
8. F. Kreith, Principles of Heat Transfer, 3rd Ed., pp. 422-439, Intext Educational Publishers, 1973.
9. P. J. Roache, Computational Fluid Dynamics, p. 28, Hermosa Publishers, 1976.
10. A. D. Gosman, W. M. Pun, A. K. Runchal, D. B. Spalding and M. Wolfshtein, Heat and Mass Transfer in Recirculating Flows, Academic Press, 1969.
11. W. M. Kays and A. L. London, Compact Heat Exchangers, 2nd Ed., pp. 98-119, McGraw-Hill Book Company, 1964.