

論 文

大韓造船學會誌
 第18卷 第4號 1981年 12月
 Journal of the Society of
 Naval Architects of Korea
 Vol. 18, No. 4, December 1981

Schwarz-Christoffel 變換에 의한 附加質量의 計算

黃 宗 屹* · 李 昶 浩**

The Added Mass by Schwarz-Christoffel Transformation

J. H. Hwang* · C. H. Lee**

Abstract

The hydrodynamic added mass of two dimensional cylinders oscillating vertically at high frequencies in the free surface is of interest to ship vibration problems.

Conformal transformation is one of the methods commonly in use for computing the inertia coefficient. Especially, Schwarz-Christoffel transformation has been employed to evaluate the inertia coefficient for the cylinders of straight frames and chines.

In this paper, the inertia coefficient for the cylinders with round corners in vertical oscillation at high frequencies are evaluated by employing the Schwarz-Christoffel transformation for the concave corner.

The results of calculation by employing the Schwarz-Christoffel transformation are found to be well within the expected range of values compared to Lewis form and the results obtained by source distribution method.

기 호

- | | | | |
|------------------|-------------------------|------------------|-------------------------------|
| A | = 단면의 면적 | T, T' | = 유체의 운동에너지 |
| A' | = corner에서의 면적 | U | = 단면의 상하방향 운동속도 |
| b | = 단면의 반폭 | w | = 복소포텐셜 = $\varphi + i\psi$ |
| B | = 단면의 폭 | $ x_k' $ | = corner에서 r_k 와 나란한 방향의 길이 |
| C_n, C_n' | = 부가 질량계수 | $ y_k' $ | = corner에서 r_l 과 나란한 방향의 길이 |
| d | = 단면의 홀수 | z, z' | = 복소변수 = $x + iy$ |
| k_i, φ_i | = corner에서의 φ 값 | ζ, ζ' | = 복소변수 = $\xi + i\eta$ |
| m' | = 부가질량 | ρ | = 유체의 밀도 |
| n | = 경계면에서의 법선 | σ | = 단면적 계수 |
| r_1 | = 단면하측의 가로직선 길이 | φ | = 정지된 단면 주위의 유체의 속도 포텐셜 |
| r_k | = 단면의 세로직선 길이 | φ', ψ | = 움직이는 단면주위의 유체의 속도 포텐셜 |
| s | = 경계면에 연한 길이 | ψ | = 정지된 단면 주위의 유체의 유량함수 |
| | | ψ' | = 움직이는 단면주위의 유체의 유량함수 |
| | | φ'' | = 적분변수 |
| | | ω | = 진동수 |

接受日字: 1981年 11月 5日

* 正 會 員, 서울大學校 工科學大學

** 正 會 員, 서울大學校 大學院

1. 서 언

Schwarz-Christoffel 변환을 이용하여 주상체가 자유 표면상에서 상하진동을 할 때의 부가질량 계수를 Lewis (1929)[1]가 직사각형 단면과 마름모꼴 단면에 대하여 계산한 바 있다.

그리고 Hwang(1968)은 한개의 chine을 가지는 베의 단면과 동일한 단면의 주상체에 대하여 해석한 바 있고[2], 계속하여 여러개의 chine을 가지는 단면 [3]과 Stern-Shape 단면 [4]에 대하여 해석하였다.

본 논문에서는 위의 변화를 확장하여 Round Corner 를 가지는 단면에 대하여 해석하였다. 그리고 수치 계산의 결과를 동일한 폭-홀수비와 면적비를 가지는 Lewis형 단면과 비교해 보았고 Frank(1968)의 특이점 분포방식 [5]에 의하여 진동수가 클 때 ($\omega \rightarrow \infty$)의 상하 동요의 부가질량계수와 비교하였다.

2. 문제의 정식화

2.1. Schwarz-Christoffel 변환

그림 1에서와 같이 y 축을 자유표면으로, x 축을 이에 수직하게 잡는다. 이 때 z -평면상의 다각형 ABCDEF 의 내부는 식(1)에 의해 ζ -평면상의 실수축 위의 반평면으로 변환된다.

$$\frac{dz}{d\zeta} = C \cdot (\zeta + \xi_1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (\zeta + \xi_2)^{\frac{1}{2}} \cdot (\zeta - \xi_2)^{\frac{1}{2}} \cdot (\zeta - \xi_1)^{-\frac{1}{2}} \quad (1)$$

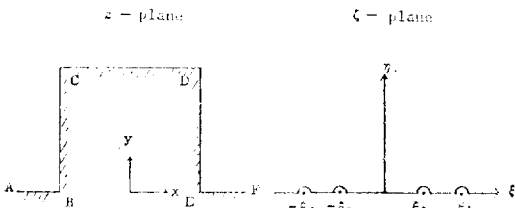


Fig. 1. Section with sharp corner.

ζ 평면상에서 ξ 축에 평행한 단위 속도의 유동에 대한 복소 포텐셜은 식(2)와 같이 표시된다.

$$w = \zeta \quad (2)$$

φ 와 ψ 를 각각 속도포텐셜, 유량함수라 할 때 복소포텐셜은 식(3)과 같이 된다

$$w(\zeta) = \varphi + i\psi \quad (3)$$

식(2)와 식(3)으로부터 식(4)와 같이 된다.

$$\varphi_i = \xi_i, \quad i=1, 2 \quad (4)$$

따라서 ζ -평면상의 유동은 식(5)에 의해 z -평면상에서 고정된 직사각형 단면 주위의 유동으로 변환된다.

$$\frac{dz}{dw} = (w + \varphi_1)^{-\frac{1}{2}} (w + \varphi_2)^{\frac{1}{2}} (w - \varphi_2)^{\frac{1}{2}} (w - \varphi_1)^{-\frac{1}{2}} \quad (5)$$

그림 2의 ζ -평면상의 유동은 식(6)에 의하여 z -평면상의 Concave-Corner[6]를 가지는 단면 주위의 유동으로 변환된다. (부록 A)

$$\frac{dz}{dw} = (w + \varphi_1)^{-\frac{1}{2}} \cdot [a(w + \varphi_2)^{\frac{1}{2}} + b(w + \varphi_3)^{\frac{1}{2}}] \cdot [b(w - \varphi_3)^{\frac{1}{2}} + a(w - \varphi_2)^{\frac{1}{2}}] \cdot (w - \varphi_1)^{-\frac{1}{2}} \quad (6)$$

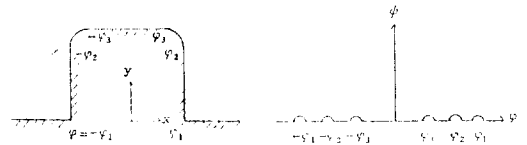


Fig. 2. Section with concave-corner

이제 z -평면상의 복소포텐셜은 식(7)로 주어지고

$$w(x) = \varphi + i\psi \quad (7)$$

정지된 유체중에서 단면이 단위속도로 운동을 할 때의 속도포텐셜과 유량함수는 식(8)과 같이 된다.

$$\varphi' = \varphi - x, \quad \psi' = \psi - y \quad (8)$$

2.2. 경계조건

진동수가 클 때 ($\omega \rightarrow \infty$)의 자유표면의 경계조건은 식(9)와 같이 된다.

$$\varphi' = 0 \quad \text{on } x=0, y > \frac{B}{2} \quad (9)$$

이 때 B 는 단면의 수선에서의 폭을 나타낸다.

물체의 표면상에서의 경계조건은 식(10)과 같이 된다.

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial n} = -\frac{\partial x}{\partial n} \quad (10)$$

또

$$\frac{\partial x}{\partial n} = \frac{\partial y}{\partial s}, \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial n} = -\frac{\partial \psi'}{\partial s}$$

로부터 식(10)은 식(11)과 같이 된다.

$$\frac{\partial \psi'}{\partial s} = -\frac{\partial y}{\partial s} \quad (11)$$

이 때 s 는 물체표면에 연한 길이, n 은 표면에서 외부로 s 에 수직한 방향을 나타낸다. 따라서 물체의 경계면에 연하여 표면상에서의 경계조건은 식(12)와 같이 된다.

$$\partial \psi' = -dy \text{ or } \psi' = -y \quad (12)$$

2.3. 운동에너지와 부가질량계수

무한원방에서 정지하고 있는 유체의 운동에너지는 식(13)로 주어진다.

$$T = -\frac{1}{2} \rho f \varphi' \frac{\partial \varphi'}{\partial n} ds \quad (13)$$

이때 ds 는 경계면의 선소(線素), ρ 는 유체의 밀도문 나타낸다. 식(13)은 경계조건들로부터 식(14)와 같이 되고, 식(14)의 적분은 물체의 경계면에 대하여 수행한다.

$$T = -\frac{1}{2} \rho f \varphi' d\psi \quad (14)$$

그리고 자유표면의 경계조건 $\varphi' = 0$ 으로부터 자유표면 아래의 유체의 운동에너지는 double-body의 운동에 의한 유체의 운동에너지의 반이 된다.

진동하는 주상체에 대한 부가질량은 식(15)와 같이 된다.

$$m' = \frac{2T}{U^2} \quad (15)$$

$U=1$ 일때의 부가질량은 식(16)과 같이 된다.

$$m' = 2T \quad (16)$$

단면이 타원인 주상체의 단위 길이당 부가질량은 식(17)로 주어진다.

$$m' = \frac{1}{2} \pi \rho b^2 \quad (17)$$

이때 b 는 수선에에서의 반폭을 나타낸다.

임의의 단면에 대한 부가질량을 식(18)로 나타낼 때에

$$m' = C_v \frac{1}{2} \pi \rho b^2 \quad (18)$$

부가질량계수 C_v 는 식(16)과 식(17)로부터 식(19) 또는 식(19')으로 표시된다.

$$C_v = \frac{2T}{\frac{1}{2} \pi \rho b^2} \quad (19)$$

$$C_v = \frac{16T}{\pi \rho B^2} \quad (19')$$

3. 해 석

유체의 운동에너지 T 는 식(20)으로 주어진다.

$$\begin{aligned} T &= -\frac{1}{2} \rho \int \varphi' d\psi' \\ &= \frac{1}{2} \rho \int (\varphi - x) dy \\ &= \rho \left[\int_0^b \varphi dy - A \right] \end{aligned} \quad (20)$$

이때 그림 3에서와 같이 단면의 기하학적 양을 표시할

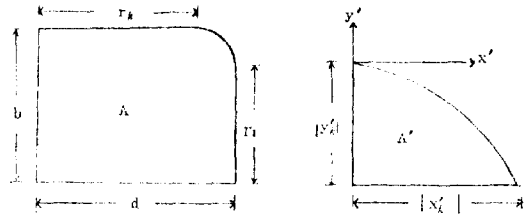


Fig. 3. Transformed section

때 A 는 식(21)로 표시할 수 있다.

$$A = r_1 r_k + r_1 |x_k'| + r_k |y_k'| + A' \quad (21)$$

여기서 A 는 단면의 면적을 나타내고 A' 는 corner에서의 면적을 나타낸다.

그림 2에서 $\varphi_1=1$, $\varphi_2=k_2$, $\varphi_3=k_1$ 이라고 식(6)을 적분 형태로 표시하면 식(22)와 같이 된다.

$$\begin{aligned} z &= a^2 \int (\varphi^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} (\varphi_2 - k_2)^{\frac{1}{2}} d\varphi \\ &+ b^2 \int (\varphi^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} (\varphi_2 - k_2)^{\frac{1}{2}} d\varphi \\ &+ ab \int (\varphi^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} (\varphi + k_2)^{\frac{1}{2}} (\varphi - k_1)^{\frac{1}{2}} d\varphi \\ &+ ab \int (\varphi^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} (\varphi + k_1)^{\frac{1}{2}} (\varphi - k_2)^{\frac{1}{2}} d\varphi + \text{const} \end{aligned} \quad (23)$$

식(22)로부터 r_k 는 식(22)으로 나타낸다.

$$\begin{aligned} r_k &= a^2 \int_0^{k_1} (1 - \varphi^2)^{-\frac{1}{2}} (k_2 - \varphi^2)^{\frac{1}{2}} d\varphi \\ &+ b^2 \int_0^{k_1} (1 - \varphi^2)^{-\frac{1}{2}} (k_2^2 - \varphi^2)^{\frac{1}{2}} d\varphi \\ &+ ab \int_0^{k_1} (1 - \varphi^2)^{-\frac{1}{2}} (\varphi + k_2)^{\frac{1}{2}} (k_1 - \varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi \\ &+ ab \int_0^{k_1} (1 - \varphi^2)^{-\frac{1}{2}} (\varphi + k_1)^{\frac{1}{2}} (k_2 - \varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi \end{aligned} \quad (23)$$

그리고 r_1 은 식(24)식과 같이 된다.

$$\begin{aligned} r_1 &= a^2 \int_{k_2}^1 (1 - \varphi^2)^{-\frac{1}{2}} (\varphi^2 - k_2)^{\frac{1}{2}} d\varphi \\ &+ b \int_{k_2}^1 (1 - \varphi^2)^{-\frac{1}{2}} (\varphi^2 - k_2)^{\frac{1}{2}} d\varphi \\ &+ ab \int_{k_2}^1 (1 - \varphi^2)^{-\frac{1}{2}} (\varphi + k_2)^{\frac{1}{2}} (\varphi - k_1)^{\frac{1}{2}} d\varphi \\ &+ ab \int_{k_2}^1 (1 - \varphi^2)^{-\frac{1}{2}} (\varphi + k_1)^{\frac{1}{2}} (\varphi - k_2)^{\frac{1}{2}} d\varphi \end{aligned} \quad (24)$$

r_1 의 Singular-Integral은 부록 B에 시술한 방법으로 수렴하는 수열로 식(25)에 나타내었다.

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{a^2}{4} (1 - k_2^2) \sum_{n=0}^{\infty} \left[\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) \right]^2 \cdot \frac{1}{n!(n+1)!} (1 - k_2^2)^n + \frac{-b^2}{4\pi} (1 - k_2^2)^{\frac{1}{2}} (1 - k_2^2)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma\left(-\frac{1}{2} + n\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2} + m\right) \\ &\cdot \frac{1}{n!m! \left(n + m + \frac{1}{2}\right)} \cdot \left(\frac{1 - k_2^2}{1 - k_1^2}\right)^n \cdot (1 - k_2^2)^m + \frac{ab}{4\sqrt{2}\pi^{3/2}} (1 - k_2^2)^{\frac{1}{2}} (1 - k_1^2)^{\frac{1}{2}} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{1}{2} + p\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \Gamma\left(-\frac{1}{2}+q\right) \cdot \Gamma\left(-\frac{1}{2}+r\right) \cdot \frac{1}{p!q!r!(p+q+r+\frac{1}{2})} \cdot \left(\frac{1-k_2}{2}\right)^p \cdot \left(\frac{1-k_2}{1+k_2}\right)^q \cdot \left(\frac{1-k_2}{1-k_1}\right)^r \\ & + \frac{-ab}{4\sqrt{2}\sqrt{\pi}}(1-k_2)(1-k_1)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right) \cdot \Gamma\left(-\frac{1}{2}+m\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}+n+m\right) \cdot \frac{1}{n!m!(n+m+1)!} \\ & \cdot \left(\frac{1-k_2}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1-k_2}{1+k_1}\right)^m \end{aligned} \tag{26}$$

다음에 $|x_{k'}|$ 와 $|y_{k'}|$ 는 각각 식(26)과 식(27)과 같이 되고 A' 는 식(28)로 주어진다.

$$\begin{aligned} |x_{k'}| &= a^2 \int_{k_1}^{k_2} (1-\varphi^2)^{-\frac{1}{2}} (k_2^2 - \varphi^2)^{\frac{1}{2}} d\varphi \\ & + ab \int_{k_1}^{k_2} (1-\varphi^2)^{-\frac{1}{2}} (\varphi+k_1)^{\frac{1}{2}} (k_2-\varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} |y_{k'}| &= b^2 \int_{k_1}^{k_2} (1-\varphi^2)^{-\frac{1}{2}} (\varphi^2 - k_1^2)^{\frac{1}{2}} d\varphi \\ & + ab \int_{k_1}^{k_2} (1-\varphi^2)^{-\frac{1}{2}} (\varphi^2 + k_2)^{\frac{1}{2}} (\varphi - k_1)^{\frac{1}{2}} d\varphi \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} A' &= \int_0^{1/y_{k'}} x'(-dy') \\ &= \int_{k_1}^{k_2} \left[\left(a^2 \int_{k_1}^{\varphi} (1-\varphi''^2)^{-\frac{1}{2}} (k_2^2 - \varphi''^2)^{\frac{1}{2}} d\varphi'' \right) \right. \\ & + \left. \left(ab \int_{k_1}^{\varphi} (1-\varphi''^2)^{-\frac{1}{2}} (\varphi''+k_1)^{\frac{1}{2}} \cdot (k_2-\varphi'')^{\frac{1}{2}} d\varphi'' \right) \right] \\ & \cdot \left[b^2(1-\varphi^2)^{-\frac{1}{2}} (\varphi^2 - k_1^2)^{\frac{1}{2}} + ab(1-\varphi^2)^{-\frac{1}{2}} (\varphi+k_2)^{\frac{1}{2}} \right. \\ & \left. \cdot (\varphi-k_1)^{\frac{1}{2}} \right] d\varphi \end{aligned} \tag{28}$$

그림 2와 그림 3으로부터 적분구간에 따른 dy 의 값은 식(29)와 같이 된다.

$$\begin{aligned} dy &= 0 \quad (0 < \varphi < k_1 < k_2 < 1) \\ dy &= -dr_1 \quad (0 < k_1 < k_2 < \varphi < 1) \\ dy &= dy' \quad (0 < k_1 < \varphi < k_2 < 1) \end{aligned} \tag{29}$$

따라서 식 (20)은 식(30)으로 표시된다. 식(30)의 A는 식 (23)~식(28)을 식(21)에 대입함으로써 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} T &= \rho \left[\int_0^{r_1} \varphi(-dr_1) + \int_{y'}^0 \varphi dy' - A \right] \\ &= \rho \left[a^2 \int_{k_2}^1 \varphi (1-\varphi^2)^{-\frac{1}{2}} (\varphi^2 - k_2^2)^{\frac{1}{2}} d\varphi \right. \\ & + b^2 \int_{k_2}^1 \varphi (1-\varphi^2)^{-\frac{1}{2}} (\varphi^2 - k_1^2)^{\frac{1}{2}} d\varphi \\ & + ab \int_{k_2}^1 \varphi (1-\varphi^2)^{-\frac{1}{2}} (\varphi+k_2)^{\frac{1}{2}} (\varphi-k_1)^{\frac{1}{2}} d\varphi \\ & + ab \int_{k_2}^1 \varphi (1-\varphi^2)^{-\frac{1}{2}} (\varphi+k_1)^{\frac{1}{2}} (\varphi-k_2)^{\frac{1}{2}} d\varphi \\ & + b^2 \int_{k_1}^{k_2} \varphi (1-\varphi^2)^{-\frac{1}{2}} (\varphi^2 - k_1^2)^{\frac{1}{2}} d\varphi \\ & \left. + ab \int_{k_1}^{k_2} \varphi (1-\varphi^2)^{-\frac{1}{2}} (\varphi+k_2)^{\frac{1}{2}} (\varphi-k_1)^{\frac{1}{2}} d\varphi - A \right] \end{aligned} \tag{30}$$

식(30)에서 위의 4개의 Singular-Integral은 부록 B와 부록 C에 서술한 방법으로 식 (31)에 수렴하는 수열로 나타내었다.

$$\begin{aligned} T &= \rho \left[\frac{a^2\pi}{4} (1-k_2^2) + \frac{-b^2}{4\sqrt{\pi}} (1-k_2^2)^{\frac{1}{2}} (1-k_1^2)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma\left(-\frac{1}{2}+n\right) \cdot \frac{1}{n!(n+\frac{1}{2})} \cdot \left(\frac{1-k_2^2}{1-k_1^2}\right)^n \right. \\ & + \frac{ab}{4\sqrt{2}\pi^{\frac{3}{2}}} (1-k_2^2)^{\frac{1}{2}} (1-k_1)^{\frac{1}{2}} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right) \cdot \Gamma\left(-\frac{1}{2}+q\right) \cdot \Gamma\left(-\frac{1}{2}+r\right) \\ & \cdot \frac{1}{p!q!r!} \cdot \left(\frac{1}{p+q+r+\frac{1}{2}} - (1-k_2) \frac{1}{p+q+r+\frac{3}{2}} \right) \cdot \left(\frac{1-k_2}{2}\right)^p \cdot \left(\frac{1-k_2}{1+k_2}\right)^q \cdot \left(\frac{1-k_2}{1-k_1}\right)^r \\ & + \frac{-ab}{4\sqrt{2}\sqrt{\pi}} (1-k_2)(1+k_1)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right) \cdot \Gamma\left(-\frac{1}{2}+m\right) \cdot \frac{1}{n!m!} \\ & \cdot \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+n+m\right)}{(n+m+1)!} - (1-k_2) \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}+n+m\right)}{(n+m+2)!} \right) \cdot \left(\frac{1-k_2}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1-k_2}{1+k_1}\right)^m \\ & \left. + b^2 \int_{k_1}^{k_2} \varphi (1-\varphi^2)^{-\frac{1}{2}} (\varphi^2 - k_1^2)^{\frac{1}{2}} d\varphi + ab \int_{k_1}^{k_2} \varphi (1-\varphi^2)^{-\frac{1}{2}} (\varphi+k_2)^{\frac{1}{2}} (\varphi-k_1)^{\frac{1}{2}} d\varphi - A \right] \end{aligned} \tag{31}$$

단면의 반폭과 환수는 각각 식 (32)와 식 (33)으로 표시되고 단면의 면적계수는 식(34)로 표시된다.

$$b = r_1 + |y_{k'}| \tag{32}$$

$$d = r_k + |x_{k'}| \tag{33}$$

$$\sigma = A/b \cdot d \tag{34}$$

4. 수치계산의 결과 및 검토

위의 해석을 검증하기 위해 몇개의 단면에 대하여 Schwarz-Christoffel변환에 의하여 부가질량계수를 계산하고 같은 단면에 특이점을 분포시켜서 얻은 부가질량 계수와 비교하여 보았다. 그리고 동일한 폭-흘수비와 면적비를 가지는 Lewis형 단면과도 비교하여 보았다. Schwarz-Christoffel변환에서 나타나는 regular integral은 Simpson 제 1법칙의 방법을 취하여 계산하였고, Singular integral은 수렴하는 수열로 치환하여 계산을 했다.

그리고 특이점 분포방식에 있어서는 단면의 반에 13개의 특이점을 분포시켜 계산하였다.

수치계산의 결과는 그림 4와 같다.

그림 4에 폭-흘수비와 면적비가 각각 다른 4개의 단면에 대하여 앞서 기술한 변환들에 의하여 구한 단면형상과 부가질량계수, 그리고 특이점 분포방식에 의하여 구한 부가질량 계수를 나타내었다.

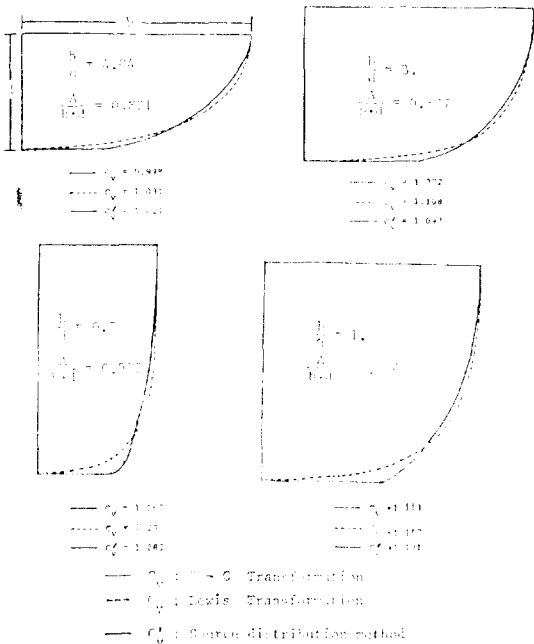


Fig. 4. Transformed sections and their added mass values.

Schwarz-Christoffel변환에 의하여 얻은 단면은 Lewis형 단면에 근사함을 보여준다. 또 부가질량 계수는 특이점 분포방식에 의한 값과 거의 일치함을 알 수 있으나 전체적으로 약간 작은 값을 얻었다. 이것은 수열의

계산에서의 Remainder의 영향으로 생각된다.

5. 결 론

(1) Schwarz-Christoffel변환을 확장하여 진동수가 클 때($\omega \rightarrow \infty$)의 Round-Corner를 가지는 주상체의 부가질량을 계산할 수 있었다.

(2) 확장된 Schwarz-Christoffel변환에 의해서 Lewis형 단면에 가까운 단면을 얻을 수 있었다.

(3) 위의 변환을 이용하여 Round-Corner를 가지는 단면을 해석할 때 주어진 형상에 대응하는 정확한 변환을 얻을 수 없는 단점이 있다.

후 기

본 연구의 방향을 시사하여준 미해군신박연구소 및 개발센터의 배광준박사에게 감사를 드린다.

참 고 문 헌

- [1] F.M. Lewis; "The Inertia of the Water Surrounding a Vibrating Ship," Trans. SNAME, Vol. 37, 1929.
- [2] Hwang, J.H.; "Added Mass of Two-dimensional Cylinders with the Sections of Straight Frames Oscillating Vertically in a Free Surface," Jour. of the soc. of Naval Arch. of Korea, Vol. 5, No. 2, 1968, ISP, Vol. 16, No. 178.
- [3] Hwang, J.H.; "The Analysis on the Added Mass of Two Dimensional Cylinders of Four and Five Parameter Families of Straight-framed Sections Oscillating Vertically in a Free Surface," Jour. of the soc. of Naval arch. of Korea, Vol. 8, No. 4, 1968.
- [4] Hwang, J.H.; "The Analysis of the Added Mass of Two Dimensional Cylinders of Stern Shape Sections Oscillating Vertically in a Free Surface," 대한기계학회지, 제 9권 제 1호, 1969.
- [5] Frank, W.; "Oscillation of Cylinders in or below the free Surface of deep fluids," Report No. 2375, Naval Ship Res. & Dev. Center, Bethesda, MD. 1967.
- [6] P. Henrici; "Applied and Computational Complex Analysis," Wiley-Interscience, 1977.

[7] E.T. Whittaker and G.N. Watson; "A Course of Modern Analysis," Cambridge University, Press, 1927.

부 록

[부록 A]

$Im w \geq 0$ 는 식(A-1)에 의하여 다각형의 내부로 변환된다.

$$\frac{dz}{dw} = \pi \sum_{k=1}^n (w-w_k)^{\alpha_k-1} \quad (A-1)$$

이때 $\alpha_k \pi$ 는 다각형의 K 번째 꼭지점에서의 내각이 되고 $1 < \alpha_k < 2$ 일때 concave corner가 된다.

위의 식에서 K 번째 factor를 $q_k(w)$ 라 하면 $q_k(w)$ 는 아래와 같다.

$$q_k(w) = (w-w_k)^{\alpha_k-1}$$

여기서

$$w_m' = w_m - \varepsilon > w_{k-1}$$

$$w_k'' = w_k + \varepsilon < w_{k+1} \quad (\text{단, } \varepsilon > 0)$$

$$a+b=1 \quad (\text{단, } a>0, b>0)$$

을 만족할 때 식(A-2)에 의하여 K 번째 꼭지점을 Rounding하게 된다.

$$q_k^*(w) = a(w-w_k')^{\alpha_k-1} + b(w-w_k'')^{\alpha_k-1} \quad (A-2)$$

[부록 B]

r_1 의 4개의 Singular Integral은 다음과 같이 수렴하는 수열로 나타내었다.

$$i) \int_{k_1}^1 (1-\varphi^2)^{-\frac{1}{2}} (\varphi^2 - k_2^2)^{\frac{1}{2}} d\varphi \quad (B-1)$$

$$\frac{\varphi^2 - k_2^2}{1 - k_2^2} = t$$

로 치환하면 식(B-1)은 식(B-2)와 같이 된다.

$$\frac{(1-k_2^2)^{\frac{1}{2}}}{2} \int_0^1 (1-t)^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}} (k_2^2 + (1-k_2^2)t)^{-\frac{1}{2}} dt \quad (B-2)$$

또 $1-t=u$ 로 치환하면 식(B-3)과 같이 된다.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (1-k_2^2)^{\frac{1}{2}} (1-k_2^2)^{\frac{1}{2}} \int_0^1 u^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-\frac{1}{2}+n)}{\Gamma(-\frac{1}{2})} \cdot \left(\frac{1-k_2^2}{1-k_1^2}\right)^n \cdot \frac{u^n}{n!} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+m)}{\Gamma(\frac{1}{2})} \cdot (1-k_2^2)^m \cdot \frac{u^m}{m!} \cdot du \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-k_2^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (1-k_1^2)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}) \cdot \Gamma(\frac{1}{2})} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma(-\frac{1}{2}+n) \Gamma(\frac{1}{2}+m) \cdot \frac{1}{n!m!} \cdot \left(\frac{1-k_2^2}{1-k_1^2}\right)^n (1-k_2^2)^m \cdot \int_0^1 u^{-\frac{1}{2}+n+m} du \\ &= \frac{-1}{4\pi} \cdot (1-k_2^2)^{\frac{1}{2}} (1-k_1^2)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma(-\frac{1}{2}+n) \cdot \Gamma(\frac{1}{2}+m) \cdot \frac{1}{n!m!(n+m+\frac{1}{2})} \cdot \left(\frac{1-k_2^2}{1-k_1^2}\right)^n \cdot (1-k_2^2)^m \quad (B-9) \end{aligned}$$

$$\frac{(1-k_2^2)^{\frac{1}{2}}}{2} \int_0^1 u^{-\frac{1}{2}} (1-u)^{\frac{1}{2}} (1-(1-k_2^2)u)^{-\frac{1}{2}} du \quad (B-3)$$

Hypergeometric function과 그것의 적분형태인 식(B-4), 식(B-5)를 이용하면 위 식은 식(B-6)과 같이 된다[7].

$${}_2F_1(a, b; c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n) \cdot \Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \cdot \frac{x^n}{n!} \quad (B-4)$$

$${}_2F_1(a, b; c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b) \cdot \Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tx)^{-a} dt \quad (B-5)$$

(이때 $|x| < 1, \text{Re}(b) > 0, \text{Re}(c) > 0$)

$$\begin{aligned} & \frac{(1-k_2^2)^{\frac{1}{2}}}{2} \cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 2; (1-k_2^2)\right) \\ &= \frac{(1-k_2^2)^{\frac{1}{2}}}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)\right]^2}{(n+1)!n!} \cdot (1-k_2^2)^n \\ &= \frac{(1-k_2^2)^{\frac{1}{2}}}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)\right]^2 \cdot \frac{1}{n!(n+1)!} \cdot 1 \cdot (-k_2^2)^n \quad (B-6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } & \int_{k_2}^1 (1-\varphi^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (\varphi^2 - k_1^2)^{\frac{1}{2}} d\varphi \\ & \frac{\varphi^2 - k_2^2}{1 - k_2^2} = 1-u \quad (B-7) \end{aligned}$$

로 치환하면 식(B-7)은 식(B-8)과 같이 된다.

$$\begin{aligned} & \frac{(1-k_2^2)^{\frac{1}{2}}}{2} \\ & \cdot \int_0^1 u^{-\frac{1}{2}} \cdot (1-k_1^2 - (1-k_2^2)u)^{\frac{1}{2}} (1-(1-k_2^2)u)^{-\frac{1}{2}} du \quad (B-8) \end{aligned}$$

Binomial Theorem

$$(1-x)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \cdot \frac{x^n}{n!} \quad (\text{단, } |x| < 1)$$

을 위 적분의 2번째 항과 3번째 항에 적용하면 식(B-9)와 같이 된다.

위의 수열은 $0 < k_1 < k_2 < 1$ 시 수렴한다.

$$\text{iii) } \int_{k_2}^1 (1-\varphi^2)^{\frac{1}{2}} (\varphi+k_2)^{\frac{1}{2}} (\varphi-k_1)^{\frac{1}{2}} d\varphi$$

$$\frac{\varphi-k_2}{1-k_2} = 1-u \quad (\text{B-10})$$

로 치환하면 식(B-11)과 같이 된다.

$$(1-k_2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{-\frac{1}{2}} \cdot (1+k_2)^{\frac{1}{2}} (1-k_1)^{\frac{1}{2}} \int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}$$

$$\cdot \left(1 - \frac{1-k_2}{2}u\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1-k_2}{1+k_2}u\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot \left(1 - \frac{1-k_2}{1-k_1}u\right)^{\frac{1}{2}} \cdot du \quad (\text{B-11})$$

위의 적분에서 2, 3, 4번째 항은 $(1-k_2)/2 < 1$, $(1-k_2)/(1+k_2) < 1$, $(1-k_2)/(1-k_1) < 1$ 에서 Binomial theorem을 이용하여 각각을 수렴하는 수열로 나타내면 식(B-12)와 같이 된다.

$$(1-k_2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{-\frac{1}{2}} \cdot (1+k_2)^{\frac{1}{2}} \cdot (1-k_1)^{\frac{1}{2}} \int_0^1 u^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+p)}{\Gamma(\frac{1}{2})} \cdot \left(\frac{1-k_2}{2}\right)^p \cdot \frac{u^p}{p!} \right) \cdot \left(\sum_{q=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-\frac{1}{2}+q)}{\Gamma(-\frac{1}{2})} \right.$$

$$\cdot \left. \left(\frac{1-k_2}{1+k_2}\right)^q \cdot \frac{u^q}{q!} \right) \cdot \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-\frac{1}{2}+r)}{\Gamma(-\frac{1}{2})} \cdot \left(\frac{1-k_2}{1-k_1}\right)^r \cdot \frac{u^r}{r!} \right) \cdot du$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^{3/2}} (1-k_2)^{\frac{1}{2}} (1-k_1)^{\frac{1}{2}} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right) \cdot \Gamma\left(-\frac{1}{2}+q\right) \cdot \Gamma\left(-\frac{1}{2}+r\right) \cdot \frac{1}{p!q!r!} \cdot \frac{1}{\left(p+q+r+\frac{1}{2}\right)}$$

$$\cdot \left(\frac{1-k_2}{2}\right)^p \cdot \left(\frac{1-k_2}{1+k_2}\right)^q \cdot \left(\frac{1-k_2}{1-k_1}\right)^r \quad (\text{B-12})$$

위 수열은 $0 < k_1 < k_2 < 1$ 에서 수렴한다.

$$\text{iv) } \int_{k_2}^1 (1-\varphi^2)^{-\frac{1}{2}} (\varphi+k_1)^{\frac{1}{2}} \cdot (\varphi-k_2)^{\frac{1}{2}} d\varphi \quad (\text{B-13})$$

$$\frac{\varphi-k_2}{1-k_2} = 1-u$$

로 치환하면 위의 적분은 식(B-14)로 된다.

$$(1-k_2) \cdot 2^{-\frac{1}{2}} (1+k_1)^{\frac{1}{2}} \cdot \int_0^1 u^{-\frac{1}{2}} \cdot (1-u)^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot \left(1 - \frac{(1-k_2)}{2}u\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1 - \frac{1-k_2}{1+k_1}u\right)^{\frac{1}{2}} du \quad (\text{B-14})$$

위 적분의 3번째 항에 $(1-k_2)/2 < 1$ 에서 Binomial theorem을 적용하며 수렴하는 수열로 나타내면 식(B-15)와 같이 된다.

$$(1-k_2) \cdot 2^{-\frac{1}{2}} \cdot (1+k_1)^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)}{n!} \cdot \left(\frac{1-k_2}{2}\right)^n \cdot \int_0^1 u^{-\frac{1}{2}+n}$$

$$\cdot (1-u)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(1 - \frac{1-k_2}{1+k_1}u\right)^{\frac{1}{2}} \cdot du \quad (\text{B-15})$$

위 식의 적분은

$${}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+n, 2+n, \frac{1-k_2}{1+k_1}\right)$$

이므로 식(B-16)과 같이 된다.

$$\frac{-(1-k_2)}{4\sqrt{2}\sqrt{\pi}} \cdot (1-k_1)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)$$

$$\cdot \Gamma\left(-\frac{1}{2}+m\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}+n+m\right) \cdot \frac{1}{n! \cdot m! \cdot (n+m+1)!}$$

$$\cdot \left(\frac{1-k_2}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1-k_2}{1+k_1}\right)^m \quad (\text{B-16})$$

[부록 C]

$$\text{i) } \int_{k_1}^1 \varphi \cdot (1-\varphi^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (\varphi^2-k_2^2)^{\frac{1}{2}} d\varphi \quad (\text{C-1})$$

$$\frac{\varphi^2-k_2^2}{1-k_2^2} = t$$

로 치환하면 식(C-2)로 된다.

$$\frac{1-k_2^2}{2} \cdot \int_0^1 (1-t)^{-\frac{1}{2}} \cdot t^{\frac{1}{2}} dt \quad (\text{C-2})$$

Beta Function

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} \cdot (1-t)^{q-1} dt$$

$$= \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

로 부터 위 적분은 식(C-3)과 같이 표시된다.

$$\frac{1-k_2^2}{2} B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad (\text{C-3})$$

$$= \frac{\pi}{4} (1-k_2^2)$$

ii) 식(30)의 적분은 부록 B에 나타난 것과 유사한 방법으로 수열로 나타낼 수 있다. 한 예로 식(30)의 4번째 특이적분을 수렴하는 수열로 아래에 나타내었다. 이 때 식의 전개 방법에 따라 몇개의 서로 다른 수열로 나타낼 수 있으나 여기서는 수차례 산이 용이한 수열로 나타내었다.

$$\int_{k_2}^1 \varphi(1-\varphi^2)^{-\frac{1}{2}}(\varphi+k_1)^{\frac{1}{2}}(\varphi-k_2)^{\frac{1}{2}}d\varphi \quad (C-4)$$

$\frac{\varphi-k_2}{1-k_2}=1-t$ 로 치환하면 식(C-4)는 식(C-5)과 같이 된다.

$$(1-k_2) \cdot 2^{-\frac{1}{2}}(1+k_1)^{\frac{1}{2}} \int_0^1 (1-u)^{\frac{1}{2}} u^{-\frac{1}{2}} (1-(-k_2)u)$$

$$\cdot \left(1-\frac{1-k_2}{2}u\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1-\frac{1-k_2}{1+k_1}u\right)^{\frac{1}{2}} du \quad (C-5)$$

위 식의 4번째 항에 binomial theorem을 적용하고 3번째 term을 전개하여 두개의 적분으로 나타내면 식(C-6)과 같이 된다.

$$(1-k_2) \cdot 2^{-\frac{1}{2}} \cdot (1+k_1)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)}{n!} \left(\frac{1-k_2}{2}\right)^n \left(\int_0^1 (1-u)^{\frac{1}{2}} \cdot u^{-\frac{1}{2}+n} \cdot \left(1-\frac{1-k_2}{1+k_1}u\right)^{\frac{1}{2}} du - \int_0^1 (1-u)^{\frac{1}{2}} \cdot u^{\frac{1}{2}+n} \cdot \left(1-\frac{1-k_2}{1+k_1}u\right)^{\frac{1}{2}} du\right)$$

부록 B에 서술한 Hypergeometric Fn.을 이용하면 위 식은 다음의 수열로 나타내진다.

$$\frac{-1}{4\sqrt{2}\sqrt{\pi}} \cdot (1-k_2) \cdot (1+k_1)^{\frac{1}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right) \cdot \Gamma\left(-\frac{1}{2}+m\right) \cdot \frac{1}{n!m!}}{\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+n+m\right)}{(n+m+1)!} - (1-k_2) \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}+n+m\right)}{(n+m+2)!}\right)} \cdot \left(\frac{1-k_2}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1-k_2}{1+k_1}\right)^m$$