

有限要素法에 의한 三相誘導電動機의 磁束分布解析에 관한 研究

論 文
30~4~1

A Study on the Magnetic Flux Distribution of 3-Phase 4-Pole Induction Motor by Finite Element Method

任 達 鎬* · 玄 東 石** · 任 泰 彬***
(Dal - Ho Im · Dong - Suk Hyun · Tae - Bin Im)

Abstract

The magnetic field distribution in saturable iron part of electromagnetic energy conversion devices is defined by the nonlinear quasi-Poisson equation that is described the electromagnetic field characteristics and satisfied the natural boundary condition.

The solution of this equation is obtained by minimizing an energy functional by means of trial function that defined in triangular subregion of two-dimensional field region.

As a result, the accuracy of the machine design is increased by use of its solution.

In this respect, this study is developed the basic theory to analyze the magnetic flux distribution in saturable iron part and air gap of induction motor that its secondary part is short circuit by the variational principle, the minimized theory of energy functional, the application of F.E.M., and treatment of computer.

As theoretical data compared with the practices, the validity of the theory in this study is supported by experimental findings.

1. 序 論

諸般産業分野의 高度成長으로 因하여 動力系統의 電氣機器들은 大型化되고 細分化되었다. 따라서 이러한 機器들은 機能上 磁氣裝荷의 증가와 電氣裝荷의 配分問題 등으로 生産設計面에서 過去와는 달리 Energy 密度가 높은 電氣機器로 開發되고 있다. 이러한 生由로 많은 學者들은 重電氣機器分野의 生産技術을 높이고 發展시키기 위해서 高 에너지 密度電氣機器의 設計上 基礎資料가 되는 磁束分布特性을 면밀히 解析하게 되었다.

從來에는 磁束分布特性을 解析하기 위하여 等角寫像法,¹⁾ 도전지법, 그래프法, 아나로그法^{2)~4)} 등이 使用되었으나 近來에 와서는 電子計算機의 出現으로 數值解析法에 따른 差分法,⁵⁾ 積分方程式法,⁶⁾ 등을 使用하게 되었다. 그러나 高 에너지 密度 電氣機器의 精密度 높은 磁束分布特性 解析에서는 이와 같은 解析方法으

로는 不可能 또는 不充分하므로 이에대한 代案의 하나로 1972年 McGill 大學의 P. Silvester 教授에 依하여 電氣機器設計를 위한 磁束分布特性解析에 有限要素法을 適用⁷⁾시킨 것을 시초로 現在 高度의 解析 技術發展에 이르게 되었다.

이러한 觀點에서 本 研究에서는 有限要素法에 依한 3相 4極 誘導電動機, 2次側 구속시킨 경우 磁束分布特性을 解析코자 磁界領域을 三角形要素로 分割하였고 各 三角形 頂點에서의 Vector potential, \vec{A} 에 關한 에너지汎函數를 最少化시킨후 各 三角形要素에 對한 要素 Matrix 方程式으로부터 全體 Matrix 方程式을 求하였다. Matrix計算에 따른 數值解析은 Direct Method 中 하나인 Gauss-Jordan소거법^{7)~8)}을 使用하였고 그 解析結果인 磁束分布特性은 一般의으로 예측할수 있는 分布樣相과 잘 符合되었다.

2. 電磁 Energy 變換機器의 基本方程式 誘導

電氣機器內에서의 磁界에 關한 關係式은 Maxwell 의 電磁方程式에서 다음의 基本式을 들 수 있다.¹⁹⁾

* 正會員 : 漢陽大 工大 電氣工學科 教授 · 工博

** 正會員 : 漢陽大 工大 電氣工學科 助教授

*** 正會員 : 漢陽大 大學院

接受日字 : 1980年 12月 12日

단, 全 解析領域에서 電荷 및 變位電流은 무시한다.

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} \times \vec{J}_i & a) \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times (\nabla \times \vec{B}) & b) \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 & c) \\ \nabla \cdot \vec{D} &= 0 & d) \\ \vec{J}_i &= \sigma \vec{E} & e) \\ \vec{B} &= \mu \vec{H} & f) \end{aligned} \right\} (2-1)$$

磁束密度, \vec{B} 와 벡터 포텐셜, \vec{A} 와의 상호관계는

$$B = \nabla \times A \quad (2-2)$$

이다.

여기서 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ 이므로 이들로 부터

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{B} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \nabla \times \vec{A} \quad (2-3)$$

이며 $\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$ ' 되고 정상상태의 경우 $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ 이므로 式(2-1-a)는

$$-\frac{1}{\mu} \nabla^2 \vec{A} = \vec{J} - \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \sigma (\nabla \times \vec{A} \times \vec{A}) \quad (2-4)$$

와 같이 된다.

이 式은 回轉에너지 變換機器의 磁界를 지배하는 方程式이 되며 더욱 一般의인 경우에는 슬립이 S 이고 \vec{A} 와 \vec{J} 가 특성적으로 정현적 變化를 할 경우

$$\left. \begin{aligned} \vec{A} &= A e^{i(\omega t + \frac{\pi}{\tau} x)} \\ \vec{J} &= J e^{i(\omega t + \frac{\pi}{\tau} x)} \end{aligned} \right\} (2-5)$$

이므로 式(2-4)에 代入 整理하면

$$\frac{1}{\mu} \nabla^2 \vec{A} = -\vec{J} + j\omega\sigma \vec{A} - \alpha[(1-S)V \times \nabla \times \vec{A}] \quad (2-6)$$

이다.

本 研究에서는 2次側 구속시인 경우로서 式(2-6)은

$$\frac{1}{\mu} \nabla^2 \vec{A} = -\vec{J} + j\omega\sigma \vec{A} \quad (2-7)$$

와 같은 선형 전과 방정식을 유도하였다.

3. 에너지汎函數와 準調和方程式

電磁界 問題에서 나타내는 편미분방정식의 解는 變分理論에 依한 에너지汎函數의 最少值를 주는 Euler 方程式의 解와 一致한다. 電磁界內에서의 에너지汎函數는 全 포텐셜 에너지를 나타내므로 全 포텐셜 에너지 = (本 系의 內部에너지의 증가량) - (本 系의 外部에 너지 감소량)이며, 따라서 한 系의 內部에서 행해진 일에서 그 系의 外部에서 공급된 일을 감한것에 해당된다.

그런데 $\frac{1}{\mu} = \nu(\vec{B}, x, y)$ 의 磁氣抵抗率은 위치함수이고 磁束密度, \vec{B} 도 非線型으로 電氣機器에서의 磁界만을 다루는 경우에 있어서는 2次元의으로 취급하여²⁾ 에너지汎函數는 다음과 같이 영역, R 에서 나타낼 수 있다

$$F = \frac{1}{2\mu} \iint_R \left\{ \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial y} \right)^2 \right\} ds + \frac{j\omega}{2\rho} \iint_R \vec{A}^2 ds - \iint_R \vec{J} \cdot \vec{A} ds \quad (3-1)$$

式(3-1)은 磁束密度, \vec{B} 가 線型인 경우로서 $\frac{1}{\mu_0 \mu_s} = \nu$ 가 일정한 값을 갖는다. 즉

$$F = \iint_R f(A, A_x, A_y, x, y) dx dy \quad (3-2)$$

와 같이 간단하게 정리된다.

단 $A_x = \frac{\partial A}{\partial x}$, $A_y = \frac{\partial A}{\partial y}$ 이다.

式(3-2)의 變分을 취하여 最少化條件을 適用²⁾하면 領域, R 에서

$$\delta F = 0 \quad (3-3)$$

$$\iint_R \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial A_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial A_y} \right) - \frac{\partial f}{\partial A} \right\} \delta A dx dy + \iint_R \left\{ \frac{\partial f}{\partial A_x} \cdot \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial f}{\partial A_y} \cdot \frac{\partial y}{\partial n} \right\} \delta A dx dy = 0 \quad (3-4)$$

와 같이 되고, 따라서 停留條件(stationary condition)은 R 領域(그림 1참조)에서

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial A_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial A_y} \right) - \frac{\partial f}{\partial A} = 0 \quad (3-5)$$

인 Euler 方程式이 얻어지고 自然境界條件은 境界 τ_2 (그림 1참조)에서

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial A_x} \cdot \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial A_y} \cdot \frac{\partial y}{\partial n} = 0 \quad (3-6)$$

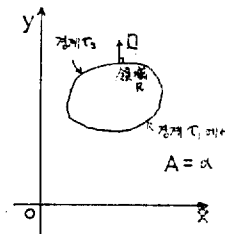


그림 1. 磁界의 領域과 境界

Fig. 1. The Domain and boundary in magnetic field.

인 結果式이 얻어진다. 따라서 式(3-5)에 函數, f 에 따른 式(3-7)을 代入 整理하면 에너지汎函數를 最少로하는 停留條件(stationary condition)은

$$\nu \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial y} \right) \right\} = \frac{j\omega}{\rho} \vec{A} - \vec{J} \quad (3-7)$$

이며, 自然境界條件은 式(3-6)와, 式(3-1)로 부터

$$\nu \frac{\partial \vec{A}}{\partial n} = 0 \quad (3-8)$$

을 얻었다.

그러므로 電氣機器에서 磁界만을 다룰 경우에는 磁界特性은 自然境界條件을 만족시키는 非線型 에너지

汎函數의 最少化 方程式에서 벡터포텐셜 \vec{A} 를 구하므로써 電氣機器의 磁束分布特性 解析^{2),3),4)}이 可能하므로式(3-7)로 表現된 전과방정식의 解를 自然境界條件式(3-8)下에서 有限要素法을 적용 求하였다.

4. 有限要素法の 適用

有限要素法을 利用한 3相 4極 誘導電動機의 2次元 구속시의 磁界分布特性을 解析^{2),3),4)}하기 위하여 다음과 같은 假定을 두었다.

- 1) 電源電流密度, \vec{J} 와 벡터포텐셜 \vec{A} 는 回轉축(Z축) 方向成分만 있고 時間的으로 定靜적 變化를 한다.
- 2) 電流도체는 渦流(eddy current), 및 표피효과를 무시한다.
- 3) 鐵心部에 있어서는 透磁率과 誘電率은 일정한 값이고 히스테리시스 손실 磁氣포화 및 抵抗率의 온도 효과는 무시한다.
- 4) 磁界는 定常狀態로서 變위전류는 없는 것으로 한다.

이와같은 假定하에서 그림 1에서 보여주는 바와같이 境界, τ_2 로 둘러싸인 x, y 平面內의 2次元 領域, R 에서 전과방정식은 式(3-7)에 依하여

$$\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial A}{\partial t} - J \quad (4-1)$$

로 되고 自然境界條件은 式(3-8)에 依하여 A 는 境界上의 값, $A = \alpha(x, y)$ (境界 τ_1)이고 $\frac{\partial A}{\partial n} = 0$ (境界 τ_2)(부록참조)이다.

지금 式(3-7)의 벡터포텐셜, \vec{A} 와 電流密度 \vec{J} 는 靜態적으로 變化한다고 假定하였으므로

$$\left. \begin{aligned} \vec{J} &= J e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})} \\ \vec{A} &= A e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})} \end{aligned} \right\} \quad (4-2)$$

이며, 式(3-7)에 式(4-2)를 代入하면 線형정유방정식은

$$\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right) = j\omega \frac{A}{\rho} - J \quad (4-3)$$

와 같다.

따라서 에너지折函數, F 는

$$\begin{aligned} F &= \int_R \frac{1}{2\mu_s \mu_0} \left\{ \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right)^2 \right\} dR \\ &+ \frac{j\omega}{2\rho} \int_R A dR - \int_R J A dR \end{aligned} \quad (4-4)$$

이다.

즉 式(4-3)의 解는 變分原理에 依하여 式(4-4)의 에너지汎函數를 最少化하는 最少化條件을 만족하는 벡터 포텐셜, \vec{A} 의 값이다.⁶⁾

全 解析領域을 有限個의 要素로 分割하고 이 汎函數의 有限要素化와 各要素에서 에너지汎函數를 求하여

最少化條件을 適用시키면 다음과 같다.

그림 2는 2次元 領域에서의 三角形要素分割을 나타내며 三角形要素의 各節點 i, j, k 는 反時計方向으로 經하고 a, b, c 를 기하학적 상수라 할때 벡터 포텐셜, A 의 z 성분 A_z 는

$$\begin{aligned} A_z &= \frac{A_i}{2\Delta} (a_i + b_i x + c_i y) + \frac{A_j}{2\Delta} (a_j + b_j x + c_j y) \\ &+ \frac{A_k}{2\Delta} (a_k + b_k x + c_k y) \end{aligned} \quad (4-5)$$

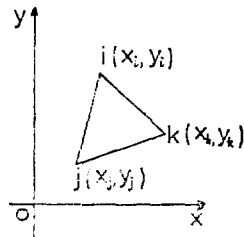


그림 2. 삼각요소

Fig. 2. Triangular element.

여기서

$$\left. \begin{aligned} a_i &= x_j y_k - x_k y_j \\ a_j &= x_k y_i - x_i y_k \\ a_k &= x_i y_j - x_j y_i \\ b_i &= y_j - y_k \\ b_j &= y_k - y_i \\ b_k &= y_i - y_j \\ c_i &= x_k - y_i \\ c_j &= x_i - y_k \\ c_k &= x_j - y_i \end{aligned} \right\} \quad (4-6)$$

으로 한다.

이와같이 1次 시험함수로 近似化시킨 벡터 포텐셜, \vec{A} 로 磁束密度, \vec{B} 를 2次元 직교좌표에서 나타내면 式(4-5)에 의해

$$\vec{B} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} \vec{i} + \frac{\partial A_z}{\partial x} \vec{j} \right) \quad (4-7)$$

이며, 式(4-5)를 式(4-7)에 代入하면

$$\vec{B} = \frac{1}{2\Delta} \sum_i (A_i C_i \vec{i} - A_i b_i \vec{j}) \quad (4-8)$$

이다.

이것을 式(4-4)에 代入하여 에너지汎函數의 最少化條件을 適用하면

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{\partial F}{\partial A_i} &= \sum_{i=1}^3 \left\{ \frac{1}{\mu \mu_0} \int_R \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial A_i} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right) \right. \\ &+ \left. \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial A_i} \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right) \right\} dR + \frac{j\omega}{\rho} \int_R A \left(\frac{\partial A}{\partial A_i} \right) dR \\ &- \int_R J \left(\frac{\partial A}{\partial A_i} \right) dR = 0 \end{aligned} \quad (4-9)$$

과 같이 된다.

따라서 三角形要素內의 임의점 (x, y)에서의 벡터 포텐셜 A를 나타내는 式(4-5)를 式(4-9)에 代入하여 대수방정식을 정리하면

$$\sum_{k=1}^k \frac{\partial F}{\partial A_k} = \sum_{k=1}^k \left\{ \frac{1}{\mu_s \mu_0} \int_R \left(\sum_{i=1}^k \frac{b_i b_j + c_i c_j}{(2\Delta)^2} \right) dR \right\} + \frac{j\omega}{\rho} \int_R \left(\sum_{i=1}^k \frac{(a_i + b_i x + c_i y)(a_j + b_j x + c_j y)}{(2\Delta)^2} A_k \right) dR - j \int_R \sum_{i=1}^k \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2\Delta} dR \quad (4-10)$$

로 된다.

따라서 式(4-10)을 面積座標系로 나타내면, 첫째항은

$$\sum_{k=1}^k \left\{ \frac{1}{\mu \mu_0} \sum_{i=1}^k \frac{(b_i b_j + c_i c_j)}{4\Delta^2} \right\} A_k$$

$$= \frac{\nu}{4\Delta} \left\{ \begin{matrix} (b_i b_j + c_i c_j), (b_i b_j + c_i c_j), (b_i b_k + c_i c_k) \\ (b_i b_j + c_i c_j), (b_j b_k + c_j c_k), (b_j b_k + c_j c_k) \\ (b_k b_i + c_k c_i), (b_i b_j + c_i c_j), (b_k b_k + c_k c_k) \end{matrix} \right\} \begin{pmatrix} A_k \\ A_j \\ A_i \end{pmatrix} = [p] [A] \quad (4-11)$$

둘째항은

$$\sum_{k=1}^k \frac{j\omega}{\rho} \int_R \sum_{i=1}^k \frac{(a_i + b_i x + c_i y)(a_j + b_j x + c_j y)}{(2\Delta)^2} A_k dR = \sum_{k=1}^k \frac{j\omega}{\rho} \int_R \sum_{i=1}^k \zeta_i \zeta_j A_k 2\Delta d\zeta_i d\zeta_j = \frac{j\omega}{\rho} \frac{1}{2\Delta} \int_0^1 \zeta_i^2 d\zeta_i \int_0^{1-\zeta_i} \zeta_j d\zeta_j A_k = \frac{j\omega}{\rho} 2A [A_k] = \frac{j\omega\Delta}{12\rho} \begin{bmatrix} 2, 1, 1 \\ 1, 2, 1 \\ 1, 1, 2 \end{bmatrix} = [Q] [A_k] \quad (4-12)$$

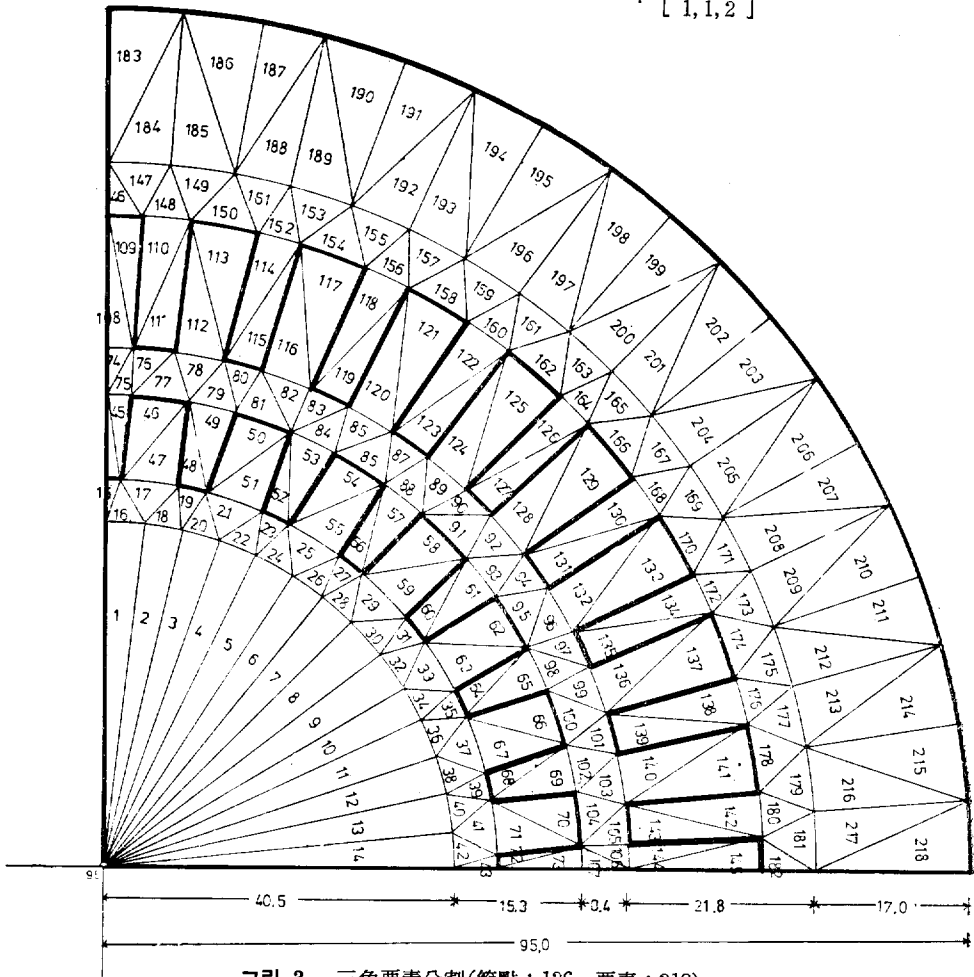


그림 3. 三角要素分割(節點: 126, 要素: 218)

Fig. 3. Subdivision of triangular elements in A-C motor (node: 126, element: 218)

셋째항은

$$\int_R \sum_i \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2\Delta} dR = \sum_i \int_R \xi_i d\xi_i$$

$$= \frac{J}{3}\Delta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = [F] \quad (4-13)$$

이다.

단,

$$\xi_i = \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2\Delta}$$

$$\xi_j = \frac{a_j + b_j x + c_j y}{2\Delta} \quad (4-13)$$

$$\xi_k = \frac{a_k + b_k x + c_k y}{2\Delta}$$

$$\xi_i + \xi_j + \xi_k = 1$$

$$dR = dx dy = 2\Delta d\xi_i d\xi_j$$

$$\iint_R dR = \iint_R dx dy = 2\Delta \iint d\xi_i d\xi_j$$

$$\iint_R dR = 2\Delta \int_0^1 d\xi_i \int_0^{1-\xi_i} d\xi_j = \Delta$$

이다.

따라서 式(4-B), 式(4-14), 式(4-15)을 전체領域에 대한 Matrix方程式으로 나타내면

$$[P] [A] + k^2 [Q] [A] = [F] \quad (4-16)$$

이다.

$$P_{ij} = \sum p_{ij}^{(*)} \quad Q_{ij} = \sum q_{ij}^{(*)}$$

$$F_i = \sum f_i^{(*)} \quad K^2 = \frac{j\omega}{\rho}$$

따라서 式(4-13), 式(4-14), 式(4-15)을 전체領域에 대한 Matrix方程式으로 나타내면

$$[P] [A] + K^2 [Q] [A] = [F] \quad (4-16)$$

이다.

$$P_{ij} = \sum p_{ij}^{(*)} \quad Q_{ij} = \sum q_{ij}^{(*)}$$

$$F_i = \sum f_i^{(*)} \quad K^2 = \frac{j\omega}{\rho}$$

6. 結果考察 및 檢討

앞서 언급한 바와같이 3相 4極 2.2[KW], 60[Hz] 誘導電動機 2次側 구축시에 有限要素法을 적용하였으며 磁界의 대칭성을 고려하면 주기조건³⁾이 성립하므로 解析領域을 全體의 1/4만 취하여 要素類, 218, 節點類, 126, (그림 3참조), 1次側 電流密度, $J=2 \times 10^6 \sin(\omega t + \frac{\pi}{\tau} x)$, 鐵心부의 比透磁率, $\mu_r=2,000$ [H/m], 코일권의 導電度, $\sigma=1.724 \times 10^{-6}$ [mho/m]로 定하였고, 境界條件으로 x軸 및 y軸上에서의 벡터 포텐셜 \vec{A} 는 임의의 값으로, 鐵心 주변의 벡터 포텐셜 \vec{A} 는 零으로 하여 解析한 結果는 그림 5와 같은 磁束分布特性을 얻었다. 여기에서 極의 中央部分의 磁束分布는 電氣의

中心線部分의 磁束分布에 비해 상당히 密함을 보였으며 공극에서의 磁束密度分布는 橫軸反作用(交叉磁化作用)으로 電氣函 中心線의 左側部分에서 右側部分으로 치우치는 경향을 얻었다. 2次側 구축시(S=1)인 경우이므로 同期速度(S=0)로 回轉하는 경우⁵⁾에 비해 空隙磁束分布는 상당히 일그러짐을 보여 주어 예측^{5), 16), 17)}과 거의 符合됨을 제시해 주었다.

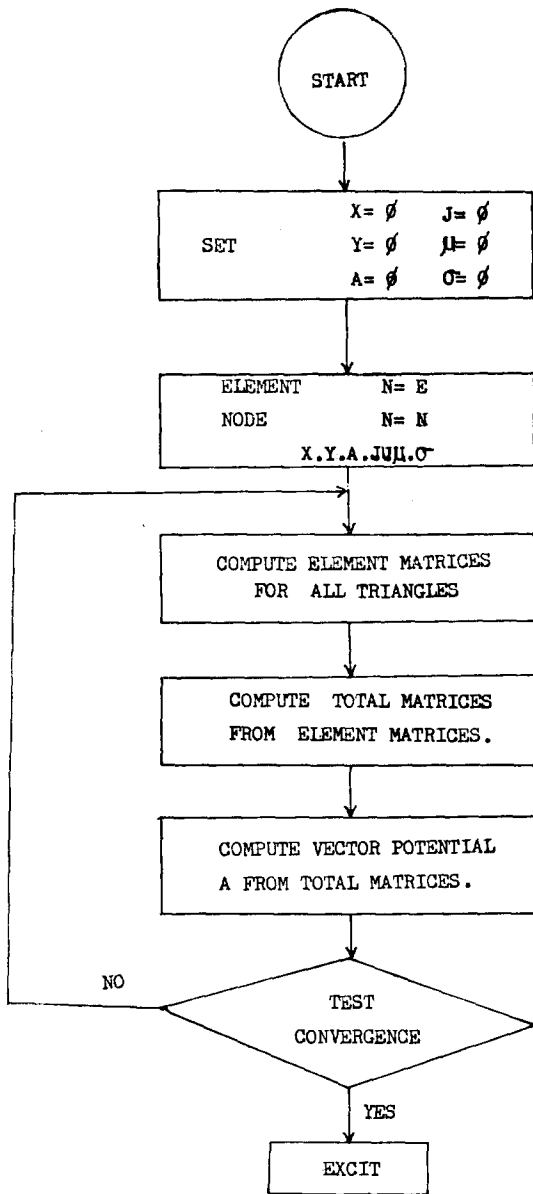


그림 4. 계산과정
Fig. 4. Flow chart

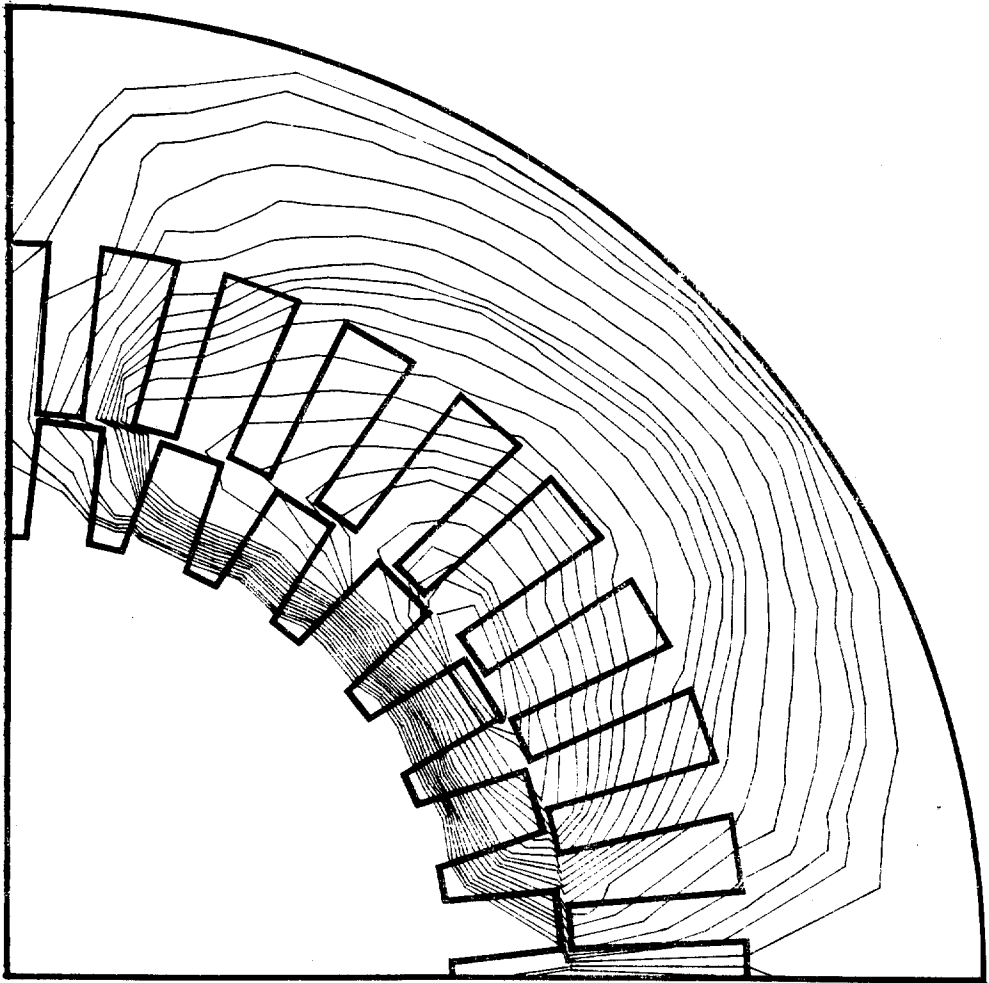


그림 5. 3相 4極 誘導電動機 磁束分布 (slip=1, t=0)

Fig. 5. Plotting of magnetic flux distribution in 3-Phase A-C motor.

7. 結 論

本 解析結果는 우리가 一般的으로 생각하는 分布特
 性과는 다소간 差異가 있었으나 磁束密度, \bar{B} 즉, 透磁
 率의 非線型性을 고려하고 要素分割을 증가 시키고 슬
 롯과 空隙사이에서 的 境界條件을 충분히 고려한다면
 실제에 符合된 結果를 얻을 것으로 믿으며, 이의 結果
 를 基礎로 하여 精確한 回轉機器解析 및 設計에 도움
 을 줄것으로 기대된다.

Reference

1. Kenneth H. Huebner; "The Finite Element Method for Engineers." Tower press. 1975.
2. M.V.K Chari; "The Finite Element Solution of the Eddy-current Problem in Magnetic Structures." IEEE Trans. VOL. PAS-93. pp.62~72. 1974.
3. M.V.K Chari & P. Silvester; "Analysis of Turboalternator Magnetic Fields by Finite Element." IEEE Trans. VOL. PAS-90. No 2. pp.454~464. 1971.
4. P. Silvester & M.V.K Chari; "Finite Element Solution of Saturable Magnetic Field Problems." IEEE Trans. VOL. PAS-80. No 7. pp.1642~1652. 1970.
5. M.V.K Chari & P. Silvester; "Finite Element

- Analysis of Magnetic-Ally Saturated D-C Machines." IEEE Trans. PAS-89. pp.2362~2372. 1971.
6. O.C. Zienkiewicz; "The Finite Element Method in Engineering Science." McGraw-Hill. 1971.
 7. R.J. Bathe & E.L. Wilson; "Numerical Method in Finite Element Analysis." Prentice-Hill. 1976.
 8. Shan S. KUO.; "Computer Application of Numerical method." Addisonwesley. Publishing Company. 1972.
 - Larry J. Segerlind. "Applied Finite Element Analysis." John Wiley & Sons. INC. 1976.
 10. Bruce A. Finlayson; "The Method of Weighted Residuals and Variational Principles." Academic press. 1972.
 11. H. Poritsky & R.P. Terrard; "Eddy-current Losses in a Semi-infinite Solid Due to a Nearby Alternating Current." AIEE Transactions (Communication and Electronics) VOL. 73. pp. 97~106. May. 1954.
 12. P.S. Mamak & E.R. Laithwaite; "Numerical Evaluation of Inductance and Resistance." Proc. IEE1961. 1961. 180C pp.252~258.
 13. William H. Hayt, JR; "Engineering Electromagnetics." Third Edition 1974. McGraw-Hill. INC.
 14. B. Hague; "The Principles of Electromagnetism Applied to Electrical Machines." Dover publications. INC 1962.
 15. Douglas. H. Norrie & Gerard de Vires; "The Finite Element Method Fundamentals and Applications." Academic Press 1973.
 16. A.R. Mitchell; "Finite Element Method in Partial Differentions." John Wiley & Sons. LTD. 1977.
 17. Larry J. Segerlind; "Applied Finite Elements Analysis." John Wiley & Sons. INC. 1976.
 18. 昭和 52年 3月 電氣工學における有限要素法 p. 181
 19. 昭和 43年 電氣四學會連合大會 논문번호 —486 p. 556

부 록

有限要素法

式(3-7)에서 벡터 포텐셜, $\vec{A}(x, y)$ 는 구하려는 未

知函數이고 ν_x, γ, τ 를 既知函數라 하면 이경우에 發生하는 一般的인 境界條件은

a) 境界上에서 벡터 포텐셜, \vec{A} 의 값이 주어졌을 때 $A=a(x, y)$ 境界 τ_1

b) $\nu_x \frac{\partial A}{\partial x} \vec{i} + \nu_y \frac{\partial A}{\partial y} \vec{n} = 0$ 境界 τ_2

여기서 \vec{i}, \vec{n} 은 各, 界面에서 外向單位法線 벡터, 境界面을 $\tau = \tau_1 + \tau_2$ 로 定義한다. 解析領域에서 r 개의 節點을 갖는 M 개의 要素로 나누어졌다고 생각할때 解析領域 R 內的 벡터 포텐셜, A 는

$$A(x, y) = \sum_{i=1}^M N_i A_i(x, y) = [N] [A]^{(e)} \quad (A-1)$$

로 된다.

여기서 $A_i(x, y)$ 는 節點 i 에서 벡터 포텐셜, A 의 節點값이고 $[A]^{(e)}$ 는 試驗函數, N_i 는 보간(interpolation)函數이다. 따라서 全汎函數 $F(A)$ 는 各 要素에서 成立하는 汎函數의 和이 된다.

$$F(A) = \sum_{e=1}^M F[A^{(e)}] \quad (A-2)$$

그러므로 한 要素에서의 汎函數 最少化條件인 $\delta F[A] = 0$ 의 停留條件은

$$\frac{\partial F[A^{(e)}]}{\partial A_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (A-3)$$

이므로 境界 τ_2 에서 節點 i 에 대한 停留條件은

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(A)^{(e)}}{\partial A_i} &= \iint_R \left[\left(\nu_x \frac{\partial A^{(e)}}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial A_i} \left(\frac{\partial A^{(e)}}{\partial x} \right) \right) \right. \\ &+ \left. \nu_y \frac{\partial A^{(e)}}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial A_i} \left(\frac{\partial A^{(e)}}{\partial y} \right) \right] dS^{(e)} \\ &+ j \frac{\omega N}{\rho} \iint_R \frac{\partial A^{(e)}}{\partial A_i} dS^{(e)} - \iint_R J \cdot \frac{\partial A^{(e)}}{\partial A_i} dS^{(e)} = 0 \end{aligned} \quad (A-4)$$

式(A-1)에서 $A^{(e)} = \sum_{i=1}^r N_i A_i = FN_i [A]^{(e)}$ 이므로

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A^{(e)}}{\partial x} &= \sum_{i=1}^r \frac{\partial N_i}{\partial x} A_i = \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \right] [A]^{(e)} \\ \frac{\partial}{\partial A_i} \left(\frac{\partial A^{(e)}}{\partial x} \right) &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial A^{(e)}}{\partial A_i} &= N_i \end{aligned} \right\} \quad (A-5)$$

으로 되며 式(A-5)를 式(A-4)에 代入하면

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(A)^{(e)}}{\partial A_i} &= \iint_R \left[\nu_x \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \right) [A]^{(e)} \frac{\partial N_i}{\partial x} \right. \\ &+ \left. \nu_y \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} \right) [A]^{(e)} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] dS^{(e)} + j \frac{\omega N}{\rho} \iint_R N_i dS^{(e)} \\ &- \iint_R J_i N_i dS^{(e)} = 0 \end{aligned} \quad (A-6)$$

와 같이 한 要素에 관한 方程式이 되며 Matrix 形態로 바꿔쓰면

$$\frac{\partial F\{A^{(e)}\}}{\partial \{A\}^{(e)}} = [L]^{(e)} \{A\}^{(e)} + j \frac{\omega_N}{\rho} [M]^{(e)} \{A\}^{(e)} + \{F\}^{(e)} = 0 \quad (A-7)$$

여기서

$$\left. \begin{aligned} L_{ij}^{(e)} &= \iint_R^{(e)} \left[\nu_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \nu_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] ds^{(e)} \\ M_{ij}^{(e)} &= j \frac{\omega_N}{\rho} \iint_R^{(e)} N_i N_j ds^{(e)} \\ F_i^{(e)} &= - \iint_R^{(e)} J \cdot N_i ds^{(e)} \end{aligned} \right\} \quad (A-8)$$

여기서

$$[L]_{m \times m} : L_{ij} = \sum_{e=1}^m L_{ij}^{(e)}$$

$$[M]_{m \times m} : M_{ij} = \sum_{e=1}^m M_{ij}^{(e)}$$

$$[F]_{m \times 1} : F_i = \sum_{e=1}^m F_i^{(e)}$$

$$K^2 = j \frac{\omega_N}{\rho}$$

로 된다.

따라서 全體領域에 對한 全 Matrix 方程式은

$$\frac{\partial F}{\partial A} = 0 = [L] \{A\} + K^2 [M] \{A\} + \{F\} \quad (A-9)$$

이다.

이와같이 式(A-9)의 最終 Matrix 方程式에서 未知函數 {A}를 求한다.