

<論 文>

有限要素法에 의한 單純化된 미사일 몸체 모델의 安定性에 관한 研究

박 영 필* · 김 찬 수**

(1981年 4月 21日 接受)

A Study on the Stability of a Missile Body in a Simplified Model by Finite Element Method

Young-Pil Park and Chan Soo Kim

Abstract

In this paper, the stability of a flexible missile, idealized as a free-free beam, is evaluated by using the finite element method. For the study, heavy machinery part is modeled as a concentrated mass and the thrust, which is controlled by a feedback sensor located at a predetermined position, is considered as a constant follower force. The aerodynamic forces, the structural damping, the cross sectional variation, servo lag effect are neglected in this study.

With unconstrained variational principle, the finite element method is applied to the nondimensionalized beam equation. The matrix eigenvalue equation is obtained and the eigenvalues are calculated by a computer for the stability analysis. The stability is evaluated by the inspection of the eigenvalues of the problem. For the study, the behaviors of the eigenvalues at various thrusts and the effects of the magnitudes and positions of the concentrated mass and directional control constant are analyzed.

1. 序 論

1.1. 研究의 背景

飛行 中의 어떤 순간에 있어서, 로켓이나 미사일이 正確한 位置와 方向을 유지하도록 하기 위해서는, 振動과 安定性에 關한 舉動이 重要 因子가 된다.

變形될 수 있는 미사일의 安定性에 對해서는 兩端自由인 보(Beam)로 理想化하여 여러 研究家들에 依하여 探究되어 왔다. 1965年, Beal⁽¹⁾은 이 문제를 간단한 피드백(Feedback) 方向 制御가 可能한, 常數項과 脈動項의 疊으로 주어지는 推進力 下에서의 均一 보(Un-

iform Beam)로 간주하였다.

Kaliski, Woroszył, Kacprzyniski, Solarz 등은 空氣力學的 힘, 材料의 減衰作用, 미사일의 길이에 따르는 斷面積의 變化와 같은 影響을 포함하는 보다 複雜한 問題에 對해서 探究했다.^(2,3,4) 그後 Kalisnikov 와 Il'in⁽⁵⁾은 Beal의 結果를, 材料의 減衰作用과 推進力에 對한 보다 一般적인 方向 制御 能力을 포함하는 경우에까지 확장했으며 Matsumoto 와 Mote는 方向 制御 피드백에 있어서 時間지연의 影響까지도 포함시켰다.⁽⁶⁾ 이들의 論文에 있어서 特異한 점 한 가지는 τ -decomposition Methon가 利用되고 있다는 것이다.⁽⁷⁾ 非保存 安定性問題에 對해서는 1955年 Nikolai에 依해서 非保存 安定性理論(The Theory of Nonconservative stability)이 처음으로 研究된 以後⁽⁸⁾ 급속한 發展이 이루어

* 正會員, 延世大學校 工科大學

** 延世大學校 大學院

이러한 문제의 중요성을 Bolotin이 쓴 책에는, 그러한 문제가 전문적으로 취급되어 있으며⁽⁹⁾, Herrmann에 의한 논문에는 이러한 문제에 대해서 1967년 이전에 발표한 문헌의 목록이 폭넓게 포함되어 있다⁽¹⁰⁾.

Mote 및 Barsoum은 처음으로 有限要素法을 非保存安定성 문제에 적용했다.^(11,12) 이 두 사람은 그들의 근사치의 기초로서 확장된 Hamilton의 법칙을 적용하고 있다. 그 후 Kikuchi⁽¹³⁾ 등은 일반적인 Non-self-adjoint 문제에 접근하기 위해서 Galerkin Method를提示하고 있다.

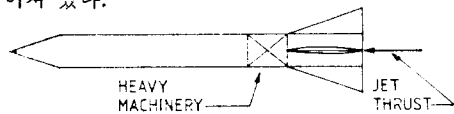
한편, Wu는 Unconstrained Adjoint Variational Principle을 이용한 有限要素法으로 非保存安定성 문제를 해결했다.^(14,15,16) 그는 나아가 集中質量이 있고, 方向制御가 가능한 推進力이 있는 Missile의 安定성 문제에까지 자신의 연구를 확장 적용했다.⁽¹⁷⁾

그러나 Wu가 처음 발표한 논문에는 數值計算상의 잘못이 있음을 Sundaramaiah와 Johns가 發見, 指摘하자⁽¹⁸⁾, 論문을 再考하는 과정에서 方向制御常數의 값에 따르는 Missile의 舉動을 解析하는데 亂解한 문제가 있음을 알게 되었다.⁽¹⁹⁾

이에 Peters와 Wu는 集中質量이 없는 均일한 Missile에 있어서 推進力에 대한 方向制御常數의 값에 따르는 Missile의 舉動을, 近似值에 관한 理論을 導入, 解析하고 있다.⁽²⁰⁾ 그런데 Wu의 논문에서는 理論上으로는 集中質量과 方向制御常數가 同時에 作用하는 境遇에 대해서 취급하고 있으나⁽¹⁷⁾, 實際로 두 가지가 同時에 作用하는 境遇에 대한 適用例는 보이지 않고 있다. 따라서 本論文에서는, 集中質量과 方向制御常數가 同時에 作用하는 境遇에 있어서의 Missile의 安定성에 대해서 論한다.

1.2. 問題의 考察

典型的인 Missile 또는 Rocket의 略圖가 Fig. 1(a)에 주어져 있다.



(a) Sketch of a typical missile (or rocket)

(b) Mathematical model: free-free beam with a concentrated mass

Fig. 1 Mathematical modeling of a flexible missile.

이 研究에서 취급되는 Missile은 安定성의 舉動을 評價하는 데 있어서 단순보 이론(Simple Beam Theory)을 適用할 수 있을 만키 가늘고 均一한 것으로 假定된다.

무거운 機械裝置部는 어떤 要求되는 位置에 集中質量으로 理想化되며, 젯트 분사에 의한 推進力은, Missile의 끝에 作用하는 壓縮力으로서, 여기서는 一定한 것으로 간주된다 (Fig. 1(b)). 또한 이 推進力의 方向은 미리 決定된 어느 位置에 있는 要素(Element)의 回轉과 線型的 關係를 일으키는 Feedback Sensor에 의하여 制御되는 것으로 간주된다.

그리고, 空氣力學的 힘, 진단 및 回轉관성, 構造的 減衰作用, Servo Lag Effect, 質量 傳達의 特性 等等은 이 研究에서는 無視된다.

그러므로 이 研究에서 취급되는 問題는 一般的으로 끝에 一定한 推進力이 있는 Flexible Missile의 動的 安定성에 對에 適用된다.

2. Flexible Missile의 數學的 理論

飛行 中の 어떤 한 순간에 있어서 Missile의 構造는 動的 平衡 狀態에 있다고 간주될 수 있다.

이 狀態에서 Missile은 교란(Disturbance)되지 않은 軸에 對해서 直線이라고 간주될 수 있으며 따라서 側方(Lateral) 安定성은 이 軸으로부터 軸에 對해서 直角 方向으로 작은 교란이 생겼을때의 舉動에 따라 特徵지어진다.

따라서 Fig. 2와 같은 自由-自由端을 갖는 단순보의 한 끝에 보의 軸에 接線方向으로 推進力 P가 作用되고 보의 中間에 集中質量 M가 作用되는 경우에 있어서의 보의 거동에 대한 문제가 된다.

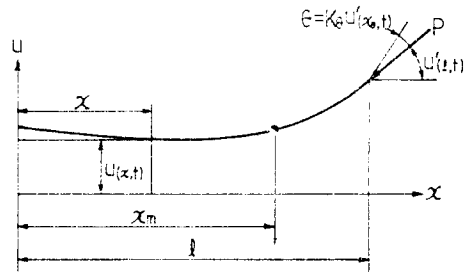


Fig. 2 Problem configuration: small disturbance from the equilibrium state.

動的인 平衡狀態로부터 軸에 直角 方向으로의 교란(Disturbance)를 $u(x,t)$ 라 두면 運動方程式 및 境界條件은 아래와 같이 주어진다.^(1,16,17)

$$D.E. (EIu'')'' + \left\{ \left[\frac{\rho Ax}{\rho Al + M} P + \frac{MP}{\rho Al + M} H(x-x_n) \right] u' \right\}' + \rho A \ddot{u} + \frac{M}{l} \ddot{u} \delta(x-x_n) = 0 \quad (1)$$

$$B.C. u''(0, t) = u'''(0, t) = 0 \quad (2)$$

$$u''(l, t) = u'''(l, t) - \frac{PK_0}{EI} u'(x_0, t) = 0 \quad (3)$$

여기서

A, I : 斷面의 面積, 2次모우멘트

l : 길이

ρ : 밀도

E : Young 율

K_0 : 推進方向의 制御常數를 나타내고, 또한 Prime(')은 空間 座標 x 에 對한 微分을, Dot('.')는 時間에 對한 微分을 나타낸다.

그리고 x_n 및 x_0 는 集中 質量 및 Feedback Sensor의 位置를 뜻한다.

이 式들을 無次元化 시키면 階級상 대단히 간편해질 것이다.

이러한 目的으로 아래와 같은 無次元化 妹介變數를 導入한다.

$$\begin{aligned} x_{(new)} &= x_{(old)}/l, & u_{(new)} &= u_{(old)}/l \\ t_{(new)} &= t_{(old)}/c, & m &= \frac{M}{\rho Al} \end{aligned} \quad (4 a \sim f)$$

$$Q = Pl^2/EI, \quad Q_1 = Q/(1+m)$$

여기서

$$c = \left(\frac{\rho Al^4}{EI} \right)^{\frac{1}{2}} \text{이} \text{며} \text{ 時間의} \text{ 次元을} \text{ 갖는다.}$$

처짐에 對해서 變數 分離를 위해 一般의 形式으로 使用되는 假定을 한다.

$$u(x, t) = u(x)e^{st} \quad (5)$$

여기서 $u(x, t)$ 와 $u(x)$ 를 같은 文字 u 로 나타내더라도 혼동을 일으키지는 않을 것이다.

式 (1) 및 (2)에 式 (3), (4), (5)를 代入하여 整理하면 다음과 같은 無次元化된 微分 方程式 및 境界條件을 얻는다.

$$D.E. u'''' + (Q_1 x u')' + m Q_1 u'' H(x-x_n) + \lambda^2 u + \{m \lambda^2 u + m Q_1 u'\} \delta(x-x_n) = 0 \quad (6)$$

$$B.C. u''(0) = u'''(0) = 0 \quad (7 a \sim d)$$

$$u''(1) = u'''(1) - Q K_0 u'(x_0) = 0$$

여기서 $H(x)$, $\delta(x)$ 는 各各 Heaviside Step Function 및 Dirac Delta Function이다.

3. 有限 要素法의 適用

3. 1. An Unconstrained Variational Principle

有限 要素法을 適用하기 爲해서, 앞에서 주어진 問題에 對해 $x_0 = 1.0$ 인 경우 Unconstrained Variational Principle을 適用하면 다음과 같다.

$$\delta I = 0 \quad (8 a)$$

$$\begin{aligned} I = \int_0^1 [u'' v'' - Q x u' v' - m Q_1 u' v' H(x-x_n) \\ + \lambda^2 u v] dx \\ + Q(1+K_0)u'(1)v(1) + m \lambda^2 u(x_n)v(x_n) \end{aligned} \quad (8 b)$$

여기서 v 는 Adjoint Field Variable이다.

또한

$$\delta I = \delta I_1 + \delta I_2 \quad (9 a)$$

$$\begin{aligned} \delta I_1 = \int_0^1 [u'' \delta v'' - Q x u' \delta v' - m Q_1 u' \delta v' H(x-x_n) \\ + \lambda^2 u \delta v] dx \\ + Q(1+K_0)u'(1)\delta v(1) + m \lambda^2 u(x_n)\delta v(x_n) \end{aligned} \quad (9 b)$$

$$\begin{aligned} \delta I_2 = \int_0^1 [v'' \delta u'' - Q_1 x v' \delta u' - m Q_1 v' \delta u' H(x-x_n) \\ + \lambda^2 v \delta u] dx \\ + Q(1+K_0)v(1)\delta u'(1) + m \lambda^2 v(x_n)\delta u(x_n) \end{aligned} \quad (9 c)$$

라 두고서, 部分 積分法을 使用하여 $\delta I_1, \delta I_2$ 를 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \delta I_1 = \int_0^1 [u'''' + (Q x u')' + m Q_1 u'' H(x-x_n) + \lambda^2 u \\ + \{m \lambda^2 u + m Q_1 u'\} \delta(x-x_n)] \delta v dx \\ + \delta v(0)[u''''(0)] - \delta v'(0)[u'''(0)] - \delta v(1)[u''''(1) \\ - Q K_0 u'(1)] + \delta v'(1)[u'''(1)] \end{aligned} \quad (10 a)$$

$$\begin{aligned} \delta I_2 = \int_0^1 [v'''' + (Q x v')' + m Q_1 v'' H(x-x_n) + \lambda^2 v \\ + \{m \lambda^2 v + m Q_1 v'\} \delta(x-x_n)] \delta u dx \\ + \delta u(0)[v''''(0)] - \delta u'(0)[v'''(0)] \\ - \delta u(1)[v''''(1) + Q v'(1)] + \delta u'(1)[v'''(1) \\ + Q(1+K_0)v(1)] \end{aligned} \quad (10 b)$$

式 (10)에서 볼 수 있는 것처럼 δI_1 은 δv 만을 포함하고 δI_2 는 δu 만을 포함한다. 그러나 δu 와 δv 는 서로 완전히 독립이므로 결국 式(8 a)를 만족시키려면, $\delta I_1 = \delta I_2 = 0$ 이어야 한다.

여기서 $\delta I_1 = 0$ 는 Original Problem에 대한 Variation이며, $\delta I_2 = 0$ 는 Adjoint Problem에 대한 Variation이다.

덧붙여 한가지 指摘해 둘 것은, 나중에 有限要素法을 適用한 後, 最終의 形式으로 얻게되는 Matrix Eigenvalue Equation에 있어서, $\delta I_2 = 0$ 로부터 얻어지는 Matrix는 $\delta I_1 = 0$ 로부터 얻어지는 Matrix의 轉置(Transpose)이며, 따라서 Adjoint Problem으로부터 얻게 되

는 Eigenvalues 와 정확히 같다.

(물론 Eigenvector 는 서로 다르다).

참고로 Adjoint Problem 을 보면 다음과 같다.

$$D.E. v'''' + (Qxv')' + mQ_1v''H(x-x_n) + \lambda^2v + [m\lambda^2v + mQ_1v']\delta(x-x_n) = 0 \quad (11 a)$$

$$B.C. v''(0) = v'''(0) = 0$$

$$v''(1) + Q(1+K_\theta)v(1) = 0,$$

$$v'''(1) + Qv'(1) = 0 \quad (11 b)$$

3.2. 有限 要素法

有限 要素法을 適用하기 爲해서 Fig. 1(b)와 같은 모델을 L 個의 要素(Element)로 等分한 그림이 Fig. 3 에 주어져 있다. Fig. 3에서 Local Coordinate 는

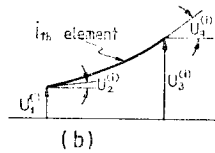
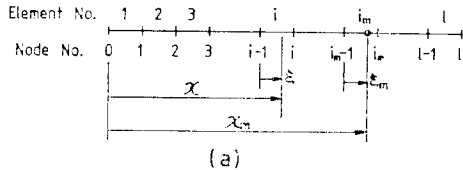


Fig. 3 Finite element model.

$$\xi = L\left(x - \frac{i-1}{L}\right) \quad (12)$$

가 된다.

式 9(b)를 式 (12)를 利用, 整理하면 다음의 式을 얻게 된다.

$$\delta I_1 = 0 \quad (13 a)$$

$$\delta I_1 = \sum_{i=1}^L \int_0^1 [L^3 u^{(i)''}(\xi) \delta v^{(i)''}(\xi) - Q_i(\xi^{(i)} + i - 1) u^{(i)'}(\xi) \delta v^{(i)'}(\xi) + \frac{\lambda^2}{L} u^{(i)}(\xi) \delta v^{(i)}(\xi)] d\xi - mQ_1 L \int_{\xi_n}^1 u^{(i_m)' }(\xi) \delta v^{(i_m)'}(\xi) d\xi - \sum_{i=i_m+1}^L mQ_1 L \int_0^1 u^{(i)'}(\xi) \delta v^{(i)'}(\xi) d\xi + Q(1+K_\theta)u^{(L)'}(1)\delta v^{(L)'}(1) + m\lambda^2 u^{(i_m)'}(\xi_m) \delta v^{(i_m)'}(\xi_m) = 0 \quad (13 b)$$

또한

$$u^{(i)}(\xi) = \mathbf{a}^T(\xi) \mathbf{U}^{(i)} \quad (14)$$

$$v^{(i)}(\xi) = \mathbf{a}^T(\xi) \mathbf{V}^{(i)} \quad (15)$$

로 두면,

$$\mathbf{a}^T(\xi) = \{1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, \xi - 2\xi^2 + 3\xi^3, 3\xi^2 - 2\xi^3, -\xi^2 + \xi^3\} \quad (16)$$

는 Shape Function Vector 이며

$$\mathbf{U}^{(i)} = \{U_1^{(i)}, U_2^{(i)}, U_3^{(i)}, U_4^{(i)}\}$$

$$\mathbf{V}^{(i)} = \{V_1^{(i)}, V_2^{(i)}, V_3^{(i)}, V_4^{(i)}\}$$

는 Generalized Coordinate Vector 들이고, Superscript T 는 전치행렬(the Transpose of the Matrix)을 나타낸다.

式을 간편히 정리하기 爲하여 다음과 같은 Matrix 를 導入한다.

$$\mathbf{A} = \int_0^1 \mathbf{a}^{(i)}(\xi) \mathbf{a}^T(\xi) d\xi \quad (17 a)$$

$$\mathbf{B} = \int_0^1 \mathbf{a}'(\xi) \mathbf{a}^T(\xi) d\xi \quad (17 b)$$

$$\mathbf{C} = \int_0^1 \mathbf{a}''(\xi) \mathbf{a}^T(\xi) d\xi \quad (17 c)$$

$$\mathbf{D} = \int_0^1 \xi \mathbf{a}'(\xi) \mathbf{a}^T(\xi) d\xi \quad (17 d)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}(1) \mathbf{a}^T(1) \quad (17 e)$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{a}(\xi_m) \mathbf{a}^T(\xi_m) \quad (17 f)$$

$$\mathbf{H} = \int_{\xi_n}^1 \mathbf{a}'(\xi) \mathbf{a}^T(\xi) d\xi \quad (17 g)$$

이제 式 (14)를 式(13)에 代入하고 式 (17)을 利用, 整理하면 다음과 같은 Matrix Equation 을 얻게 된다.

$$\delta I_1 = \sum_{i=1}^L \delta \mathbf{V}^{(i)T} [L^3 \mathbf{C} - Q_i \mathbf{D} - Q_i(i-1) \mathbf{B} + \frac{\lambda^2}{L} \mathbf{A}] \mathbf{U}^{(i)} - \delta \mathbf{V}^{(i_m)T} [mQ_1 L \mathbf{H}] \mathbf{U}^{(i_m)} - \sum_{i=i_m+1}^L \delta \mathbf{V}^{(i)T} [mQ_1 L \mathbf{B}] \mathbf{U}^{(i)} + \delta \mathbf{V}^{(L)T} [Q(1+K_\theta) \mathbf{E}] \mathbf{U}^{(L)} + \delta \mathbf{V}^{(i_m)T} [m\lambda^2 \mathbf{G}] \mathbf{U}^{(i_m)} = 0 \quad (18)$$

각 要素의 連續性으로부터

$$U_3^{(i-1)} = U_1^{(i)}, V_3^{(i-1)} = V_1^{(i)}$$

$$U_4^{(i-1)} = U_2^{(i)}, V_4^{(i-1)} = V_2^{(i)} \quad i=2, 3, 4, L \quad (19)$$

이 된다.

式(18)을 式(19)를 이용, 組合 整理하면 다음과 같은 Global Matrix Equation 을 얻게 된다.

$$\delta I_1 = \delta \mathbf{V}^T \{ \mathbf{K} + \lambda^2 \mathbf{M} \} \mathbf{U} = 0 \quad (20)$$

여기서

$$\mathbf{U}^T = \{U_1^{(1)}, U_2^{(1)}, U_1^{(2)}, U_2^{(2)}, \dots, U_1^{(L)}, U_2^{(L)}, U_3^{(L)}, U_4^{(L)}\} \quad (21 a)$$

$$\mathbf{V}^T = \{V_1^{(1)}, V_2^{(1)}, V_1^{(2)}, V_2^{(2)}, \dots, V_1^{(L)}, V_2^{(L)}, V_3^{(L)}, V_4^{(L)}\} \quad (21 b)$$

그런데 式(20)에서 $\delta \mathbf{V}^T$ 는 任意(Arbitrary)이므로 最

終的으로 다음과 같은 Matrix Eigenvalue Equation 을 遇에는 不安定性은 Flutter Type 이 된다.⁽¹²⁾
 얻게 된다.

$$[K + \lambda^2 M] \{U\} = 0 \quad (22)$$

5. 數值 結果 및 解析

4. 安定性 解析

式(5)에서

$$u(x,t) = u(x)e^{i\omega t} \quad (5)$$

로 표시되었다.

그런데 여기서 Parameter λ 의 값은 一般的으로 複素數이다.

따라서,

$$\lambda = \lambda_R + i\lambda_I \quad (22)$$

로 나타낼 수 있으며, 여기서 $i = \sqrt{-1}$, λ_R , λ_I 는 둘 다 실수이다.

만약 λ_R 이 陰이거나 0 이면 교란 $u(x,t)$ 는 時間에 따라 減少하거나 微小한 量으로 남아있게 되며, 이런 境遇에는 安定한 것으로 간주된다.

만약 λ_R 이 陽이면, 교란 $u(x,t)$ 는 時間과 더불어 점점 증가되며, 이런 境遇는 不安定한 境遇이다. 그런데, 이때 不安定性은 λ 의 存在 有無에 따라 두가지 Type 으로 구분된다.

만약 λ_I 가 0 이면, 즉 λ 가 實數값만으로 不安定한 境遇에는, 不安定性은 Buckling Type 이 된다.

만약 λ_I 가 存在하면, 즉 λ 가 複素수로서 不安定한 境

式(20)의 Matrix K 및 式(22)의 最終的인 Eigenvalue Matrix 는 대칭(symmetric)이 아니므로 一般的인 Matrix 에 對한 Eigenvalues 를 求하는 Computer Program 이 使用되어야 한다.

여기서 求한 數值 結果는 IBM Scientific Package 에 있는 HSBG 및 ATEIG 를 利用하여 求한 것으로서 주어진 一般的인 Matrix 를 HSBG 에 依하여 Hessenberg's Form 으로 고친 후, ATEIG 에 依하여 Hessenberg's Form 인 Matrix 의 Eigenvalues 를 求하게 되어 있다.

그리고 Computer 로는 HEWLETT-PECKARD 32102B 를 使用하여, Double precision 으로 16 자리 數까지 計算된다.

安定性은 判斷하는 데는 λ 의 값 중 가장 작은 몇 개의 값이 問題가 된다. 따라서 여기서는 λ 의 값 중 Zero Mode 를 포함하여 最初의 제일 작은 값 4 개까지만 언급하기로 한다.

여기서 求한 값의 正確性을 보이기 爲하여 集中質量이 없고 方向 制御 常數가 없는 境遇에 對해서 要素를 5 個 및 9 個로 했을때의 값이 Table 1 에 주어져 있다.

Table 1 Numerical values of the four lowest eigenvalues($m=K_0=0$).

L	θ/π^2 λ	0			1	2	3	4
		present	exact	error				
5	λ_1	0.0000	0	—	(0.0000)	(0.0000)	(0.0000)	(0.0000)
	λ_2	(0.0000)	0	—	(0.0015)	(0.0015)	0.0010	0.0028
	λ_3	22.3842	22.3733	0.0485%	21.0058	19.5841	18.1252	16.6433
	λ_4	61.8693	61.6728	0.3186%	59.9991	58.0480	56.0026	53.8448
9	λ_1	0.0000	0	—	(0.0000)	0.0000	0.0000	(0.0000)
	λ_2	0.0000	0	—	(0.0015)	(0.0014)	0.0013	0.0029
	λ_3	22.3744	22.3733	0.0050%	20.9945	19.5693	18.1044	16.6133
	λ_4	61.6938	61.6728	0.0373%	59.8164	57.8537	55.7938	53.6178
5	6	7	8	9	10	11	12	
(0.0000)	(0.0000)	0.0000	(0.0000)	(0.0000)	(0.0000)	0.0000	0.0000	
0.0043	0.0058	0.0069	0.0073	0.0056	(0.0048)	(0.0092)	(0.0113)	
15.1689	13.7642	12.5538	11.7782	11.8632	13.5041	18.7502	—	
51.5498	49.0818	46.3859	43.3715	39.8671	35.4649	28.2514	—	

(0.0000)	(0.0001)	0.0003	(0.0003)	(0.0000)	0.0000	0.0000	(0.0000)
0.0045	0.0059	0.0071	0.0075	0.0058	(0.0046)	(0.0089)	(0.0108)
15.1257	13.7034	12.4727	11.6818	11.7789	13.5141	19.4533	—
51.3000	48.8030	46.0695	43.0038	39.4230	34.8801	26.9480	—

Table 1에서 괄호안의 값은 $\lambda_R(\lambda_I=0)$ 의 값이며, 괄호를 하지 않은 값은 $\lambda_I(\lambda_R=0)$ 의 값이다.

여기서 특히, Q 가 0인 境遇에는 λ_I 는 兩端 自由인 均一의 Natural Frequency Factor가 될 것이다. 이때의 값은 Exact Values가 求해져 있는 바⁽⁶⁾, Table 1에는 이 값과, 이 값에 對한 Error가 함께 주어져 있다. 표에서 보는 것처럼 여기서 求한 값은 대단히 効果的으로 正確한 값에 收斂함을 알 수 있다.

또한 Q/π^2 의 여러 값에 대해서 λ_1 및 λ_2 의 값은 거의 0에 가까운 값을 나타내고 있는 바 이것의 正確한 값은 Q 에 상관없이 항상 0가 됨이 證明되어 있다.⁽²⁰⁾ 그리고 이때의 Mode는 Rigid Body Translation과 Rigid Body Rotation이다. 특히 λ_1 은 m 및 K_θ 가 얼마이든지 모든 Q 의 값에 대해서 0이며, 이때의 Mode는 Rigid Body Translation이다.

그리고 要素를 9個로 했을 때의 $\lambda(\lambda_I$ 와 $\lambda_R)$ 와 Q/π^2 의 關係가 Fig. 4에 주어져 있다.

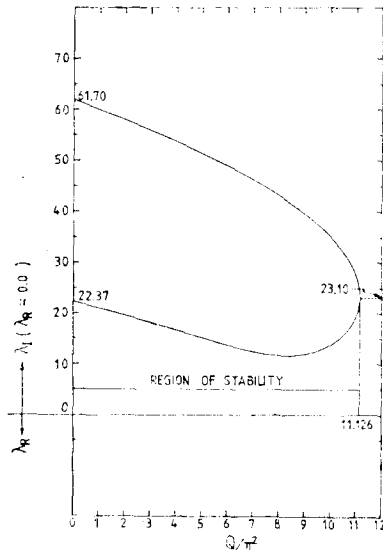


Fig. 4 Stability behavior of a uniform missile. ($m=0.0, K_\theta=0.0, L=9$).

Fig. 4에서 보이는 바와 같이, Rigid Body Translation 및 Rigid Body Rotation을 제외한 λ_3 및 λ_4 의 값은 $Q/\pi^2=11.126$ 일 때 서로 같은 값을 가지며, 그보다 큰 값에 對해서는 서로 공액인 複素數 값을 갖게

되는 바 이는 Fig. 4에서는 나타나지 않고 있다. 그러므로 Q/π^2 이 11.126보다 작을 때는 安定한 狀態이며 이보다 큰 값에 對해서는 Flutter Type인 不安定 狀態로 判斷된다.

Fig. 5에서는 $\lambda(\lambda_I$ 와 $\lambda_R)$ 와 Q/π^2 의 關係가 集中 質量이 20% 있고 方向制御가 없을 때, 要素를 5個로 했을 境遇에, m 의 여러 位置에 對해 주어져 있다. λ_1

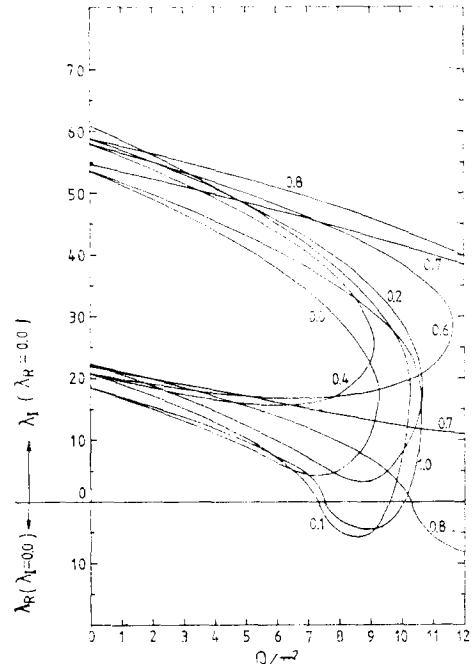


Fig. 5 Curves of four lowest eigenvalues $\lambda(\lambda_I$ and $\lambda_R)$ vs. thrust Q for various values of x_m : ($m=0.2, K_\theta=0, L=9$).

및 λ_2 는 Q/π^2 의 모든 값에 對해서 항상 0이며 따라서 λ_3 및 λ_4 의 값에 따라서 安定性 여부가 判斷된다. λ_3 가 純虛數인 境遇(λ_I 가 存在, $\lambda_R=0$)일 때에는 安定한 狀態이며, λ_3 가 實數(λ_R 이 存在, $\lambda_I=0$)인 境遇에는 不安定한 狀態로서 Buckling Type이며, λ_3 및 λ_4 가 서로 공액인 複素數(Fig. 5에서는 나타나지 않음)일 때에는 不安定한 狀態로서 Flutter Type이다.

Fig. 6에서는 $K_\theta=-0.05, x_\theta=1.0$ 이며 $x_m=0.7$ 인 m 의 여러 가지 값에 對해서, 要素를 5個로 했을 때의 $\lambda(\lambda_I$ 와 $\lambda_R)$ 와 Q/π^2 의 關係가 주어져 있다.

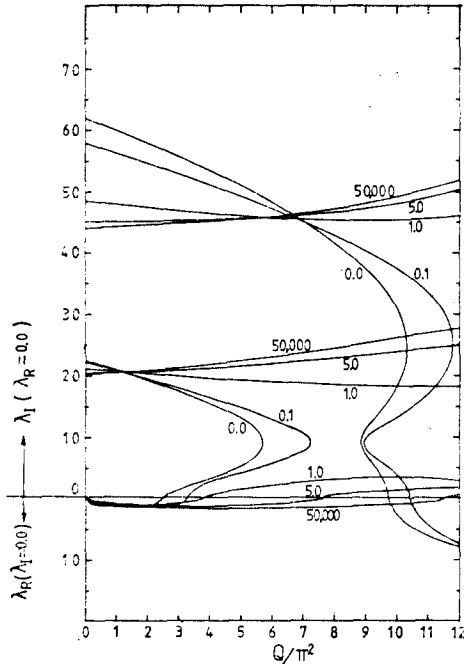


Fig. 6 Curves of four lowest eigenvalues $\lambda(\lambda_1 \text{ and } \lambda_4)$ vs. thrust Q for various values of M
($x_n=0.7, K_0=-0.05, x_0=1.0, L=5$)

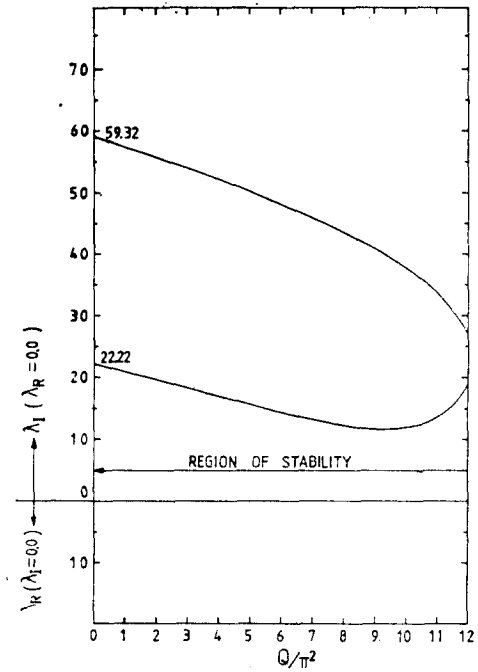


Fig. 7(a) Stability behavior of a uniform missile with concentrated mass: $K_0=0.0$
($m=0.05, x_n=0.7, x_0=1.0, L=9$)

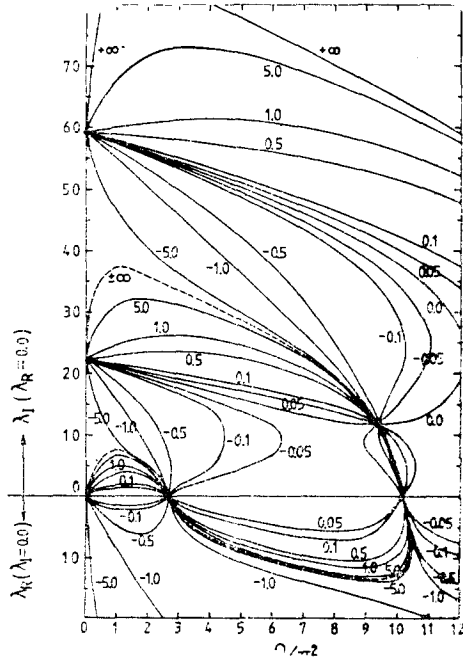


Fig. 7 Curves of four lowest eigenvalues $\lambda(\lambda_1 \text{ and } \lambda_4)$ vs. thrust Q for various of K_0
($m=0.05, x_n=0.7, x_0=1.0, L=9$)

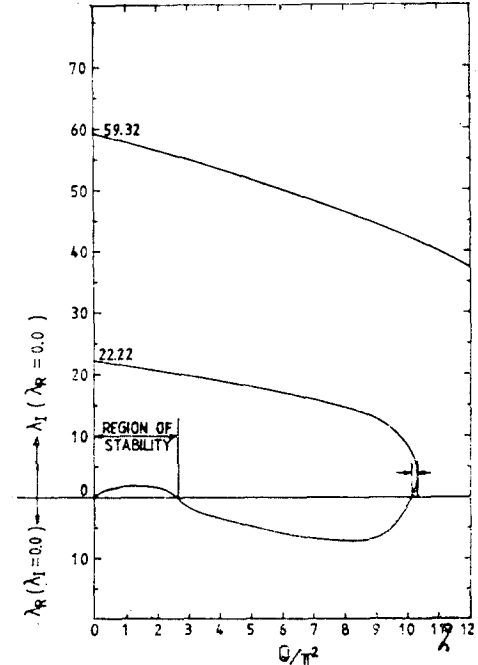


Fig. 7(b) Stability behavior of a uniform missile with concentrated mass: $K_0=0.1$
($m=0.05, x_n=0.7, x_0=1.0, L=9$)

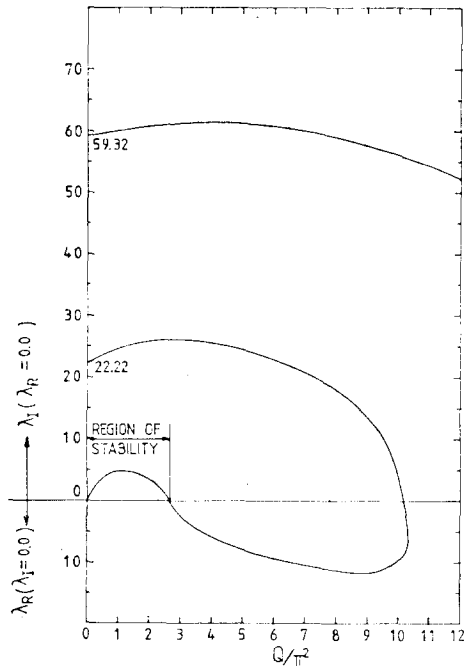


Fig. 7 (e) Stability behavior of a uniform missile with concentrate mass: $K_\theta=1.0$ ($m=0.05, x_m=0.7, x_\theta=1.0, L=9$)

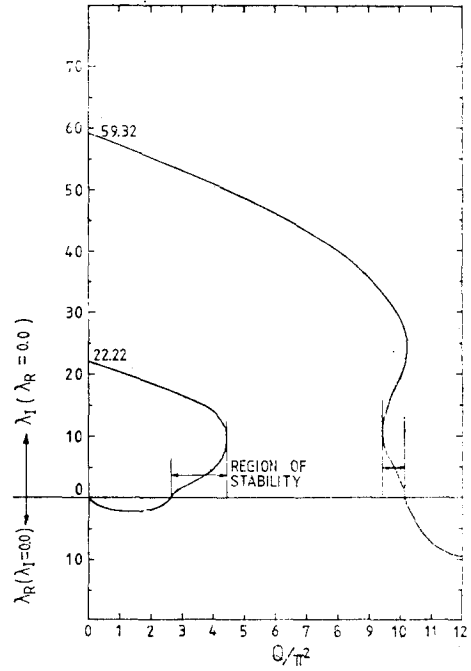


Fig. 7(e) Stability behavior of a uniform missile with concentrated mass: $K_\theta=-0.1$ ($m=0.05, x_m=0.7, x_\theta=1.0, L=9$)

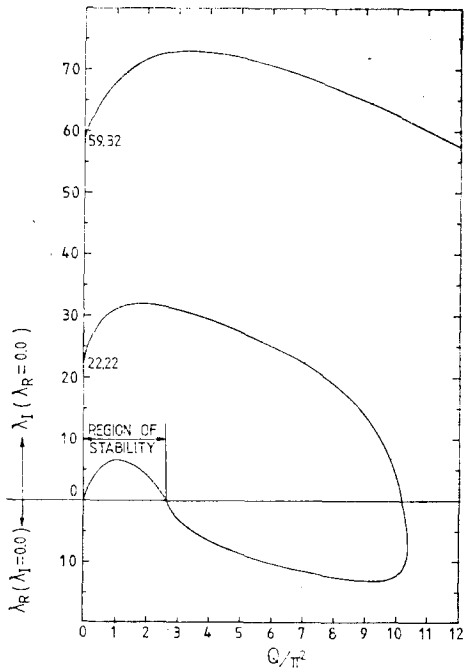


Fig. 7(d) Stability behavior of a uniform missile with concentrated mass: $K_\theta=5.0$ ($m=0.05, x_m=0.7, x_\theta=1.0, L=9$)

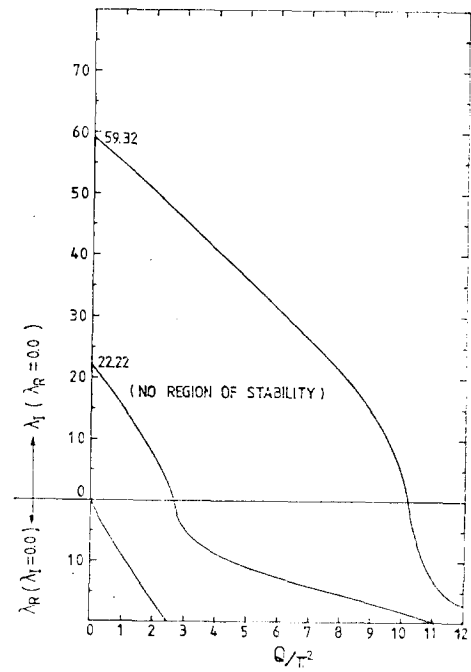


Fig. 7(f) Stability behavior of a uniform missile with concentrated mass: $K_\theta=-1.0$ ($m=0.05, x_m=0.7, x_\theta=1.0, L=9$)

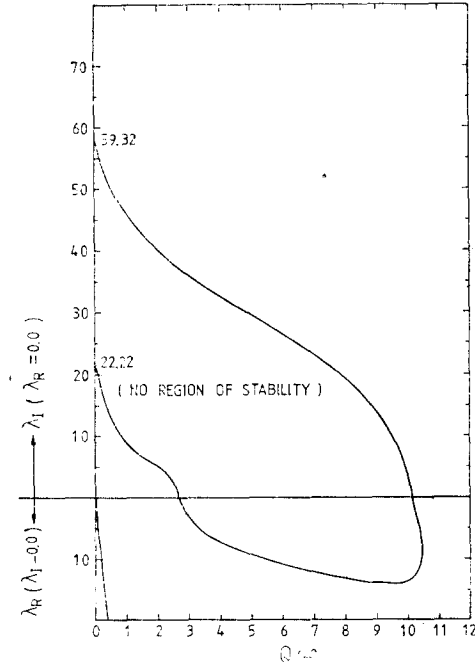


Fig. 7(g) Stability behavior of a uniform missile with concentrated mass: $K = -5.0$ ($m = 0.05, x_m = 0.7, x_e = 1.0, L = 9$)

이 때 Zero Mode는 하나 뿐이며 Rigid Body Translation Mode이다. 따라서 $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ 의 값에 따라서 앞에서와 같은 방법으로 安定性 여부를 判定된다.

Fig. 7에서는 $m = 0.05, x_m = 0.7$ 이며 $x_e = 1.0$ 인 K_0 의 여러 값에 대해서 要素를 9개로 했을 때의 $\lambda(\lambda_r$ 와 $\lambda_a)$ 와 Q/π^2 의 관계가 주어져 있다.

Fig. 7에서 보는 것처럼, Q 가 0일 때에는 임의의 K_0 의 값에 대해서 λ 는 항상 같은 값을 갖는다.

그리고 Q/π^2 의 절편은, $m = 0$ 인 境遇에 대해서는 항상 같은 값이 된다고 證明되어 있으나⁽²⁰⁾, 여기서는 正確하게 같은 값이 되는지 여부는 確認하기 매우 어렵다. 다만, Fig. 7에서 보는 바와 같이 거의 같은 값을 갖게 되며, 安定性 여부를 判定하는 데는 數值 解析上의 Error를 감안할 때 그다지 問題가 되지 않는다. Fig. 7(a)에는 $K_0 = 0$ 일 때 Fig. 7(b)에는 $K_0 = 0.1$ 일 때, Fig. 7(c)에는 $K_0 = 1.0$ 일 때, Fig. 7(d)에는 $K_0 = 5.0$ 일 때, Fig. 7(e)에는 $K_0 = -0.1$ 일 때, Fig. 7(f)에는 $K_0 = -5.0$ 일 때의 安定性에 관한 舉動이 주어져 있다

λ_1 은 Zero Mode(Rigid Body Translation)이며, 安定性은 λ_2 및 λ_3 의 값에 따라 判定된다.

λ_2 및 λ_3 가 모두 純虛數 값만 가질 때는 安定한 狀態

이며, 이 중 하나라도 實數값을 가질 때는 Buckling Type인 不安定한 狀態, 그림에서 λ_2 및 λ_3 의 값이 나타나지 않은 경우(λ_2 와 λ_3 는 공액인 複素數)에는 Flutter Type으로 不安定한 狀態로 판단된다.

6. 結 論

앞에서의 解析을 토대로 均一한 단순화된 미사일 (Uniform Missile)의 安定性에 對해 다음과 같은 事實을 알 수 있다.

- (1) 集中 質量 및 方向 制御 常數의 크기나 位置에 상관없이 항상 $\lambda_1 = 0$ (Rigid Body Translation)이며, 특히 $Q = 0$ 일 때는 λ_2 역시 0(Rigid Body Rotation)이다.
- (2) 方向 制御 常數가 存在하지 않을 境遇에는 항상 λ_1 및 λ_2 가 Zero이며 따라서 安定性은 λ_3 및 λ_4 의 舉動에 따라 決定된다.
- (3) 方向 制御 常數가 存在할 경우에는 Rigid Body Rotation Mode는 더 이상 存在하지 않으며 따라서 安定性은 λ_2 및 λ_3 의 舉動에 따라 決定된다.
- (4) 方向 制御 常數의 여러 값에 對해서 Q/π^2 의 절편이 항상 거의 같으므로, 安定한 狀態를 유지하는 推進力의 範圍는, 方向 制御 常數의 값이 陽일 때는 크기에 관계없이 일정하며, 陰일 때는 절대치가 작을수록 넓다.
- (5) 方向 制御 常數가 存在하지 않을 때는 集中 質量의 位置에 따라서 安定한 狀態를 유지하는 推進力의 範圍에 影響을 미치며 이 範圍를 가장 넓게 하는 位置를 찾아낼 수 있다.

References

1. T.R. Beal, "Dynamic Stability of a Flexible Missile under Constant and Pulsating Thrusts", AIAA Journal, Vol. 3, No. 3, 1965, pp. 486-495.
2. S. Kaliski and S. Woroszył, "Flutter of a Deformable Rocket in Supersonic Flow According to the Second Asymptotic Approximation," Preceeding of Vibration Problems, Vol. 1, No. 6, 1965, pp. 49-81.
3. J. Kacprzyński and S. Kaliski, "Flutter of a Deformable Rocket in Supersonic Flow," Preceeding of International Aeronautical Congress, Vol. 4, Zurich, 1960, pp. 911-925.

4. L. Solarz, "The Mechanism of the Loss of Stability of a Non-Guided Deformable Rocket," *Proceeding of Vibration Problems*, Vol. 4, No. 10, 1969, pp.425-441.
5. K.S. Kolesnikov and M.M. Il'in, "Dynamic Stability of a Uniform Controlled Beam with Free Ends,"(in Russian), *Izdotel'stvo Nauka*, 1973, pp. 87-93.
6. G.Y. Matsumoto and C.D. Mote, "Time Delay Instabilities in Large Order Systems with Controlled Follower Forces," *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, Transactions of the ASME, Series G. Vol. 94, 1972, pp. 330-334.
7. C.S. Hsu, "Application of the Tau-Decomposition Methon to Dynamical Systems Subjected to Retarded Follower Forces," *Journal of Applied Mechanics*, Series E, Vol. 92, No. 2, 1970, pp. 259-266.
8. E.L. Nikolai, *Study in Mechanics*, Gostekhi-zdat, 1955.
9. V.V. Bolotin, *Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability*, McMillan, N.Y., 1963.
10. G. Herrmann, "Stability of Equilibrium of Elastic System Subjected to Non-Conservative Forces," *Applied Mechanics Review*, Vol. 20, 1967, pp. 103-108.
11. C.D. Mote, "Nonconservative Stability by Finite Element," *Journal of the Engineering Mechanics Division*, Proceedings of the ASCE, Vol. 3, 1971, pp. 645-659.
12. R.S. Barsoum, "Finite Element Method Applied to Problem of Stability of a Nonconservative Systems," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 3, 1971, pp. 63-87.
13. F. Kikuchi, "A Finite Element Method for Non-Self-Adjoint Problems," *Internal Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 6, 1973, pp. 39-54.
14. J.J. Wu, "On the Numerical Convergence of Matrix Eigenvalue Problems due to Constraint Conditions," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 37, No. 3, 1974, pp. 349-358.
15. J.J. Wu, "On Adjoint Operators Associated with Boundary Value Problems," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 39, No. 2, 1975, pp. 195-206.
16. J.J. Wu, "On the Stability of a Free-Free Beam under Axial Thrust Subjected to Directional Control," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 43, No. 1, 1975, pp. 45-52.
17. J.J. Wu, "Missile Stability Using Finite Elements-an Unconstrained Variational Approach," *AIAA Journal*, Vol. 14, No. 3, 1976, pp. 313-319.
18. V. Sundararamaiah and D.J. Johns, "Comment on the Stability of a Free-Free Beam under Axial Thrust Subjected to Directional Control'," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 48, No. 4, 1976, pp. 571-574.
19. J.J. Wu, "Missile Stability," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 49, No. 1, 1976, pp. 141-147.
20. D.A. Peters and J.J. Wu, "Asymptotic Solutions to a Stability Problem," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 59, No. 4, 1978, pp. 591-610.