

< 論 文 >

有限要素法을 이용한 傾斜진 직사각형 단면  
 空洞내부의 自然對流現象의 수치해석<sup>†</sup>

이 용 신\* · 이 동 호\*\*

(1981年 6月 12日 接受)

Numerical Analysis of Natural Convection in  
 Inclined Rectangular Cavity using F.E.M.

Yong Shin Lee and Dong Ho Lee

Abstract

Natural convection within inclined high aspect-ratio rectangular cavity was analysed by using finite element method.

For a cavity of aspect-ratio 20, the flow patterns of secondary vortices and the heat transfer characteristics on the wall were obtained with the variation of tilt angle as well as  $Ra$  and  $Pr$ . The observation on the governing equations shows that the increase of  $\frac{Ra}{Pr}$  and the existence of nonzero tilt angle make the flow pattern more complicated and so it becomes difficult to obtain converging solution. The max. value of  $\frac{Ra}{Pr}$  attained in this study was  $3 \times 10^4$  at  $0^\circ$  tilt angle and  $1.1 \times 10^4$  at  $45^\circ$  tilt angle for aspect ratio 20 and  $Pr=0.7$ .

Finally an empirical formula for Nusselt number which can account for the effect of tilt angle is obtained for laminar flow regime.

기 호 설 명

- $g$  : 중력가속도
- $H$  : 공동높이
- $K$  : 열확산율(thermal diffusivity)
- $l_x$  :  $x$  축과  $g$  방향과의 여현값(cosine)
- $l_y$  :  $y$  축과 " " ( " )
- $Nu$  : Nusselt 수
- $P$  :  $\frac{\sigma \nu^2}{w^2}$ 로 나누어진 무차원 압력
- $Pr$  : Prandtl 수( $\nu/K$ )
- $Ra$  : 공동폭을 기준한 Rayleigh 수  $\frac{g\beta(T_h - T_c)w^3}{\nu K}$
- $T$  : 온도

- $u, v$  :  $\nu/w$ 로 나누어진  $x, y$  방향 무차원 속도 성분
- $w$  : 공동폭
- $x, y$  :  $W$ 로 나누어진 무차원 좌표축
- $\beta$  : 열팽창 계수(coefficient of thermal expansion)
- $\theta$  : 무차원온도  $(T - T_c)/(T_h - T_c)$
- $\nu$  : 유체동점성계수(kinematic viscosity)
- $\sigma$  : 유체밀도
- $\psi$  : 유동함수(stream function)
- $\omega$  : 와도(vorticity)

첨 자

- $i, j, k$  : 공간상의 node no.
- $h$  : 고온벽(hot wall)
- $c$  : 저온벽(cold wall)

<sup>†</sup> 1981년도 대한기계학회 춘계학술대회에서 발표

\* 한국과학기술원 기계공학과, 현재 코리어엔지니어링(주)

\*\*정회원, 한국과학기술원 항공공학과

## 1. 서론

폐쇄된 직사각형 단면의 空洞(cavity) 내에서 마주 보는 두 벽면간의 온도차이로 인하여 誘起되어 일어나는 자연대류현상은 여러 공학분야에서 볼 수 있는 하나의 중요한 열전달현상으로서 수많은 사람들의 관심을 끌어들였다.

그러나 이 현상의 지배방정식은 비선형 및 편미분방정식으로 특수한 경계조건 외에는 일반적으로 해석적 해(analytic solution)가 불가능하여 실험적인 연구<sup>(1)-(6)</sup>가 많이 실시되어 왔고, 이들 대부분의 결과는 주로 전반적인 열전달 특성치만을 구하는데 집중되어 왔다. 최근들어 대형 컴퓨터의 사용과 함께 급속히 발달된 수치적 해석방법은 실제 이 현상의 열전달 특성을 지배하는 空洞 내부 자연대류 流動현상의 해석을 가능케 하였다.

본 연구에서는 유체유동현상의 수치해석에 있어 주목을 이루어온 유한차분법(finite difference method) 대신에 최근들어 복잡한 유동해석에 그 다양성이 입증되고 있는 유한요소법(finite element method)을 사용하여 이들의 결과를 비교, 검토해 보고자 한다.

최근에 Taylor<sup>(7)</sup>는 경사각이 없고 수직의 종횡비가 큰 직사각형 空洞의 경우에 대하여 유한요소법을 이용한 연구결과를 발표하였는데 종횡비 20 일 경우 최대  $Ra$  수와  $Pr$  수는 각각  $10^5$  및  $10^3$ 이었다. 그러나 다음 절에서 보듯이 이들 두무차원수는 지배방정식에서  $Ra/Pr$  형태로 나타나는데 Taylor의 연구에서 이들 최대값은  $10^2$ 밖에 이르지 못할을 알 수 있다.

본 연구에서는 종횡비가 매우 큰 직사각형 단면 空洞이 경사각을 갖을 때 경사각이 유동현상 및 열전달현상에 미치는 영향을 알아보고자 하며, 가능한한 작은  $Pr$  수와 큰  $Ra$  수의 경우에 대하여 해를 구하여 보고자 한다.

## 2. 지배방정식

Fig. 1에서와 같이 경사각을 갖는 직사각형 空洞(cavity)내부의 2차원 定常상태 자연대류현상을 지배하는 방정식들은 온도차에 의한 밀도변화를 Boussinesq approximation을 사용하여 비압축성으로 간주할 수 있을 때 다음과 같이 나타낼 수 있다.

연속방정식

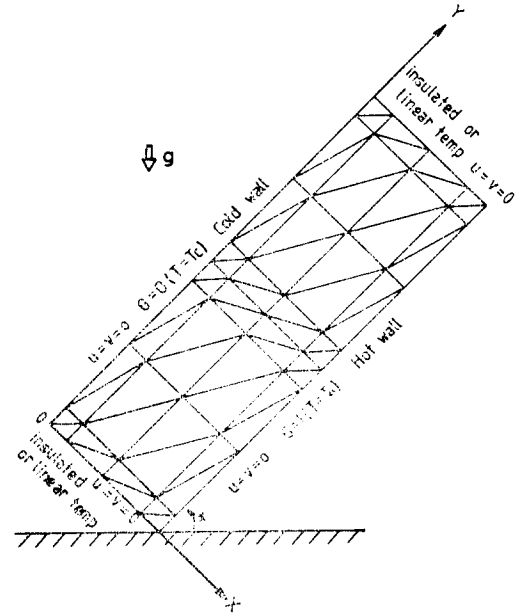


Fig. 1 Inclined cavity model with boundary conditions and finite element mesh.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

운동량방정식

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{Ra}{Pr} \cdot l_x \theta + \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad (2-a)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{Ra}{Pr} \cdot l_y \theta + \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \quad (2-b)$$

에너지방정식

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \left[ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right] \quad (3)$$

윗식에서 모든 변수는 무차원화된 변수들이다.

이상의 지배방정식들을 살펴보면

첫째, 운동량방정식인 (2)식의 우변 둘째항들은 空洞 내부에 자연대류를 誘起시키는 forcing term으로써 경사각이 없는 수직일 경우  $l_x=0$ 이 되어  $x$ -방향 운동량방정식에  $\theta$ 의 항이 없어지게 되며,  $\frac{Ra}{Pr}$ 의 값이 크면 클수록  $\theta$ 의 영향이 더욱 강하게 운동량방정식에 나타나게 된다.

둘째, 에너지방정식의 우변에 나타나는  $Pr$  수는 역수의 형태를 갖고 있어 작은 값일수록  $\theta$ 의 2차 미분 값의 역할이 증대되어 해의 수렴성에 영향을 주게 될 것이다.

이상의 사실들을 종합하여 볼 때 경사각을 갖으며 작은  $Pr$  수와 큰  $\frac{Ra}{Pr}$  값을 갖을수록 유동의 형상이 복잡해지며 따라서 수렴해를 구하는데 어려움과 많은 계산시간을 요하게 될 것이다.

### 3. 수치해법

#### 3.1. 유한요소식

일반적인 유한요소법에 대하여는 수 없이 많은 참고 문헌들이 발간되어 있으므로 여기서는 본 연구와 직접 관련된 주요내용만을 간단히 기술코자 한다.

전반적으로 Galerkin-Weighted Residual Method 와 Zienkiewicz<sup>(8)</sup>의 유한요소화기법(finite element discretisation technique)을 사용하여 지배방정식 (1)~(3) 으로부터 수치계산을 위한 유한요소식을 유도하였다. 일차적으로 특정요소(element)내에서의 주요 변수들은 아래와 같은 trial function 을 사용하여 추산되었다.

$$u^* = \sum_{i=1}^n N_i u_i \quad (4-a)$$

$$v^* = \sum_{i=1}^n N_i v_i \quad (4-b)$$

$$\theta^* = \sum_{i=1}^n N_i \theta_i \quad (4-c)$$

$$p^* = \sum_{i=1}^n M_i p_i \quad (4-d)$$

윗 식에서  $n$  및  $m$ 은 한 요소상의 nodal point 수이며  $N_i$  및  $M_i$ 는  $i$  번째 nodal point 에서의 형태함수(shape function)이다.

본 연구에서는 일차선형형태의  $M_i$ 와 2차함수형태의  $N_i$ 를 사용하였는데 이는 운동량방정식을 검토하여 볼 때 속도 및 온도에 대한 형태함수가 압력에 대한 형태 함수보다 하나 높은 차수를 갖어야하며<sup>(9)</sup>, 이렇게 될 때 요구되는 계산오차의 일치성도 만족시킬 수 있다.<sup>(10)</sup>

여기서 형태함수  $M_i$  및  $N_i$ 는 삼각형요소에 대한 자연좌표계(natural coordinates)  $L_N$ 을 사용하여 식(5)와 같이 나타낼 수 있다.<sup>(9)</sup>

$$M_1=L_1, M_2=L_2, M_3=L_3 \quad (5-a)$$

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= (2L_1-1)L_1, N_2 = (2L_2-1)L_2 \\ N_3 &= (2L_3-1)L_3, N_4 = 4L_1L_2 \\ N_5 &= 4L_2L_3, N_6 = 4L_3L_1 \end{aligned} \right\} \quad (5-b)$$

이때 삼각형에 대한 자연좌표계( $L_i = \frac{A_i}{A}$ )는 직교 좌표계와  $x=L_1x_1+L_2x_2+L_3x_3, y=L_1y_1+L_2y_2+L_3y_3$  관계를 갖고 있다.<sup>(9)</sup> Galerkin-Weighted Residual

Method 와 Green theorem 을 사용하면 아래와 같은 유한요소식들을 얻을 수 있다.

연속방정식

$$\int_{\Omega} \left[ M_k \frac{\partial N_i}{\partial x} u_i + M_k \frac{\partial N_i}{\partial y} v_i \right] d\Omega = 0 \quad (6)$$

운동량방정식

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[ N_k N_i u_j \frac{\partial N_i}{\partial x} u_i + N_k N_i v_j \frac{\partial N_i}{\partial y} u_i \right. \\ & \left. + \frac{\partial N_k}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} u_i + \frac{\partial N_k}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} u_i \right. \\ & \left. + N_k \frac{\partial M_i}{\partial x} P_i + \frac{Ra}{Pr} L_x N_k N_i \theta_i \right] d\Omega \\ & = \int_{\Omega} N_k \frac{\partial u^*}{\partial n} dS \end{aligned} \quad (7-a)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[ N_k N_i u_j \frac{\partial N_i}{\partial x} v_i + N_k N_i v_j \frac{\partial N_i}{\partial y} v_i \right. \\ & \left. + \frac{\partial N_k}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} v_i + \frac{\partial N_k}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} v_i \right. \\ & \left. + N_k \frac{\partial M_i}{\partial y} P_i + \frac{Ra}{Pr} L_y N_k N_i \theta_i \right] d\Omega \\ & = \int_{\Omega} N_k \frac{\partial v^*}{\partial n} dS \end{aligned} \quad (7-b)$$

에너지방정식

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[ N_k N_i u_j \frac{\partial N_i}{\partial x} \theta_i + N_k N_i v_j \frac{\partial N_i}{\partial y} \theta_i \right. \\ & \left. + \frac{1}{Pr} \left\{ \frac{\partial N_k}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial N_k}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right\} \theta_i \right] d\Omega \\ & = \int_{\Omega} N_k \frac{\partial \theta^*}{\partial n} dS \end{aligned} \quad (8)$$

윗 식에서  $\bar{n}$ 은 한 요소영역  $\Omega^e$ 의 경계  $s^e$ 에 바깥방향으로 수직인 단위 벡터이다.

위의 4개 방정식들을 모아서 行列형태로 나타내면,

$$Ax = B, x^T = \{u_i, p_i, v_i, \theta_i\} \quad (9-a)$$

혹은

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ p_i \\ v_i \\ \theta_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{Bmatrix} \quad (9-b)$$

윗식에서

$$\begin{aligned} a_{11} &= \int_{\Omega} \left( N_k N_i u_j \frac{\partial N_i}{\partial x} + N_k N_i v_j \frac{\partial N_i}{\partial y} \right. \\ & \left. + \frac{\partial N_k}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial N_k}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) d\Omega \end{aligned}$$

$$a_{12} = \int_{\Omega} N_k \frac{\partial M_i}{\partial x} d\Omega$$

$$a_{13} = 0$$

$$a_{14} = \frac{Ra}{Pr} \cdot L_x \int_{\Omega} N_k N_i d\Omega$$

$$a_{21} = \int_{\Omega} M_k \frac{\partial N_i}{\partial x} d\Omega$$

$$a_{22} = a_{24} = 0$$

$$a_{23} = \int_{\Omega} M_k \frac{\partial N_i}{\partial y} d\Omega$$

$$a_{31} = 0$$

$$a_{32} = \int_{\Omega} N_k \frac{\partial M_i}{\partial y} d\Omega$$

$$a_{33} = a_{11}$$

$$a_{34} = \frac{Ra}{Pr} \cdot l_y \int_{\Omega} N_k N_i d\Omega$$

$$a_{41} = a_{42} = a_{43} = 0$$

$$a_{44} = \int_{\Omega} \left[ N_k N_i u_j \frac{\partial N_i}{\partial x} + N_k N_i v_j \frac{\partial N_i}{\partial y} + \frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial N_k}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial N_k}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \right] d\Omega$$

$$b_1 = \int_{S} N_k \frac{\partial u^*}{\partial n} dS$$

$$b_2 = 0$$

$$b_3 = \int_{S} N_k \frac{\partial v^*}{\partial n} dS$$

$$b_4 = \int_{S} N_k \frac{\partial \theta^*}{\partial n} dS$$

### 3. 2. Newton-Raphson 방법

일반적으로 대류(convective)항이 나타날 경우 지배 방정식은 비선형이 되어 이들의 해를 구하려면 반복해법(iteration method)이 요구된다.

본 연구에서는 비선형 문제에서 많이 사용되는 Newton-Raphson<sup>(11)</sup> 방법을 이용하였는데, (9)식을 임의의 독립변수  $\phi$ 에 대하여 아래와 같이 바꾸어 나타낼 수 있을 것이다.

$$R_k(\phi) = A_{kij} \phi_i \phi_j + B_{ij} \phi_i - F_k \quad (10)$$

이 식을 Taylor series로 전개하여 1차항들만을 남기면

$$R_k(\phi^{r+1}) = R_k(\phi^r + \Delta\phi) = R_k(\phi^r) + J_{k1}^r (\phi_1^{r+1} - \phi_1^r) = 0 \quad (11)$$

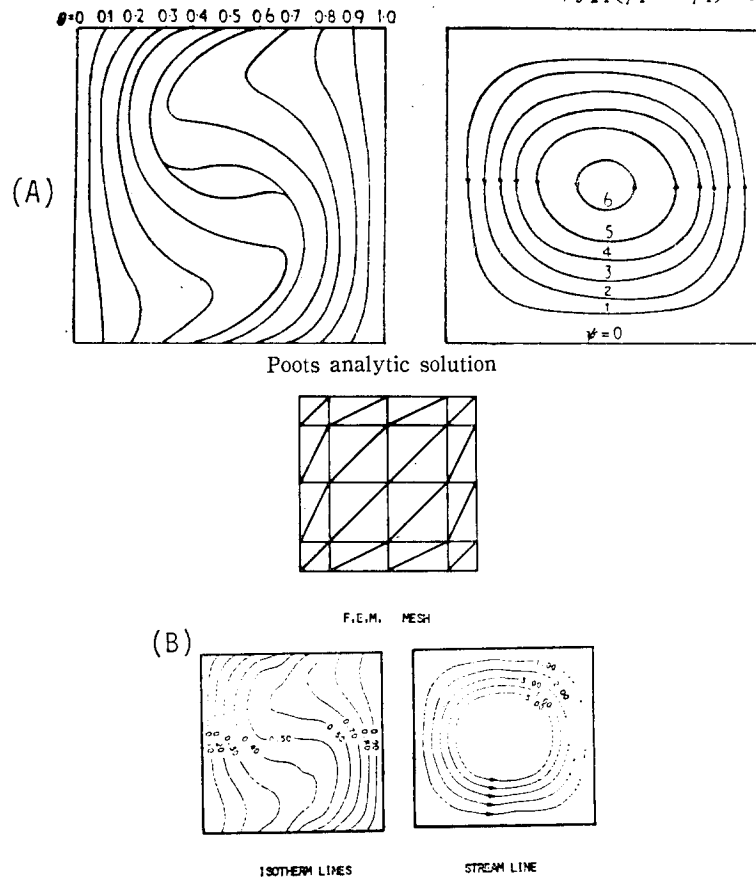


Fig. 2 Comparison of isotherms and streamline patterns with Poots analytic solution. (square cavity,  $Pr=0.73$ ,  $Ra=10^4$ )

여기서  $J_{\phi_1} = \frac{\partial R_1(\phi')}{\partial \phi_1}$

이상의 식(9)과 (11)을 푸는 과정에서 일어나는 매우 큰 비대칭行列식을 풀기 위하여 Frontal<sup>(12)</sup>의 방법을 이용하였다.

**3.3. 유동함수 및 Nu 수 계산**

유동함수(Stream function) :

2차원 유동에서 유동현상을 가시화하는데 매우 효과적인 유동함수는 속도분포를 알 경우 아래와 같은 유동함수와 와도(vorticity)와의 관계로부터 구할 수 있다.<sup>(7)</sup>

$$\nabla^2 \psi^2 = -\omega \quad (12)$$

Nu 수 :

평균 Nu 수는 그 정의로부터 벽면에서의 온도구배로부터 다음과 같이 계산되어진다.

$$\overline{Nu}_{x=0} = \frac{1}{H/W} \int_0^W \left( -\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x=0} dy \quad (13)$$

**3.4. Mesh 선정 및 정확도 시험**

본 연구에서 사용된 요소형태는 삼각형으로써 속도 및 온도는 각 삼각형요소의 3개의 정점과 각변의 중점등 6개의 nodal point 를 사용하였으며, 압력은 3개의 정점만을 nodal point 로 사용하였다.

우선 완성된 프로그램을 시험하고 적절한 mesh 형태를 선정하기 위하여 Poots의 해석<sup>(13)</sup>해가 존재하는 경우에 대하여 4가지 mesh 형태<sup>(14)</sup>를 사용하여 비교, 검토한 결과 Fig. 2와 같은 mesh 형태를 선정하였다. 다음 수치, 정사각형의 경우에 대하여 Taylor의 유한요소법에 의한 수치해와 비교해 본 결과 Fig. 3의 예와 같이 매우 잘 일치함을 알 수 있었다.<sup>(14)</sup>

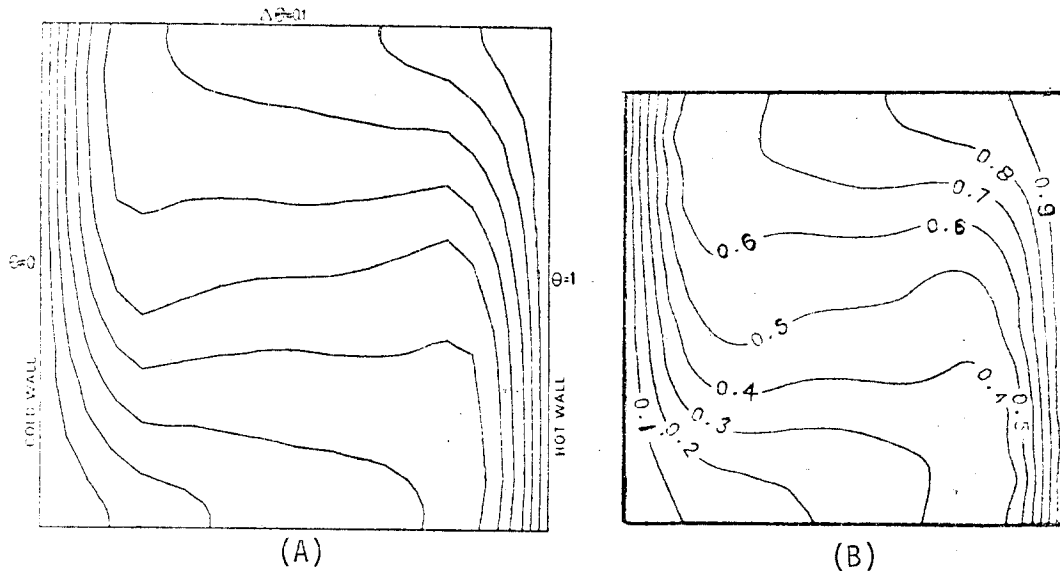


Fig. 3 Comparison of calculation result: isotherms of square cavity for  $\alpha=90^\circ$ ,  $Pr=1000$ , and  $Ra=10^5$ .

- (A) Taylor's calculation
- (B) present calculation

**4. 계산결과 및 고찰**

Fig. 1에서와 같이 경사각을 갖는 높은 종횡비의 경우에 대하여 다음과 같은 경계조건에 대하여 IBM 360 Computer 를 이용하여 수치계산을 실시하였다.

경계조건

$$\begin{cases} x=0 \text{에서 } u=v=0, \theta=0 \\ x=1 \text{에서 } u=v=0, \theta=1 \\ y=0 \text{ 및 } y=\frac{H}{W} \text{에서 } u=v=0, \frac{\partial \theta}{\partial y}=0 \end{cases} \quad (14)$$

그러나 압력에 대한 경계조건은 알려져 있지 않으므로 空洞내부의 임의의 한 node에서의 값을 임의상수로 놓고 이에 대한 상대적인 값을 구하였다. 수치계산에 해의 수렴판정기준(convergence crition)은 일반적

으로 변수  $\phi$ 에 대하여 반복계산 전후 과정에서 상대 오차가 0.1 미만일 경우 계산을 정지했으나 간혹 경우에 따라 0.05를 사용하기도 하였다. 계산에서 필요한 초기치는 일반적으로 낮은  $Ra$ 에서는 정지상태의 유동장을, 높은  $Ra$ 에서는 상대적으로 낮은  $Ra$ 수에서의 유동장을 초기조건으로 사용하였다.

#### 4.1. 경사각이 없는 수직, 종횡비 15인 경우

본 연구에서 사용한 유한요소기법에 의한 수치해를 실험결과 및 유한차분법의 수치해와 비교하기 위하여 Seki<sup>(6)</sup> 및 Roux<sup>(15)</sup>의 계산모델 조건인 종횡비 15, 경사각  $0^\circ$ ,  $Ra=3 \times 10^5$  및  $Pr=480$ 에 대하여 계산을 실시하였다.

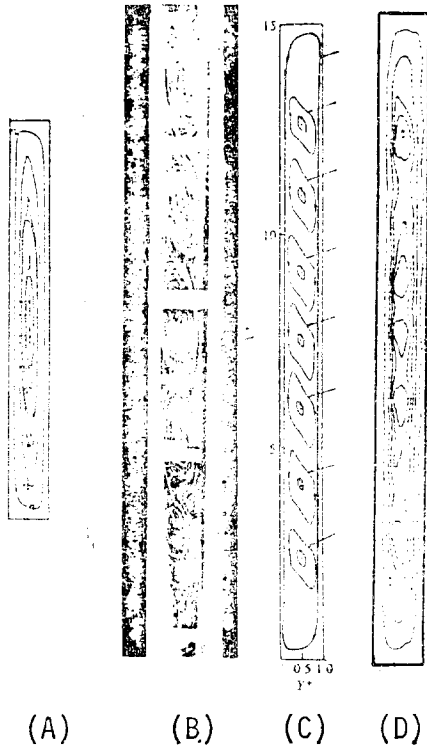


Fig. 4 Comparison of the calculated streamlines for normal, aspect ratio 15,  $Ra=3 \times 10^5$ ,  $Pr=480$ .

- (A) Roux' F.D. Solution
- (B) Seki' visualization
- (C) Seki' F.D. Solution
- (D) Present study

Fig. 4-B는 Seki의 가시화 실험결과로써 2차渦流의 갯수는 대략 5개를 보여주고 있으며, 유한차분법에 의한 Seki의 수치해 Fig. 4-C는 7개를, 역시 유한차분법을 사용한 Roux의 수치해 Fig. 4-A는 1개를 보여주고 있다. 이에 반하여 본 연구결과인 Fig. 4-D는 5개로써 다른 결과들보다 가시화 실험결과와 잘 일치함을 알 수 있다. 이 계산에서 Seki는  $151 \times 21$  mesh를, Roux는  $121 \times 21$  mesh를 사용하였으며, 본 연구에서는  $21 \times 9$  element를 사용하였다.

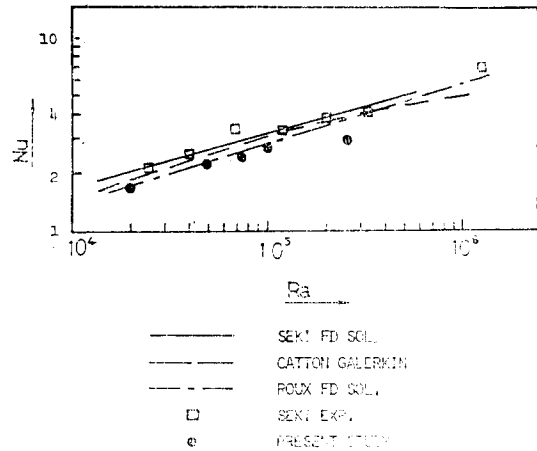


Fig. 5 Variation of average  $Nu$  vs.  $Ra$  for  $Ra=480$ , aspect ratio 15 and  $\alpha=90^\circ$ .

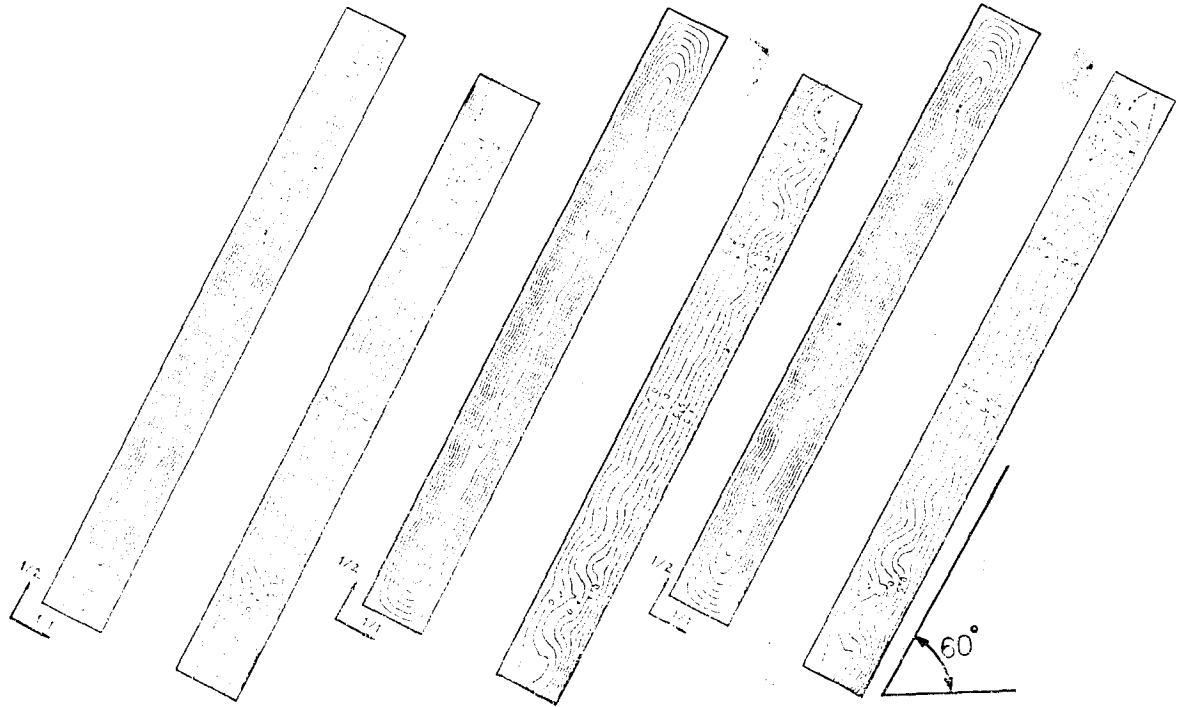
유동형상의 이와 같은 큰 차이에도 불구하고 열전달 특성은 3경우에 있어 Fig. 5에서 보는 바와 같이 매우 작은 차이를 보여줌으로써 2차渦流의 존재가 전반적인 열전달 특성에 큰 영향을 주지 않는다고 주장한 Catton<sup>(6)</sup>의 주장을 확인할 수 있었다.

#### 4.2. 경사각이 있고 종횡비 20인 경우

일반적으로 사용된 낮은  $Ra$ 에서의 해를 보다 높은  $Ra$ 에서의 초기조건으로 사용하는 방법은  $Ra$ 가 높아지고,  $Pr$ 이 1보다 작아지면서 경사각이 증가함에 따라 수렴해를 구하는데 어려움이 많았다.

이 경우에는 같은  $Ra$ 에 대하여 높은  $Pr$ 에서의 해를 보다 낮은  $Pr$ 경우에 있어서의 초기조건으로 이용할 경우 좋은 결과를 얻을 수 있었다.

이 사실은 Fig. 6에서 보듯이  $Pr$ 수 변화에 따른 온도분포 및 유동함수의 변화가 매우 작은 사실에 착안한 것으로써 최대  $Ra$ 수를 높이는 데 매우 유용한 방법이였다. 이러한 방식으로 낮은  $Pr$ 수를 갖는 공기( $Pr$

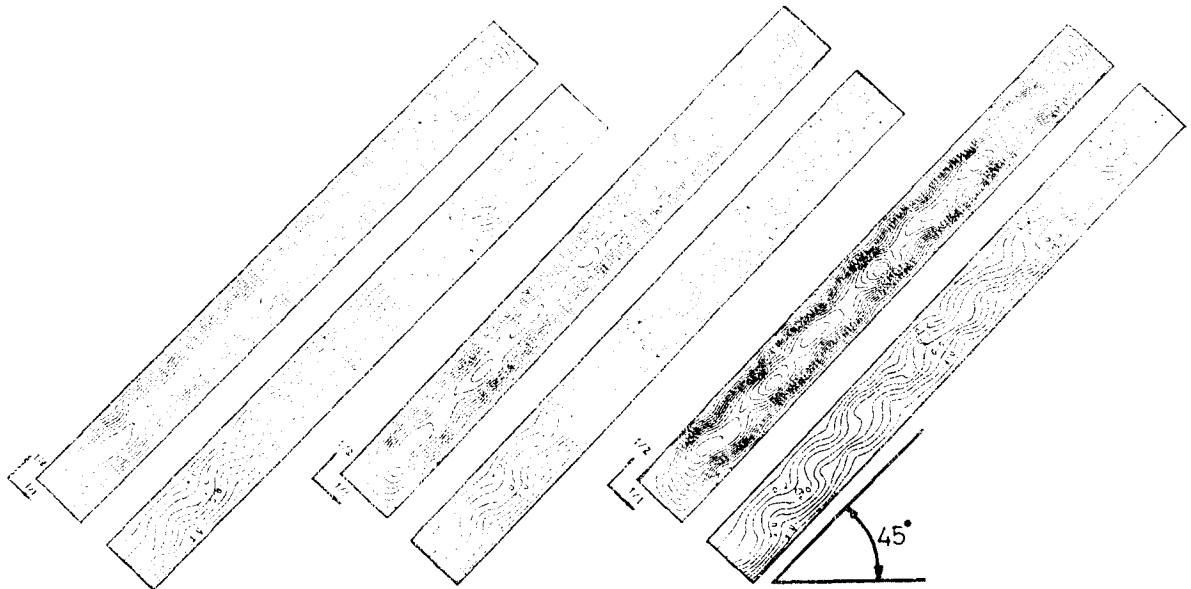


(A)  $Pr = 700$

(B)  $Pr = 70$

(C)  $Pr = 7$

Fig. 6 Streamline and isotherms with variation of  $Pr$  for cavity of aspect ratio 20,  $\alpha=60^\circ$ ,  $Ra=5 \times 10^3$ ,



(A)  $Ra = 3000$

(B)  $Ra = 3500$

(C)  $Ra = 5000$

Fig. 7 Streamlin and isotherms with variation of  $Ra$  for cavity of aspect ratio 20,  $\alpha=45^\circ$ ,  $Pr=0.7$ .

=0.7)와 종횡비 20인 경우에 대하여  $\frac{Ra}{Pr}$  값을 경사각이 없는 수직인 경우 최대  $3 \times 10^4$ 까지, 경사각  $45^\circ$ 인 경우 최대  $1.1 \times 10^4$ 까지 올릴 수 있었다.

그러나  $Pr$  수가 1보다 작은 경우( $Pr=0.7$ )에서는 Fig. 7에서 보듯이  $Ra$  수의 변화에 따라 流線의 모양이 매우 급격하게 변하며 이와 동시에 등온선의 모양도 점차 복잡한 곡선의 형태를 취하게 되어 2차와류의 갯수와 일치되는 요철의 갯수를 갖음을 볼 수 있었다.

공기의 경우( $Pr=0.7$ )에 대하여 열전달 특성을 비교하여 볼 때 Fig. 8-A에서 경사각이 없는 경우는 Fishenden & (5) Saunders의 실험곡선과 매우 잘 일치함을 보여주고 있으며 경사각이  $45^\circ$ 일 경우 Fig. 8-B에서 Hottel & (5) Woertz의 실험곡선과 일치함을 보여 주었다.

따라서  $Ra \geq 5 \times 10^4$ 영역에서 정확한 K.R. Randall의 실험식은 Fig. 8-B에서 보듯이 이 작은  $Ra$  수 영역까지 연장 사용할 수 없으므로 수치계산치들로부터 아래와 같은 새로운 관계식을 구하였다. (Fig. 9 참조)

$$Nu = 0.2565 \times (Ra \cdot \cos(\alpha - 90^\circ))^{0.18064} \quad (15)$$

$$\text{단 } 3 \times 10^3 \leq Ra \leq 2.5 \times 10^4$$

$$45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$$

$$Pr = 0.7$$

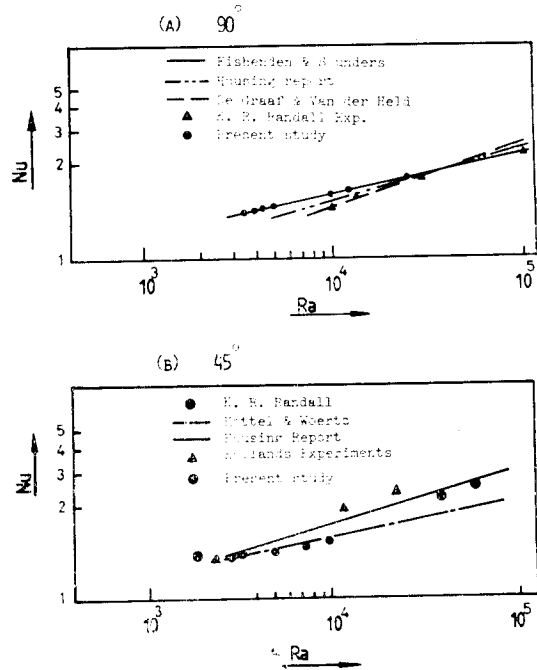


Fig. 8 Variation of average  $Nu$  vs.  $Ra$  for cavity of aspect ratio 20, and  $Pr=0.7$ .

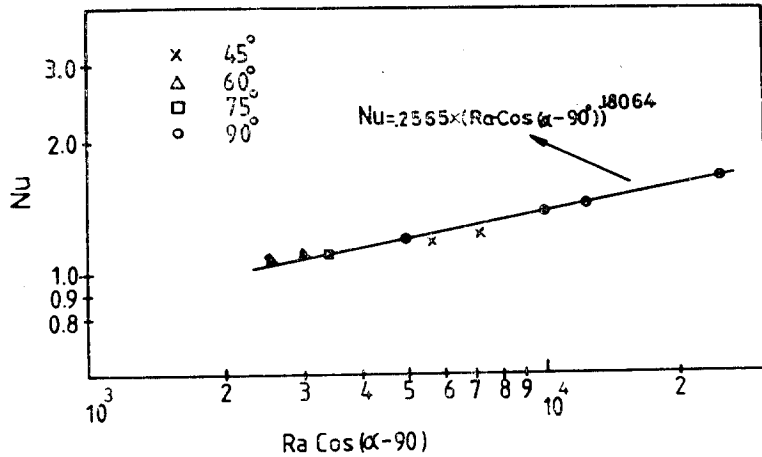


Fig. 9 Correlation for the variation of  $Nu$  vs.  $Ra \cdot \cos(\alpha - 90^\circ)$ ,  $Pr=0.7$ .

### 5. 결 론

본 연구로부터 종합적으로 다음과 같은 사항을 지적할 수 있었다.

- 1) 2차 渦流 등으로 인하여 복잡한 유동현상을 갖는 空洞내부의 자연대류 현상을 해석함에 있어 유한요소법에 의한 수치해석은 유동현상 및 열전달 특성 해석에 있어 좋은 결과를 주었다.
- 2) 경사각이 있고 높은  $Ra$  수 및 낮은  $Pr$  수를 갖는



경우에 대하여 보다 높은  $Pr$  수의 해를 초기해로 이용하는 방법은 매우 효과적이었으며 본 연구에서는 종횡비 20,  $Pr=0.7$  인 경우에  $\frac{Ra}{Pr}$ 의 값을 경사각  $45^\circ$ 인 경우 최대  $1.1 \times 10^4$ , 수직인 경우  $3 \times 10^4$ 까지 수렴해를 구할 수 있었다.

3) 종횡비 20 인 경우에,  $3 \times 10^3 \leq Ra \leq 2.5 \times 10^4$  영역에서 경사각의 영향을 고려하며  $Nu$  수를 정확히 계산할 수 있는 아래와 같은 관계식을 제시하였다. ( $Pr=0.7$ )

$$Nu = 0.2565 \times (Ra \cdot \cos(\alpha - 90^\circ))^{0.1866}$$

### References

1. E.R.G., Eckert, and W.O., Carlson, "Natural Convection in an Air Layer Enclosed Between Two Vertical Plates with Different Temperatures." International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 2, 1961, pp.106-120.
2. J.W., Elder, "Laminar Free Convection in a Vertical Slot". Journal of Fluid Mechanics, Vol. 23, 1965, pp.77-111.
3. D. Dropkin, and E. Somerscales, "Heat Transfer by Natural Convection in Liquids Confined by Two Parallel Plates Which Are Inclined at Various Angles with Respect to the Horizontal" Journal of Heat Transfer, Trans. ASME, Series C. Vol. 87, 1965, pp. 77-84.
4. A.F., Emery, and N.C., Chu, "Heat Transfer Across Vertical Layers", Journal of Heat Transfer, Trans. ASME, Series C, Vol. 87, 1965, pp.110-114.
5. K.R. Randall, and J.W. Mitchell, and M.M. El-Wakil, "Natural Convection Heat Transfer Characteristics of Flat Plate Enclosures". Journal of Heat Transfer, Trans. ASME, Vol. 101, Feb. 1979, pp.120-125.
6. Nobuhiro Seki, and Shoichiro Fukusako, and Hideo Inaba, "Visual Observation of natural convective flow in a Narrow Vertical Cavity". Journal of Fluid Mechanics Vol. 84, part 4, 1978, pp.695-704.
7. C. Taylor and A.Z. Ijam, "A Finite Element Numerical Solution of Natural Convection in Enclosed Cavities" Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering Vol. 19, 1979, pp. 429-446.
8. O.C. Zienkiewicz, McGraw-Hill, "The finite element method in engineering science".
9. T.J. Chung, "Finite Element Analysis in Fluid Dynamics". McGraw-Hill, 1978, pp.205-227, pp.68~78.
10. P. Hood and C. Taylor, "Navier-Stokes equations using mixed interpolation, in J.T. Oden et al., ed., Finite elements in Flow Problems. (UAH Press, Huntsville, AL, 1974), pp.121-132.
11. J.T. Oden, "Finite Elements of Non-linear Continua.", McGraw-Hill, New York, 1972, pp.262-292.
12. P. Hood, "Frontal Solution Program for Unsymmetric Matrix" International Journal for Numerical Method in Engineering. Vol. 10, 1976, pp.379-399.
13. G. Poots, "Heat Transfer By Laminar Free Convection in Enclosedplane Gas Layers". Quart. Journ. Mech. and Applied Math., Vol. XI, part 3, 1958, pp.257-273.
14. Y.S. LEE, "A Study on Natural Convection in Inclined Rectangular Cavity of High Aspect Ratio using F.E.M." M.S Thesis Dept. of Mech. Eng. KAIS, 1981.
15. B. Roux, J.-C., Grondin and P. Bontoux, "Natural Convection in Inclined Rectangular Cavities". Numerical Methods in thermal problems. Proceeding of the First Int. Conference, Swansea, 2-6, July 1979.
16. Portonovo Ayyaswamy and Ivan Catton, "The Boundary-Layer Regime for Natural Convection in a Differently heated, tilted rectangular Cavity." Journal of Heat Transfer, Trans. ASME 1973, pp.543-545