數理計劃法에 의한 大型시스템의 最適運用 알고리즘

論 文
30 ~ 6 ~ 3

Algorithm for Optimum Operation of Large-Scale Systems by the Mathematical Programming

朴永文* · 李鳳容** · 白榮植*** · 金榮昌****
金建中**** · 金正勳**** · 梁原榮****

(Young-Moon Park, Bong-Yong Lee, Young-Shik Paik, Young-Chang Kim, Kun-Joong Kim, Jung-Hoon Kim, Won-Young Yang)

Abstract

New algorithms are derived for nonlinear programming problems which are characterized by their large variables and equality and inequality constraints. The algorithms are based upon the introduction of the Dependent-Variable-Elimination method, Independent-Variable-Reduction method, Optimally-Ordered-Triangular-Factorization method, Equality-Inequality-Sequential-Satisfaction method, etc.

For a case study problem relating to the optimal determination of load flow in a 10-bus, 13-line sample power system, several approaches are undertaken, such as the SUMT, Lagrange's Multiplier method, sequential applications of linear and quadratic programming method. For applying the linear programming method, the conventional simplex algorithm is modified to the large-system-oriented one by the introduction of the Two-Phase method and Variable-Upper-Bounding method, thus resulting in remarkable savings in memory requirements and computing time. The case study shows the validity and effectivity of the algorithms presented herein.

1. 序 論

本 硏究는 시스템의 變數(Variable)와 等式 및 不等式制約條件(Equality and Inequality Constraints)이 많은 大型시스템(Large-scale System)이 非線型 代數式의 數理模型(Mathematical Model)로 表現될 때, 그 費用函數를 最小로 하는 變數를 決定하는 效果的 앨고리즘(Algorithm)을 代表的인 數理計劃法(Mathematical Programming Method)에 依據하여 誘導하고, 이에 따른 電子計算 프로그램 패키지를 開發하는데 그 目的이 있으며, 이 硏究結果는 電力系統運用의 最適化 等 大型 시스템의 最適運用方策의 決定에 活用되기를 期待하고 있다.

여기서 效果的 앨고리즘이라 함은 解의 收速性, 安全性이 保障되고, 計算時間과 計算機記憶容量이 節減되는 앨고리즘을 意味하며, 그것이 理論的으로나 事例硏究를 通하여 立證되어야 한다.

本 硏究에서는 10—母線, 13—線路, 5—發電所, 10—負荷, 1—調相設備으로서 構成되는 샘플電力系統에 對한 最適電力潮流計算問題(Optimal Load-flow Problem)를 事例問題로 擇하여, SUMT, 라그란제乘數法(Lagrange's Multiplier Method), 2次計劃法(Quad-

* 正會員 : 서울大 工大 學電工學科 敎授 · 工博
** 正會員 : 弘益大 工大 電氣工學科 副敎授
*** 正會員 : 明知大 電氣工學科 助敎授
**** 正會員 : 서울대 大學院 在學中
接受日字 : 1981年 6月 9日

ratic Programming Method) 및 線型計劃法(Linear Programming Method)에 依據하여 最適化하고 앨고리즘을 誘導하되, 從前의 方法을 그대로 適用하는 것이 아니라 效果的으로 適用하도록 改善하고, 여기서 提示되는 改善方法이 이와 類似한 다른 大型시스템의 最適化 硏究에도 그대로 活用할 수 있도록 하는데 硏究의 焦點을 맞추었다.

一般的으로 電力系統의 最適電力潮流計算問題는 比較的 難解한 問題이기 때문에 近似解를 얻는 硏究論文이 最近까지도 數多하게 發表되고 있으며, 數理計劃法에 의한 앨고리즘은 大電力系統에서는 非效率的인 것으로 알려지고 있으나, 本 硏究結果에 의하면, 數理計劃法으로서도 앞으로 發展의 餘地가 많은 것으로 判斷된다. 따라서, 아래에 本 硏究結果로 얻어진 主要 앨고리즘과 그 效用性을 本 紙面을 通하여 發表코저 한다.

2. 數理計劃法 問題의 定式化 및 앨고리즘

本 硏究內容의 記述에 앞서, 從來의 各種 數理計劃問題를 定式化하고, 그 最適解를 위한 代表的 앨고리즘을 引用하면 다음과 같다.

A. 數理計劃法의 定義

實數 $x_i(i=1,2,\cdots n)$를 i째 成分으로 하는 列벡터 x의 實數値 函數 $f(x)$, $g_i(x)\,(i=1,2\cdots,m)$ 및 $h_j(x)$ $(j=1,2,\cdots,p)$가 주어졌을 경우

費用函數 : $\min\limits_{x} f(x)$ (2.1)

不等式制約條件 : $g_i(x)\leq 0,\ i=1,2,\cdots,m$ (2.2)

等式制約條件 : $h_j(x)=0,\ j=1,2,\cdots,p$ (2.3)

의 問題를 數理計劃問題라 하며, 그 最適解 $x=\hat{x}$를 얻는 節次를 數理計劃法 앨고리즘이라 한다.

B. SUMT

一般的으로 $f(x)$, $g_i(x)$, $h_j(x)$는 x에 關하여 非線型이며, 어느 것이든 하나 以上이 非線型인 경우 위의 式 (2.1)~(2.3)은 非線型計劃 問題가 된다. 非線型計劃問題를 푸는 가장 一般的인 技法으로서는 피아코(Fiacco)와 맥콜믹크(McCormick)에 의하여 考案된 SUMT(Sequential Unconstrained Minimization Technique)를 들 수 있는데[5,6,7], 式 (2.1)~(2.3)의 原問題(Prime Probem)를

$$J(x,\ r_k)=f(x)-r_k\sum_{i=1}^{m}1/g_i(x)+\sum_{j=1}^{p}h_j^2(x)/\sqrt{r_k}$$

但, $r_{k+1}=r_k/c,\ c>0$ (2.4)

를 最小化하는 非制約最適化問題로 바꾸어 풀거나, 式 (2.4)의 페날티項을 改善한 포우웰(Powell)의

$$J(x,r_k,S_i^{K,l},S_j^{K,l})=f(x)+\frac{1}{r_k}\sum_{i\in I}[g_i(x)+S_i^{K,l}]^2 + \frac{1}{r_k}\sum_{j}^{p}[h_j(x)+S_j^{K,l}]^2 \qquad (2.5)$$

但, $S_i^{0,0}=S_j^{0,0}=0$, $S_i^{K,l+1}=g_i(x)+S_i^{K,l}$, $S_j^{K,l+1}=h_j(x)+S_j^{K,l}$ $S_i^{K+1,l}=S_i^{K,l}/C$, $S_j^{K+1,l}=S_j^{K,l}/C$, $r_{k+1}=r_k/C,\ C>1$

의 J를 x에 關하에 最小化하는 問題로 바꾸어 푸는 것을 SUMT라고 한다. 式 (2.5)에서 I는 $I=\{i: g_i(x)>0\}$로서 定義되며, l루우프에 의해 $g_i(x)>0$(違返不等式制約條件)중 최대의 것이 약 1/4 程度까지 감소할 때까지 J를 x에 關하여 最適化計算을 反復한 후 r_k를 r_{k+1}로 更新하여 l루우프의 計算을 反復하면 式 (2.1)~(2.3)의 最適化를 達成할 수 있다는 것이다.

C. 라그란제乘數法

式 (2.2)의 不等式制約條件 $g_i(x)\leq 0$는 다른 方法으로 充足시키고 式(2.3)의 等式制約條件만을 考慮한다면, 上記 非線型問題는 라그란제乘數法의 適用이 可能하다. 卽 $\min\limits_{x} f(x)$, $h_j(x)=0,\ j=1,2,\cdots p$의 問題는

$$L(x,\lambda)=f(x)+\sum_{j=1}^{p}\lambda_j h_j(x) \qquad (2.6)$$

但, λ : 라그란제乘數

로 定義되는 $L(x,\ \lambda)$를 x에 關하여 最小化하고, λ에 關하여 最大化하는 問題로 歸着되며, 이러한 接近法을 라그란제乘數法이라 하는데, λ_j의 更新에는

$$\lambda_{j,k+1}=\lambda_{j,k}+\varepsilon_k h_j(x),\ j=1,2,\cdots p \qquad (2.7)$$

但, k : 反復回數, ε_k : 計算스텝사이즈

等의 여러 方法이 있다[1,2].

D. 2次計劃法

2次計劃法은 $g_i(x)$ 및 $h_j(x)$가 x에 關한 1次式이고 $f(x)$가 2次式인 非線型問題의 特別한 形態로서, 不等式制約條件에는 슬랙變數를 導入하고, $x\geq 0$ 條件이 없을 경우에는 $x'=x+$(매우 큰 陽定數)≥ 0의 變數置換을 行함으로써

$$\min_{x}\ J(x)=x^TCx+D^Tx \qquad (2.8)$$

$$Ax=B\geq 0,\ x\geq 0 \qquad (2.9)$$

但, A,B,C,D는 常數行列 및 벡터의 形態로 定式化된다. 이 解法으로서는 베일法(Beale's Method)와 월프法(Wolfe's Method)이 있으며, 後者는 結局 심플렉스法(Simplex Method)에 依據한다.

E. 線型計劃法

線型計劃法은 式(2.7)에서 $C=0$의 特別한 경우로서

$$\min_{x} J(x) = \min_{x} C^T x \tag{2.9}$$

$$Ax = B \geq 0, \quad x \geq 0 \tag{2.10}$$

의 形態로 定式化된다. 그 解法으로서는 단치히(Dantzig)의 심플렉스法과 改正심플렉스法(Rivised Simplex Methcd)가 代表的이라 할 수 있다[2,10].

3. 샘플시스템 및 그 數理模型

A. 샘플시스템의 記述

大型시스템의 代表的인 例로서, 所謂 最適電力潮流計算問題(Optimal Load-flow Problem)를 本硏究의 事例硏究 模型으로 擇하기로 한다.

이 問題는 우리나라의 電力시스템에서 自動經濟給電(Automatic Economic Load Dispatching)에 活用될 수 있는 現實的인 課題이며, 또한 시스템常數, 패러미터, 시스템變數가 많은 非線型시스템인 관계로 事例硏究로서는 適切하다고 생각된다.

最適電力潮流問題는 電力系統의 各 母線(bus)에 주어진 水準의 有効負荷(P_r), 無効負荷(Q_r)狀態에서 各 母線에 接續된 各 發電所의 有効發電電力(P_g), 無効發電電力(Q_g), 各 母線에 接續된 調相設備無効電力(Q_c)을 最適하게 決定하는 問題로서, 여기서 最適決定이라 함은 各 母線의 電壓絶對値(V)를 주어진 變動範圍內에 維持한다는 條件下에서 發電燃料費를 最小化함을 뜻하여, 發電機와 調相機도 可能出力에는 限界가 있으므로 그 上限과 下限에 對한 制限條件도 주어짐은 勿論이다.

이 샘플시스템을 圖示하자면 그림 1과 같다. 그리고 시스템常數 또는 시스템 패러미터로서 作用되는 데이

表 1. 샘플電力系統의 線路 데이터

Table 1. Line Data for the Sample Power System.

線路番號	連絡母線番號	線路임피이던스	線路充電애드미턴스
1	1—2	0.02+j0.08	j0.03
2	1—6	0.06+j0.24	j0.02
3	1—9	0.04+j0.16	j0.015
4	2—3	0.06+j0.24	j0.02
5	2—6	0.06+j0.24	j0.02
6	3—7	0.06+j0.24	j0.02
7	4—7	0.04+j0.16	j0.015
8	4—8	0.06+j0.24	j0.02
9	5—6	0.04+j0.16	j0.015
10	5—10	0.06+j0.24	j0.02
11	6—9	0.01+j0.04	j0.01
12	8—10	0.04+j0.16	j0.015
13	9—10	0.08+j0.32	j0.025

(단위 : P.U)

表 2. 샘플電力系統의 母線데이터

Table 2. Bus Data for the Sample Power System.

母線番號	有効負荷 P_r	無効負荷 Q_r	有効出力上限 P_g^M	無効出力+調相出力上限 Q_{gc}^M	有効出力下限 P_g^m	無効出力+調相出力下限 Q_{gc}^m
1	−0.2	−0.097	—	—	—	—
2	−0.3	−0.145	—	—	—	—
3	−0.2	−0.097	—	—	—	—
4	−0.3	−0.145	—	—	—	—
5	−0.2	−0.097	—	0.05	—	0
6	−0.3	−0.145	1.5	1.05	0.05	0
7	−0.15	−0.0726	1.5	1.05	0.05	0
8	−0.2	−0.097	1.5	1.05	0.05	0
9	−0.2	−0.097	1.5	1.05	0.05	0
10	−0.2	−0.097	1.5	1.05	0.05	0

V^M(各母線電壓上限値)=1.05 (단위 : P.U)

V^m(各母線電壓下限値)=0.95

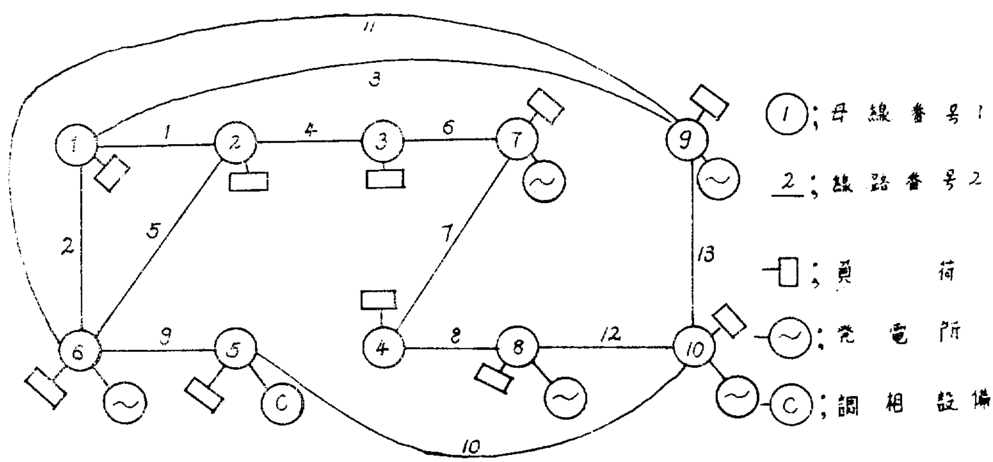

그림 1. 10母線, 13線路 샘플電力系統結線圖

Fig. 1. Diagram of the 10-bus, 13-line Sample Power System.

表 3. 샘플電力系統 費用係數
Table 3. Cost Coefficients for The Sample Power System.

發電所母線番號	a	b	c
6	27	6	1
7	35	10	1
8	29	5	0.5
9	31	8	1
10	28	6	0.5

터는 表 1~3과 같다.

B. 샘플시스템의 數理模型

第 i 發電所의 發電燃料費 f_i를 發電所의 有効出力 P_{gi}의 2次式으로 表現할 때

$$f_i(P_{gi})=a_i+b_iP_{gi}+c_iP_{gi}^2 \tag{3.1}$$

但 a_i, b_i, c_i : 第 i 發電所의 費用係數로 주어지고 總發電燃料費를 費用函數 J로 볼 때 J는

$$J=f(P_g)=\sum_{i\in I}f_i(P_{gi})=\sum_{i\in I}c_iP_{gi}^2+\sum_{i\in I}b_iP_{gi}+\sum_{i\in I}a_i \tag{3.2}$$

但, I : 發電所連絡母線集合

와 같이 表示된다.

한편, 各 母線 j에서는

$$h_j^1=P_{gj}+P_{rj}-\sum_{k=1}^{n}V_jV_kY_{jk}\cos(\theta_{jk}+\delta_j-\delta_k)=0 \quad j=1,2,\cdots,n \tag{3.3}$$

$$h_j^2=Q_{gcj}+Q_{rj}-\sum_{k=1}^{n}V_jV_kY_{jk}\sin(\theta_{jk}+\delta_j-\delta_k)=0, \quad j=1,2,\cdots,n \tag{3.4}$$

但, P_{gj}, P_{rj} : 第 j 母線의 發電所 有効出力 및 有效負荷

$Q_{gcj}=Q_{gj}+Q_{cj}$: 第 j 母線의 發電所 無効出力+調相設備出力

Q_{rj} : 第 j 母線의 無効負荷

V_j, δ_j : 第 j 母線 電壓 및 그 位相

Y_{jk}, θ_{jk} : j—k母線間의 母線 애드미턴스 絕對值 및 그 位相

n : 母線數

의 等式條件이 成立하고, 母線電壓, 發電所 有効, 無効出力과 調相設備無効出力의 限界性으로 因하여

$$V_j^m\leq V_j\leq V_j^M,\ j=1,2,\cdots,n \tag{3.5}$$

$$P_{gi}^m\leq P_{gi}\leq P_{gi}^M,\ i\in I \tag{3.6}$$

$$Q_{gcr}^m\leq Q_{gcr}\leq Q_{gcr}^M,\ r\in\text{發電所 또는 調相設備母線集合} \tag{3.7}$$

의 不等式制約條件이 成立한다. 여기서, Y_{jk}, Q_{jk}는 線路데이터에 의하여 決定되는 시스템常數, P_{gi}^M, P_{gc}^M, Q_{gc}^m은 電力設備에 의한 시스템常數이고, P_{rj}, Q_{rj}는 負荷水準에 따른 시스템패러미터, V_j^M, V_j^m은 運轉條件에 따른 시스템패러미터로서 最適化過程에서 이것은 모두 常數로 取扱되며, 시스템變數는 P_{gi}, Q_{gcr}, V_j, δ_j이다. 그러나, δ_j 중 어느 한 母線의 δ_s는 $\delta_s=0$, 發電所가 없는 母線에 대해서는 $P_g=0$, 發電所와 調相設備가 없는 母線에 對해서는 $Q_{gc}=0$이다. 따라서 以上 數理模型은 式 (3.3)과 (3.4)의 等式制約條件과 式 (3.5)~(3.7)의 不等式制約條件下에서 式(3.2)의 費用函數를 最小化하는 非線型計劃問題로 歸着된다.

以上 샘플시스템의 規模는 다음과 같다.

(i) 變數 : 30個

$P_{g6}, \cdots\cdots, P_{g10},\quad Q_{gc5}, \cdots\cdots, Q_{gc10},$

$V_1, \cdots\cdots,\quad V_{10},\quad \delta_1, \cdots\cdots, \delta_9$

(ii) 等式制約條件 : 20個 (式(3.3) 및 (3.4))

(iii) 不等式制約條件 : 42個(式(3.5)~(3.7))

4. 數理計劃法의 大型시스템에의 適用方法

A. 適用方法

前述한 各種 數理計劃法을 그대로 適用할 수도 있겠으나, 시스템의 規模가 크면 計算誤差, 收束性, 計算時間, 計算機記憶容量 等의 觀點에서 所期의 結果를 얻지 못하는 경우가 많다.

따라서, 本 硏究는 既存 技法을 그대로 適用하기 보다는 大型시스템에 能率的으로 活用할 수 있도록, 修正 또는 改良하고, 그 成果를 上記 샘플 시스템을 通하여 確認하는 節次를 밟았다.

本 硏究에서 試圖한 修正 또는 改良에 關聯된 主要原則은 다음과 같다.

(i) 獨立從屬變數 分割法

最適化 數理模型에서 n個의 變數 x와 p個의 等式制約條件 $h_j(x)=0$ $(j=1,2,\cdots p)$를 생각할 때, 恒常 $p<n$이므로, x는 $n-p$個의 獨立變數 y와 p個의 從屬變數 z로 任意로 分割할 수 있다.

이렇게 獨立變數 y를 擇하면, 等式制約條件 $h_j(x)=h_j(y,z)=0$ $(\delta=1,2,\cdots,p)$에서 $z=z(y)$의 陽函數(Explicit Function)를 쉽사리 얻을 수 있으면($h_j(x)$가 線型인 경우에는 恒常 可能함), 數理模型에서 等式制約條件과 從屬變數는 消滅되므로, 數理模型規模가 현저하게 縮小된다. 그런데, $h_j(y,z)=0$중 z가 常數인 $h_j(y,c)=0$는 如前히 等式制約條件으로서 殘留한다는 事實에 留意하여야 한다.

(ii) 獨立變數 縮約法

獨立變數 $y\in x$를 $y^1, y^2\in y$의 2部分으로 分割하되, 奇數逐次計算過程에서는 y^2를 前過程의 $\overline{y}^2$(常數)로 固

定하고 y^1에만 關하여 最適化 하고, 偶數逐次計算過程에서는 反對로 $y^1=\overline{y}_1$으로 固定하고 y^2에만 關하여 最適化 하면, 시스템 規模가 縮約되고, 所要記憶容量을 節減할 뿐만 아니라 計算能率도 向上되는 경우가 많다.

또, 奇數 및 偶數逐次計算過程의 獨立變數를 $y^1, y^2 \in x$로 다르게 擇하는 경우, y^1의 再分割 $y^{11}, y^{12}\in y^1$과 y^2의 再分割 y^{21}, $y^{22}\in y^2$을 고려할 때 y^{12}에 의한 y^{21}의 依存性이 y^{11}의 依存性 보다 强하고$(\partial y^{21}/\partial y^{12}>\partial y^{11}/\partial y^{12})$, 또 y^{22}에 의한 y^{11}의 依存性이 y^{21}의 依存性 보다 强할 경우에는$(\partial y^{11}/\partial y^{22}>\partial y^{21}/\partial y^{22})$, 奇數逐次計算過程에서는 $y^{12}=\overline{y}^{12}$로 固定하고 y^{11}에만 關하여 最適化 하고, 偶數逐次計算過程에서는 $y^{22}=\overline{y}^{22}$로 固定하고 y^{21}에만 關하여 最適化 할 수 있다.

이와 같은 逐次計算法을, 獨立變數縮約法으로 命名하기로 한다. 그 理論的 根據는 自明하나, 本 硏究의 實驗的 結果 大型 시스템의 最適化에 매우 有用함이 立證되었다.

(iii) 最適配置三角因數化技法의 適用

大型 시스템의 最適化 앨고리즘에는 逆行列을 計算하는 部分이 많은데, 大型시스템일 수록, 行列次數가 크고, 스퍼어시티(Sparsity)가 높다. 이러한 경우에는 逆行列을 直接 求하는 代身 最適配置三角因數化技法(Optimally-Ordered Triangular Factorization Technique)를 適用하는 것이 보편화 되고 있다. 따라서 本 硏究에서도 部分的으로 이 技法을 導入하였다.

(iv) 시스템變數에 對한 單獨不等式制限條件에 關한 앨고리즘의 誘導

大型시스템의 數理模型에서는 $\alpha\leq x\leq\beta(\alpha,\beta:$ 常數$)$의 形態로 주어지는 單獨 不等式制限條件이 부과되는 경우가 많은데, 이 條件이 線型制限條件에서는 슬랙變數의 導入과 變數變換에 의하여 $Ax=B$의 形態로 變換할 수도 있으나, A와 B의 次元數에 缺點이 있다. 따라서 本 硏究에서는 A, B의 次元數를 增加시키지 아니하고 局部的으로 解決하는 앨고리즘과 프로그램을 開發하였다.

(v) 不等式制約條件과 等式制約條件의 逐次充足

不等式制約條件과 等式制約條件이 同時에 充足되도록 앨고리즘을 誘導하여야 하나, 實用的인 觀點에서는 交互로 充足되는 逐次的인 앨고리즘에 依하서도 最適解에 到達되는 問題가 大部分이고 大型시스템에서는 이 方法이 매우 有用하므로, 本 硏究에서는 이 方法도 採用하였다.

5. SUMT의 大型시스템에의 適用

第2節에서 記述한 SUMT앨고리즘을 그대로 適用한 結果 收束性이 良好하지 못하여 페널티項을 改善하였으며(後述함), SUMT중의 無制約條件으로 變換한 最適化過程에서는 플러쳐—포우웰法을, 또 플러쳐—포우웰法의 스칼러스텝사이즈(α)의 決定은 2次式內揷法(Quadratic Interpolation Method)에 依據하였다. 그리고, 샘플시스템이 大型시스템임에 留意하여 SUMT와 더불어 前述한 獨立—從屬數分割法과 獨立變數縮約法을 適用하였다. 即, 샘플시스템의 變數는

$$x=[\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_9,P_{g6},P_{g7}\cdots,P_{g10},V_1,V_2,\cdots,V_{10},Q_{gc5},Q_{gc6},\cdots,Q_{gc10}]^T$$

이나, 이 시스템의 性質上

$$y^1=[\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_9]^T,\quad y^2=[V_1,V_2,\cdots V_{10}]^T$$

로 잡으면, 從屬變數

$$z=[P_{g6},P_{g7},\cdots,P_{g10},Q_{gc5},Q_{gc6},\cdots,Q_{gc10}]^T$$

는 數理模型에서 消去된다.

따라서, y^1—最適化過程에서는

$$\min_{y_1} J(y^1,\bar{y}^2)$$

으로 하되 發電所가 없는 母線 $j=1,2,\cdots 5$에서는 $P_{gj}=0$이므로, 式(3.3)으로 부터

$$h_i^1(y^1,\bar{y}^2)=0,\quad j=1,2,\cdots,5$$

의 等式制約條件은 그대로 殘留하되, 式(3.4)에서는 $\partial h_j^2(y^1,\bar{y}^2)/\partial y^1\doteqdot 0$이므로 $h_j^2(y^1,\bar{y}^2)=0$의 等式制約條件은 無視한다.

不等式制約條件으로서는 式(3.5) 및 (3.7)에 該當하는 $\partial g_i^2(y^1,\bar{y}^2)/\partial y^1\doteqdot 0$을 勘案하여, 式(3.6)에 의한

$$g_i^1(y^1,\bar{y}^2)\leq 0,\quad i=1,2,\cdots 10$$

不等式制約條件만을 包含시킨다.

y^2—最適化過程에서도 같은 論議에 根據하여

$$\min_{y_2} J(\bar{y}^1,y^2)$$

로 하되, 式(3.4)로부터, 發電所 또는 調相設備가 없는 母線에 對하여

$$h_j^2(\bar{y}^1,y^2)=0,\quad j=1,2,\cdots,4$$

와 式(3.6)의 $\partial h_j^1(\bar{y}^1,y^2)/\partial y^2\doteqdot 0$를 勘案하여 式(3.6) 및 (3.7)에 對한

$$g_i^2(\bar{y}^1,y^2)\leq 0,\quad i=1,2,\cdots,32$$

의 制約條件만을 考慮한다.

上述한 y^1—過程 및 y^2—過程을 交互로 反復함으로써 最適解에 到達할 수 있음이 實驗的으로 立證되고 있으나, 原來의 SUMT앨고리즘은 收束性이 不良하여 그 페널티項을 本硏究에서는 다음과 같이 修正한 結果 收束性이 顯著하게 改善되었다.

即, 포우웰이 提示한 式(2.5)의 페널티項을 그대로 따르되, $g_i(x)\leq 0$, $h_j(x)=0$를 充足하지 아니하는 $g_i(x)$ 및 $h_j(x)$에 對해서는 $g_i(x)-\varepsilon$, $h_i(x)-\varepsilon$의 값으로 $g_i\leq 0$을 $g_i-\varepsilon\leq 0$과 같이 수정하여 使用하였다. 단,

$\varepsilon>0$이다.

물론 적절한 ε의 크기는 問題에 따라 다르므로 적당한 값을 取하여야 하나, 許容 計算誤差($\varepsilon=0.01$)보다 약간 큰 값($\varepsilon=0.1$)을 取함이 바람직하다는 것이 本研究結果로 實驗的으로 立證되었다.

6. 라그란제乘數法의 大型시스템에의 適用

라그란제乘數法의 適用時에는, 不等式制約條件에는 슬랙變數를 導入함으로써 等式制約條件으로 轉換하여 標準 알고리즘을 利用할 수도 있겠으나, 大型시스템에서는 變數가 늘어나는 短點이 있어, 本硏究에서는 等式 및 不等式制約條件을 逐次的으로 充足시키는 方向으로 알고리즘을 誘導하였고, 數理模型 規模를 縮少하기 위하여, 前述한 獨立—從屬變數分割法과 獨立變數縮少法을 適用하였으며, 라그란제乘數의 計算 알고리즘도 從前의 것은 大型시스템에 그대로 適用하기에는 問題點이 있어 다음과 같이 修正하였다.

即, $h(y,z)=0$의 벡터等式制約條件下에 $f(y,z)$의 스칼라函數를 最小化할 경우,

$$L(y,z,\lambda)=f(y,z)+\lambda^T h(y,z) \tag{6.1}$$

를 定義할 때, 그 最適條件은

$$L_y(y,z,\lambda)=f_y(y,z)+\lambda^T h_y(y,z)=0 \tag{6.2}$$

$$L_z(y,z,\lambda)=f_z(y,z)+\lambda^T h_z(y,z)=0 \tag{6.3}$$

$$h(y,z)=0 \tag{6.4}$$

但, h_z는 h의 z에 關한 자코비언行列

로서 주어지고, y,z,λ가 最適値라면 式(6.3)으로부터

$$\lambda=-\{h_z^T(y,z)\}^{-1}f_z^T(y,z) \tag{6.5}$$

의 關係가 成立하고, 最適値에서 크게 離脫하지 아니하면, 近似的으로 成立한다.

그런데 $f(y,z)$의 最少化는 $L(y,z,\lambda)$의 最少化에 歸着되므로, $L(y,z,\lambda)$의 最適化알고리즘을 傾斜法에 依存한다면 [1, 2, 3, 9]

$$\begin{aligned} y^{k+1}&=y^k-CL_y^T(y,z,\lambda)\\ &=y^k-C[f_y^T(y,z)-h_y^T(y,z)\\ &\quad\{h_z^T(y,z)\}^{-1}f_z^T(y,z)] \end{aligned} \tag{6.6}$$

但, C : 스텝사이즈

의 알고리즘으로 獨立變數 y를 改善할 수 있고, 本硏究에서는 이 알고리즘을 使用하였다. 그런데, 大規模시스템임에 留意하여 y와 z를 SUMT에서와는 달리

$y^1=[P_{g6},P_{g7},\cdots,P_{g9}]^T$, $y^2=[Q_{gc5},Q_{gc6},\cdots,Q_{gc10}]^T$

$z=[\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_9,P_{g10},V_1,V_2,\cdots,V_{10}]^T$

로 指定하였으며, $z^1,z^2,z^3\in z$를

$z^1=[\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_9]^T$, $z^2=[V_1,V_2,\cdots V_{10}]^T$, $z^3=P_{g10}$

로 定義한다면, 샘플시스템의 性質上

$$\frac{\partial y^2}{\partial z^1}\doteqdot 0,\qquad \frac{\partial y^1}{\partial z^2}\doteqdot 0$$

의 關係가 있으므로, 式(6.5)의 λ는 式(3.3) 및 (3.4)에 依하여

$$\lambda^1\doteqdot-\{h_{z^1}{}^{1,T}(z^1,z^2)\}^{-1}f_{z^1}{}^T(z^1,z^2) \tag{6.7}$$

$$\lambda^2\doteqdot-\{h_{z^2}{}^{2,T}(z^1,z^2)\}^{-2}f_{z^2}{}^T(z^1,z^2) \tag{6.8}$$

로 分割될 수 있고, 따라서 式(6.6)의 獨立變數改善알고리즘도

$$\begin{aligned} y^{1,k+1}&=y'^{1,k}-c^1[f_{y^1}{}^T(y^1,z^1,z^2)\\ &\quad-\{h_{y^1}{}^{1,T}(z^1,z^2)\}^{-1}f_{z^1}{}^T(z^1,z^2)] \end{aligned} \tag{6.9}$$

$$\begin{aligned} y^{2,k+1}&=y^{2,k}-c^2[f_{y^2}{}^T(y^1,z^1,z^2)\\ &\quad-\{h_{y^1}{}^{2,T}(z^1,z^2)\}^{-1}f_{z^2}{}^T(z^1z^2)] \end{aligned} \tag{6.10}$$

로 分割된다. 이 알고리즘에 의하여 等式制約條件은 完全排除되나, 不等式制約條件은 그대로 殘留하게 된다.

獨立變數 y^1,y^2에 대한 不等式制約條件(式(3.6) 및 (3.7))은 上記 $y^{1,k+1}$, $y^{2,k+1}$가 許容範圍內를 벗어나면, 그 限界値에 抑制함으로써 쉽게 充足되나 從屬變數인 z^2의 不等式制約條件(式(3.5))과 z^3의 不等式制約條件(式(3.6))은 上記 라그란제乘數法으로서는 數理模型의 規模增加없이는 不可能하다. 따라서 別途의 方法을 採用하여야 하는데, 本硏究에서는 所謂 電力潮流計算알고리즘(Algorithm for Load Flow Calculation)을 使用하여, z^2, z^3의 不等式制約條件을 充足하도록 주어진 y^1에 대하여 y^2,z를 再計算함으로써 이 問題를 解決하였다. 以上 記述한 內容을 要約하자면 다음과 같다.

(i) 電力潮流計算알고리즘으로, 初期 x를 計算한다. $k=0$

(ii) $y^{1,k+1}$를 計算한다.

(iii) 電力潮流計算알고리즘으로, 不等式制約條件을 充足시킨다.

(iv) $y^{2,k+1}$을 計算한다.

(v) 電力潮流計算알고리즘으로, 不等式制約條件을 充足시킨다.

(vi) 充分히 收束하면 計算終了하고, 그렇지 아니하면 $k\to k+1$로 設定한 후 (ii)로 移行한다.

끝으로, $h_{y^1}{}^{1,T}(z^1,z^2)$와 $h_{y^2}{}^{2,T}(z^1,z^2)$는 스퍼어시티가 높은 高次元行列이므로, 最適配置三角化數技法을 適用하였음을 附言한다.

7. 2次計劃法의 大型시스템에의 適用

2次計劃法은 월프法(Wolfe's Method)의 長型(Long Form)알고리즘을 適用하였는데, 샘플시스템이 大型시

스템임에 留意하여, 于先 獨立一從屬變數法, 獨立變數縮約法에 의하여 數理模型을 縮約한 後, 2次計劃法을 適用하였다.

卽, 시스템變數 x를

$$y^{11}=[P_{g6}, P_{g7}, \cdots, P_{g9}]^T,\ y^{12}=[V_1, V_2, \cdots, V_{10}]^T$$
$$y^{21}=[Q_{gc5}, Q_{gc6}, \cdots, Q_{gc10}]^T,\ y^{22}=[\delta_1, \delta_2, \cdots\delta_9]^T$$

의 獨立變數 $y^{11}, y^{12}\in y^1$, y^{21}, y^{22}로 分割하고, y^1—最適化過程에서의 從屬變數 z^1의 分割

$$z^{11}=[Q_{gc}{}^5, Q_{gc}{}^6, \cdots, Q_{gc10}]^T,\ z^{12}=[\delta_1, \delta_2, \cdots\delta_5]^T$$
$$z^{13}=[\delta_6, \delta_7, \cdots, \delta_9]^T,\ z^{14}=P_{g10}$$

과 y^2—最適化過程에서 從屬變數 z^2의 分割

$$z^{21}=[P_{g6}, P_{g7}, \cdots, P_{g10}]^T,\ z^{22}=[V_1, V_2, \cdots, V_4]^T$$
$$z^{23}=[V_5, V_6, \cdots V_{10}]^T$$

를 생각한다.

y^1—最適化過程에서는 $y^{12}=y^{12}$(常數)로 간주할 수 있으므로, 式(3.2)의 費用函數의 變分은

$$\delta f(\delta y^{11},\ \delta z^{14})=\begin{bmatrix}\delta y^{11}\\ \delta z^{14}\end{bmatrix}^T C^1\begin{bmatrix}\delta y^{11}\\ \delta z^{14}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\delta y^{11}\\ \delta z^{14}\end{bmatrix} \quad (7.11)$$

但, C^1, D^1는 基準 y^{11}, z^{14}의 函數인 行列 및 벡터의 2次形式으로 表示할 수 있고, 式(3.3)으로부터

$$\delta Z^{14}-\left[\frac{\partial Z^{14}}{\partial Z^{13}}-\frac{\partial Z^{14}}{\partial Z^{12}}\left(\frac{\partial\phi^1}{\partial Z^{12}}\right)^{-1}\frac{\partial\phi^1}{\partial Z^{12}}\right]\left[\frac{\partial Y^{11}}{\partial Z^{13}}-\frac{\partial Y^{11}}{\partial Z^{12}}\left(\frac{\partial\phi^1}{\partial Z^{12}}\right)\frac{\partial\phi^1}{\partial Z^{12}}\right]^{-1}\delta Y^{11}=0 \quad (7.12)$$

但, ϕ^1 : 非發電所母線의 假想有效出力벡터임.

의 等式制約條件(電力受給條件)과 式(3.6)으로부터

$$P_g{}^m-Y^{11}\leq\delta Y^{11}\leq P_g{}^M-Y^{11} \quad (7.13)$$

의 不等式制約條件이 誘導된다. 그런데 式(7.13)의 不等式制約條件을 半으로 줄이기 위하여 새로운 變數 $W_1{}^1=\delta Y^{11}-P_g{}^m+Y^{11}$, $W_2{}^1=\delta Z^{14}-P_{g10}{}^m-Z^{14}$를 導入하면, 式(7.11)~(7.13)은 다음과 같은 2次計劃法 標準形으로 定式化할 수 있다.

$$J^1(W^1)=W^{1,T}C^1W^1+D^{1,T}W^1 \quad (7.14)$$
$$A^{11}W^1=B^{11},\ A^{12}W^1\leq B^{12},\ W^1\geq 0 \quad (7.15)$$

但, $W^1=[W_1{}^{1,T}, W_2{}^{1,T}]^T$

2次計劃法앨고리즘에 의하여 最適値 $\hat{W}^1$ 卽, $\delta\hat{Y}^{11}$ 및 $\delta\hat{Z}^{14}$을 얻은 다음에는 式(3.4)로부터 誘導한

$$\delta Z^{11}=\left[\frac{\partial Z^{11}}{\partial Z^{13}}-\frac{\partial Z^{11}}{\partial Z^{12}}\left(\frac{\partial\phi^1}{\partial Z^{12}}\right)^{-1}\frac{\partial\phi^1}{\partial Z^{12}}\right]\left[\frac{\partial Y^{11}}{\partial Z^{13}}-\frac{\partial Y^{11}}{\partial Z^{13}}\left(\frac{\partial\phi^1}{\partial Z^{12}}\right)^{-1}\frac{\partial\phi^1}{\partial Z^{12}}\right]^{-1}\delta Y^{11} \quad (7.16)$$

의 式에 의하여 δZ^{11}을 計算한 다음

$$Y^{11}\to Y^{11}+\delta\hat{Y}^{11},\ Z^{14}\to Z^{14}+\delta\hat{Z}^{14}$$

로 改善하고, 다시 電力潮流計算앨고리즘으로, Y^{12} 및 Z^1을 精密하게 再計算한 後, y^2—最適化過程으로 移行한다.

y^2—最適化過程에서는 式(3.2)의 費用函數의 變分도 y^{22}를 $\bar{y}^{22}$로 간주하면,

$$\delta f(\delta Z^{21})=\delta Z^{21,T}C^2\delta Z^{21}+D^{2,T}\delta Z^{21} \quad (7.17)$$

의 2次形式으로 表示할 수 있고, 式(3.4)로부터 非發電所 또는 非調相設備 母線 1, 2, …, 4에서는 $\delta Q_{gc}=0$이므로,

$$\delta Z_2{}^2+\left(\frac{\partial\phi^2}{\partial Z^{22}}\right)^{-1}\frac{\partial\phi^2}{\partial Z^{23}}\delta Z^{23}=0 \quad (7.18)$$

$$\delta Z^{23}-\left[-\frac{\partial Y^{21}}{\partial Z^{22}}\left(\frac{\partial\phi^2}{\partial Z^{22}}\right)^{-1}\frac{\partial\phi^2}{\partial Z^{23}}+\frac{\partial Y^{21}}{\partial Z^{23}}\right]^{-1}\delta Y^{21}=0 \quad (7.19)$$

$$\delta Z^{21}+\frac{\partial Z^{21}}{\partial Z^{22}}\left(\frac{\partial\phi^2}{\partial Z^{22}}\right)^{-1}\frac{\partial\phi^2}{\partial Z^{23}}\left[-\frac{\partial Y^{21}}{\partial Z^{22}}\left(\frac{\partial\phi^2}{\partial Z^{22}}\right)^{-1}\frac{\partial\phi^2}{\partial Z^{23}}+\frac{\partial Y^{21}}{\partial Z^{23}}\right]^{-1}\delta Y^{21}=0 \quad (7.20)$$

但, ϕ^2 : 非發電所 및 非調相機母線의 假想無效出力의 關係가 成立하고, 式(3.6)의 不等式制約條件은 感度 $\delta Z^{21}/\delta Y^{21}$이 매우 적으므로 無視하고, 式(3.5) 및 (3.7)의 不等式制約條件에 對해서는

$$V^m\leq\begin{bmatrix}Z^{22}\\ Z^{23}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\delta Z^{22}\\ \delta Z^{23}\end{bmatrix}\leq V^M \quad (7.21)$$
$$Q_{gc}{}^m\leq Y^{21}+\delta Y^{21}\leq Q_{gc}{}^M \quad (7.22)$$

의 關係가 成立한다. 따라서 $W_1{}^2=Y^{21}-Q_{gc}{}^m+\delta Y^{21}$, $W_2{}^2=\begin{bmatrix}Z^{22}\\ Z^{23}\end{bmatrix}-V^m+\begin{bmatrix}\delta Z^{22}\\ \delta Z^{23}\end{bmatrix}$의 새로운 變數를 導入하면

$$J^2(W^2)=W^{2,T}C^2W^2+D^{2,T}W^2 \quad (7.23)$$
$$A^{21}W^2=B^{21},\ A^2W^2\leq B^{22},\ W^2\geq 0 \quad (7.24)$$

但, $W^2=[W_1{}^{2,T},\ W_2{}^{2,T}]^T$

의 2次計劃法形態로 表示할 수 있으며, 2次計劃法앨고리즘에 의하여, 그 最適値 $\hat{W}^2$를 얻은 다음

$$Y^{21}\to Y^{21}+\delta Y^{21},\ Z^{21}\to Z^{21}+\delta Z^{21}$$

으로 改善하고, 前述한 電力潮流計算앨고리즘으로 Y^{22}, Z^{22}, Z^{23}를 精密하게 再計算한 後, 充分히 收束하면 計算을 終了하고, 그렇지 않으면 y^1—最適化過程으로 移行하여 上述한 過程을 反復한다.

8. 線型計劃法의 大型시스템에의 適用

線型計劃法은 2次計劃法에서 그 費用函數의 2次項이 없는 경우에 該當하므로, 前節의 式(7.14) 및 (7.15)에서 $D^1=D^2=0$로 놓으면, 같은 等式 및 不等式制約條件으로 線型計劃法앨고리즘을 適用할 수 있다. 그러나 本 研究에서는 시스템이 大型임에 留意하여, 線型計劃法앨고리즘에 다음과 같은 修正을 行하였다.

(i) 第3심플렉스法(The Third Simplex Method)

線型計劃問題는

$$\min_x J(x)=\min_x C^T x \qquad (8.1)$$

$$Ax=b,\ x\geq 0 \qquad (8.2)$$

로 定式化할 수 있고, 이를 基本變數(Basic Variable) x_b와 非基本變數(Nonbasic Variable)x_n로 分割하면

$$\min_{x_b, x_n} J(x_b, x_n)=\min_{x_b, x_n} [C_b^T, C_n^T]\begin{bmatrix}x_b\\x_n\end{bmatrix} \qquad (8.3)$$

$$[B : N]\begin{bmatrix}x_b\\x_n\end{bmatrix}=b \qquad (8.4)$$

의 形態가 된다. 그리고 本 硏究에서 提示하는 第3심플렉스法은 다음과 같은 計算過程을 밟는다.

(ㄱ) 初期過程

根底行列 B에 의한 初期 基本實行可能解(Basic Feasible Solution)를 구하여, 다음과 같은 表를 作成한다.

表 4. 第3심플렉스法에서의 初期 構成表
Table 4. Initial Tableau for the Third Simplex Method

	x_b	x_n	
Z	0	$C_b^T B^{-1}N-C_n$	$C_b^T\bar{b}$
x_b	I	$B^{-1}N$	$\bar{b}$

(ㄴ) 抽出變數設定 및 最適條件 判定 過程 R을 非基本變數에 關聯된 添字(Index) 集合이라 하고

$$Z_k-C_k=\max_{j\in R}\{Z_j-C_j\} \qquad (8.5)$$

를 생각할 때, 任意의 非基本變數 x_j를 根底로 導入할 경우, 그 最大値 Z_k-C_k가 非陽(Nonpositive)이면 현재의 基本實行可能解를 最適解로 보아 計算過程을 終了하고, 그렇지 않으면 다음 過程으로 移行한다.

(ㄷ) 無界檢定過程

$A=[B : N]=[a_1, a_2 \cdots]$로 주어지는 列벡터 A_k에 대한 解 $y_k=B^{-1}a_k$를 구하나, 非基本變數 x_k가 根底로 導入됨에 따라 모든 변수의 값이

$$\begin{bmatrix}\bar{b}\\0\end{bmatrix}+x_k\begin{bmatrix}-y_k\\e_k\end{bmatrix},\ x_k\geq 0 \qquad (8.6)$$

但, e_k : k째 要素만이 1이고 나머지는 0인 벡터. 로 변화한다. 따라서, 만일 $y_k\leq 0$이면 最適解가 無界(Unbounded)인 경우이므로, 計算을 終了하고 그렇지 않으면 다음 過程으로 移行한다.

(ㄹ) 導入變數의 選定過程

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}=\min_{1\leq i\leq m}\left\{\frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik}>0\right\} \qquad (8.7)$$

의 最小値檢定에 의하여 導出變數를 選定하고, a_r대신 a_k를 取함으로써 B를 更新한다. 이러한 操作은 y_{rk}를 中心으로 하여, 피보팅(Pivoting)을 行함으로써 이루어진다.

이렇게 해서 얻어진 構成表인 表 5와 피보팅前의 構成表인 表 4을 比較할 때 第r列과 第k列의 位値를 交換한다면 左側部分의 單位行列의 形態를 繼續 維持할 수 있음이 分明하고, 따라서 이 單位行列대신 每反復時 e_k를 발생시켜서 使用하여도 同一한 結果로 所要記憶容量이 현저하게 節減될 수 있게 된다. 이와 같은 方法을 第3심플렉스法이라 하며, 本 硏究의 成果의 하나이다.

(ii) 有界變數알고리즘의 導入

線型計劃問題에서, $0\leq x_j\leq \bar{x}_j$ ($\bar{x}_j$는 x_j의 上限値이고, j는 모든 變數 또는 一部 變數의 添字임)의 形態로 變數가 單獨으로 그 上限이 制限되는 경우가 많다.

從前의 標準 線型計劃프로그램패키지에는 이와 같은 制限條件을 $Ax=b$ 속에 包含시키고 있다, 그러나, 그렇게 하면 行列 A의 次元數가 커지므로 所要記憶容量이 커질 뿐만 아니라 人工變數의 數는 增加하게 되어 大型시스템에서는 매우 不利해진다. 따라서 本 硏究에서는 다음과 같은 方法으로 이 問題를 알고리즘上으로 解決하였다.

卽, 擴張基本實行可能解(Extended Basic Feasible Solution)은 非基本變數의 Z_j-C_j가 다음 條件을 滿足시키면 最適이다.

$$Z_j-C_j\leq 0,\ x_j=0$$

$$Z_j-C_j\geq 0,\ x_j=\bar{x}_j$$

라는 理論的 根據에 立脚하여, 만일 以上 最適條件이 成立되지 아니한다면, 現在의 解를 더욱 改善하기 위하여 (i)의 計算過程을 進行시키되 $x_j\leq \bar{x}_j$의 條件을 違反하지 않도록 有界變數알고리즘(Bounded Variable Algorithm)을 適用하여 各 變數의 上限制限條件을 A에 包含시키지 아니함으로써 A의 次元數가 減少하고 計算時間도 현저히 短縮되었다.

(iii) 2단계法의 導入

初期 根底實行可能解를 얻기 위하여 導入한 人工變數를 除去하는 方法으로는 빅엠法(Big M Method)와 2단계法(Two-phase Method)가 있는데, 前者는 M의 값을 決定하는 方法이 어렵고, 너무 큰 M은 電算時 平滑化誤差(Round off Error)問題를 유발하는 短點이 있으므로. 本 硏究에서는 後者를 導入하였다.

從前의 심플렉스法, 修正심플렉스法과 本 연구에서 提示한 第3심플렉스法을 性能面에서 比較한 結果는 表 6과 같으며, 大型시스템에서는 人工變數除去法이 計算能率面에서나 記憶容量의 節減面에서 월등하게 有利함을 알 수 있다.

表　5. 第3 심플렉스法에서의 次期 構成表

Table 5. The Next Tableau for the Third Simplex Method

	$0 \quad 0 \quad \cdots\cdots \quad \frac{C_k-Z_k}{y_{rk}} \quad \cdots \quad 0$	$\cdots \quad (Z_j-C_j)-\frac{y_{rj}}{y_{rk}}(Z_k-C_k) \quad \cdots \quad 0 \quad \cdots$	$C_b{}^T\bar{b}-(Z_k-C_k)\frac{b_r}{y_{rk}}$
x_1	$1 \quad 0 \quad \cdots\cdots \quad -\frac{y_{1k}}{y_{rk}} \quad \cdots \quad 0$	$\cdots \quad y_{1j}-\frac{y_{rj}}{y_{rk}}y_{1k} \quad \cdots \quad 0$	$\bar{b}_1-\frac{y_{1k}}{y_{rk}}\bar{b}_r$
x_2	$0 \quad 1 \qquad -\frac{y_{2k}}{y_{rk}} \qquad \cdot$	$\cdot \qquad \cdot$	$\cdot$
	$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot$	$\cdot \qquad \cdot$	$\cdot$
	$\cdot \quad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot$	$\cdot \qquad \cdot$	$\cdot$
x_r	$\cdot \quad \cdot \quad \cdots\cdots \quad \frac{1}{y_{rk}} \quad \cdots \quad \cdot$	$\cdots \quad \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \qquad ①$	$\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$
	$\cdot \quad \cdot \qquad \cdot \quad \cdot$	$\cdot \qquad \cdot$	
	$\cdot \quad \cdot \qquad \cdot \quad \cdot$	$\cdot \qquad \cdot$	
x_m	$0 \quad 0 \quad \cdots\cdots \quad \frac{y_{mk}}{y_{rk}} \quad \cdots \quad 1$	$\cdots \quad y_{mj}-\frac{y_{rj}}{y_{rk}}y_{mk} \quad \cdots \quad 0$	$\bar{b}_m-\frac{y_{mk}}{y_{rk}}b_r$

表　6. 第3심플렉스法과 從前技法과의 性能比較

Table 6. Performance Comparison between the Conventional L.P. Method and the Third Simplex Method.

Method	計算能率				所要記憶容量
	計算回數	피 보 팅	補助計算	總計算回數	
심플렉스法	乘　算	$(m+1)(m+n+1)$		$(m+1)^2+mn+n$	$(m+1)(m+n+1)$
	加　算	$m(m+n+1)$		$m(m+n+1)$	
修正심플렉스法	乘　算	$(m+1)^2$	mn	$(m+1)^2+mn$	$(m+1)^2+n+1$
	加　算	$m(m+1)$	mn	$m(m+n+1)$	
第3심플렉스法	乘　算	$(m+1)(n+2)$		$(m+1)(n+2)$	$(m+1)(n+2)+m+n$
	加　算	$m(n+1)$		$m(n+1)$	

m : 制限條件數, 即, 行列 A의 行數

n : 原變數의 數

9. 事例硏究結果

第3節의 샘플시스템에 對하여 上述한 各 앨고리즘에 따른 프로그램패키지를 開發하여 事例硏究를 行한 結果値는 다음과 같다.

表 7에 의하면, 4種類의 어느 것이나 첫 反復過程에서 거의 最適値 近處에 收束하고 있으며, 最終 最適時 費用函數値도 거의 비슷함을 알 수 있다(164.117~164.186).

그리고 本 샘플시스템의 數理模型은 非線型으로, SUMT 또는 라그란제乘數法이 直接的인 解法이겠으나, 逐次的인 2次計劃法 또는 線型 計劃法으로서도 解를 얻을 수 있음을 알 수 있다. 또 逐次的인 線型計劃法이 豫想外로 收束性이 良好한 實驗的 結果를 얻었다.

10. 結　論

本 硏究는 多變數, 多制約條件을 갖는 大型시스템의 最適化問題를 SUMT, 라그란제乘數法, 2次計劃法 및 線型計劃法 等의 數理計劃法에 依據하여 풀되, 解法의 信賴性, 計算時間의 短縮, 所要記憶容量의 節減, 電算프로그램의 標準化의 觀點에서 從前의 大型시스템의 實例인 電力系統을 샘플시스템으로 擇하여 주어진 負荷狀態에서 發電費用을 最少로 하는 各 發電所의 發電出力과 調相設備出力을 最適決定하고 問題에 대하여 事例硏究를 遂行한 結果 다음과 같은 結論을 얻었다.

1. 시스템變數를 縮小하기 위하여 本 硏究에서 導入한 獨立從屬變數分割法, 獨立變數縮約法, 最適配置三角因數化技法은 大型시스템의 最適化앨고리즘에 매우 有効하다.

2. 不等式制約條件과 等式制約條件은 同時에 充足되어야 하나, 시스템의 固有의 構造的性質을 利用하면, 逐次的 充足앨고리즘에 의해서도 最適化가 可能한 問題가 많고, 特히 이 경우에는 라그란제乘數法도 有力한 技法이 될 수 있다.

3. 一般的으로 大型시스템은 非線型시스템인 경우가 많아, SUMT나 라그란제乘數法의 適用이 常例이며,

表 7. 事例研究計算結果値

Table 7. Computed Results to the Sample Problem.

(a) 目的函數(燃料費)收束過程

反復計算回數	SUMT 目的函數	SUMT 制約條件最大違反	라그란제乘數法 目的函數	라그란제乘數法 制約條件最大違反	2次 計劃法 目的函數	2次 計劃法 制約條件最大違反	線型計劃法 目的函數	線型計劃法 制約條件最大違反
1	157.293	0.30000	166.980	0.07258	166.972	P.Q ±0.01이내	167.012	P.Q ±0.01이내
2	166.289	0.04760	166.401	0.05529	164.280	〃	167.682	〃
3	163.793	0.01729	165.886	0.00785	164.280	〃	164.185	〃
4	164.164	0.00246	165.421	0.00643	164.280	〃	164.117	〃
5	164.156	0.00189	165.510	0.00556	164.280	〃		
6	164.163	0.00067	164.867	0.00959	164.167	〃		
7			164.768	0.00235	164.128	〃		
8			164.703	0.00119				
9			164.623	0.00221				
10			164.551	0.00321				
11			164.485	0.00420				
12			164.426	0.00516				
13			164.372	0.00611				
14			164.325	0.00704				
15			164.282	0.00794				
16			164.242	0.00883				
17			164.207	0.00965				
18			164.177	0.00233				
19			164.186	0.00052				

(b) 各 母線 電壓絕對値 計算結果

母線番號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
SUMT	0.993	0.957	0.986	0.989	0.994	1.014	1.017	1.007	1.012	0.999
라 그	1.025	1.013	0.988	0.993	1.037	1.050	0.993	1.050	1.050	1.050
2 次	1.007	0.994	0.966	0.971	1.023	1.031	0.971	1.035	1,033	1.050
線 型	0.975	0.967	0.964	0.974	0.994	0.998	0.994	1.006	0.994	1.024

(c) 發電所 有効, 無効出力 및 調相機無効出力

母線番號	各 發電所 有効出力					各 發電所 無効出力					母線의 調相機出力
	6	7	8	9	10	6	7	8	9	10	
SUMT	0.197	0.200	0.418	0.249	0.527	0.526	0.493	0.098	0.353	0.106	0.001
라 그	0.681	0.140	1.048	0.050	0.471	0.373	0.189	0.206	0.388	0.185	0.009
2 次	0.208	0.050	1.510	0.050	0.521	0.400	0.120	0.018	0.234	0.345	0.000
線 型	0.489	0.050	1.223	0.051	0.499	0.376	0.363	−0.09	0.054	0.377	−0.001

SUMT適用時에는 問題에 따라 매우 精巧한 패널티項의 考案이 要請되며, 라그란제乘數法에서는 λ의 修正 앨고리즘에 特別한 配慮가 要請된다. 그런데, 本 硏究에서는 이를 改善하는 두 方法을 提示하였다.

4. 大型시스템이 非線型이다도 制約式의 逐次線型化, 費用函數式의 逐次 2次式化 또는 線型化앨고리즘에 의하여 2次計劃法 또는 線型計劃法을 適用함으로써 그 最適化問題를 오히려 効率的으로 解決할 수 있음이 立證되었다.

5. 大型시스템의 最適化問題를 線型計劃法에 依存할 경우, 本 硏究에서 提示한 第3심플렉스法, 有界變數 앨고리즘, 2단계法의 導入이 所要記憶容量의 節減 및 計算時間의 短縮面에서 월등하게 有利함이 立證되었다.

6. 本 硏究에서 開發한 프로그램패키지는 相當한 部分은 大型시스템의 最適化에 關한 다른 硏究에도 便利하게 適用될 수 있다.

本 論文은 1980年度 文敎部 學術硏究 造成費에 의하여 硏究된 것이다.

參 考 文 獻

〔1〕 P. Dyer and S.R. McReynolds; "The computation and Theory of Optimal Control," Academic Press, 1970. pp. 35~148

〔2〕 W. Rheinboldt; "Numerical Methods of Mathematical Optimization," Academic Press, 1971. pp. 1~81.

〔3〕 M. Bazaraa and C.M. Shetty; "Nonlinear Programming Theory and Algorithms," John Wiley & Sons, 1979. pp. 124~224.

〔4〕 S. Kuo; "Computer Applications of Numerical Methods," Addison-Wesley, 1972. pp. 346~382.

〔5〕 A.V. Fiacco and G.P. McCormick; "The Sequential Unconstrained Minimization Technique for Nonlinear Programming, A Primal-Dual Method," Management Science Vol. 10, No. 2, Jan., 1964. pp. 360~366.

〔6〕 A.V. Fiacco and G.P. McCormick; "Computational Algorithm for the Sequential Unconstrained Minimization Technique for Nonlinear Programming," Management Science Vol. 10, No. 4, July, 1964. pp. 601~617.

〔7〕 A.V. Fiacco and G.P. McCormick; "Extensions of SUMT for Nonlinear Programming: Equality Constraints and Extrapolation," Management Science, Vol. 12, No. 11, July, 1966. pp. 816~828.

〔8〕 R.L. Fox; "Optimization Methods for Engineering Design," Addison-Wesley, 1971. pp. 38~230

〔9〕 A.E. Bryson, Jr., and Yu-chi Ho; "Applied Optimal Control," Ginu and Company, 1969. pp. 1~41.

〔10〕 Gass; "Linear Programming," McGraw-Hill, 1969. pp. 49~134 and pp. 291~320.