◀論　　文▶

有限要素法에 依한 矩形斷面의 溫度分布와 熱傳導

(Temperature Distribution and Heat Transfer of Rectangular Cross-Section by the Finite Element Method)

龍 鎬 澤[**] · 徐 廷 一[*] · 任 將 淳[*]

ABSTRACT

This paper studied the temperature distribution and heat transfer at a rectangular cross-section

Particularly, as we have known that FEM6, FEM10 can be able to divide FEM3 (25), FEM 3 (49) and we observed it with the details.

The approximate solutions (FDM, FEM3, FEM 3 (25), FEM 3(49), FEM(6) were compared to the 2-dimensional exact solution.

The results of this paper show that FEM 6 is the most accurate temperature profiles and heat transfer, furthermore mean values of the FEM 6 is more accurate than FEM3(25) and FEM 3(49)

NOMENCLATURE

B : Biot number

E : total element

f : force vector

g' : heat generation

h : heat transfer coefficient

k : stiffness matrix

ℓ : Length of an element

L : Length of rectangular cross section

n : the direction cosine of the outcoard normal vector

N : shape function

s : surface

v : volume

[ ] : square matrix

{ } : column matrix

⌊ ⌋ : row matrix

Σ : summation

SUPERSCRIPT

(e) : element

T : transpose

SUBSCRIPT

c : conduction

h : convection

i, j : position vector

x, y, z : direction

* 정회원 · 한양대학교

** 정회원 · 동양공업전문대학

Ⅰ. 序　　論

本 研究는 1956年 W.J.Turner, R.W.Clough, H.C.Martain, L.S.Topp等이 研究한 3節點 要素와 1965年 B.Fraeijs de Veubeke가 開發한 6節點 要素를 使用하였으며 特히 6節點, 10節點 三角形 要素는 各各 4個 9個의 3節點 三角形 要素로 分割될 수 있음에 着眼하여 短形斷面의 溫度分布와 傳熱量을 求하여 正確解와 比較 檢討하였다.

研究를 遂行함에 있어서 解析의 簡便化와 正確性 等을 考慮하여 2次元 定常狀態의 傳導와 對流만을 생각하였으며, 任意의 여러 Biot數에 對하여 差分法(FDM), 有限要素法(FEM)을 使用하여 求한 溫度分布와 傳熱量을 正確解와 比較를 通하여 各 數値解法의 長短點 및 最適 設計의 方法을 찾는데 目的을 두고 있다.

Ⅱ. Galerkin法에 依한 2次元 熱伝導

2-1 統制 方程式

定常狀態 熱傳導 方程式을 생각하면

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z\frac{\partial T}{\partial z}\right)+g'(x,y)=0 \quad \cdots\cdots(1)$$

여기서 k_x, k_y, k_z는 各各 x, y, z 方向의 熱傳導係數이며, g'는 內部에서 發生되는 에너지이다.

任意의 區域에서 境界條件은

$$T=T(x,y)$$

$$k_x\frac{\partial T}{\partial x}n_x+k_y\frac{\partial T}{\partial y}n_y+k_z\frac{\partial T}{\partial z}n_z+q_c+h(T-T_\infty)=0 \quad \cdots\cdots(2)$$

여기서 $T(x,y)$, n_x, n_y, n_z, q_c, $h(T-T_\infty)$는 各各 境界에서의 溫度分布, 境界曲線에서 外部로 向하는 法線 벡타 分의 餘弦, 傳導와 對流에 依한 熱損失을 表示한다.

2-2 汎極数와 最小値

方程式(1)이 境界條件을 滿足시키기 위하여 最小化 하여야 하며 이 最小値를 $x(T)$라 하면

$$x(T)=\int_v\frac{1}{2}\left[k_x\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2+k_y\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2+k_z\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2-g'T\right]dv+\int_s\left[q_cT+\frac{h}{2}(T-T_\infty)^2\right]ds \quad \cdots\cdots(3)$$

任意의 物體를 많은 要素로 分割하고 各 要素에서의 溫度를 T라고하면 式(3)은

$$x(T)=\sum_{e=1}^{E}\int_v\frac{1}{2}\left[\lfloor g^{(e)}\rfloor^T\left[D^{(e)}\right]\lfloor g^{(e)}\rfloor-2T^{(e)}g^{(e)}\right]dv+\int_s T^{(e)}q_c^{(e)}ds+\int_s\frac{h^{(e)}}{2}\left(T^{(e)2}-2T^{(e)}T_\infty^{(e)}+T_\infty^{(e)2}\right)ds \quad \cdots\cdots(4)$$

但

$$\lfloor g\rfloor^T=\left\{\frac{\partial T}{\partial x}\ \frac{\partial T}{\partial y}\ \frac{\partial T}{\partial z}\right\},\quad D=\begin{bmatrix}k_x&0&0\\0&k_y&0\\0&0&k_z\end{bmatrix}$$

E는 各 要素의 總合

形狀函數를 N이라하면 各 要素의 溫度는

$T^{(e)}=\lfloor N^{(e)}\rfloor\{T\}$로 되며, $T^{(e)}$의 微分값을 $\{g^{(e)}\}$라 하면

$$\{g^{(e)}\}=\begin{Bmatrix}\frac{\partial T^{(e)}}{\partial x}\\ \frac{\partial T^{(e)}}{\partial y}\\ \frac{\partial T^{(e)}}{\partial z}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial x}&\frac{\partial N_2}{\partial x}&\cdots&\frac{\partial N_n}{\partial x}\\ \frac{\partial N_1}{\partial y}&\frac{\partial N_2}{\partial y}&\cdots&\frac{\partial N_n}{\partial y}\\ \frac{\partial N_1}{\partial z}&\frac{\partial N_2}{\partial z}&\cdots&\frac{\partial N_n}{\partial z}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}T_1\\T_2\\\vdots\\T_n\end{Bmatrix}$$

$$=\left[B^{(e)}\right]\{T\} \quad \cdots\cdots(5)$$

最小値를 求하기 위하여 式(5)를 式(4)에 代入하여 微分한 값을 零으로 놓으면

$$([K_c^{(e)}]+[K_h^{(e)}])\{T\}+\{f^{(e)}\}=0 \cdots (6)$$

여기서 熱傳導 매트릭스와 힘 벡타는 다음과 같다.

$$[K_c^{(e)}]+[K_h^{(e)}] = \int_v \lfloor B^{(e)}\rfloor^T [D^{(e)}] \lfloor B^{(e)}\rfloor \, dv + \int_s h \lfloor N^{(e)}\rfloor^T \lfloor N^{(e)}\rfloor \, ds$$

$$\{f^{(e)}\} = -\int_v g' \lfloor N^{(e)}\rfloor^T dv + \int_s q_c \lfloor N^{(e)}\rfloor^T ds - \int_s hT_\infty \lfloor N^{(e)}\rfloor^T ds$$

2-2-1. 6節點 內部 要素의 積分

1971年 Robert. L. Tay Lor[5]가 研究한 形狀函數를 使用하고 Martin A. Eisenberg, Lawrence E, Malvern[6]의 方法에 依하여 積分하면 熱傳導行列 $[K_c]$는 다음과 같다.

$$[K_c] = \int_A \lfloor B^{(e)}\rfloor^T [D^{(e)}] \lfloor B^{(e)}\rfloor \{T\} \, dA$$

$$= \frac{1}{12} \begin{vmatrix} 12d_1 & -4e_3 & -4e_2 & 0 & 16e_2 & 16e_3 \\ & 12d_2 & -4e_1 & 16e_1 & 0 & 16e_3 \\ & & 12d_3 & 16e_1 & 16e_2 & 0 \\ & & & f & 32e_3 & 32e_2 \\ & & & & f & 32e_1 \\ sym & & & & & f \end{vmatrix} \quad \cdots\cdots (7)$$

但,

$$d_m = b_m^2 + C_m^2 \qquad m = 1,2,3$$
$$e_e = b_m b_n + C_m C_n \qquad n = 2,3,1$$
$$f = 16(d_1 + d_2 + d_3) \qquad e = 3,1,2$$
$$C_i = x_{jk} = x_j - x_k \qquad i = 1,2,3$$
$$b_i = y_{kj} = y_k - y_j \qquad j = 2,3,1$$
$$k = 3,1,2$$

2-2-2. 境界에서의 積分

境界에서 對流 만 일어 난다고 假定하면

$$[K_h] = \int_s h \lfloor N^{(e)}\rfloor^T \lfloor N^{(e)}\rfloor \, ds$$

$$= \frac{h}{15} l_{ij} \begin{bmatrix} 2 & -0.5 & 1 \\ & 2 & 1 \\ Sym & & 8 \end{bmatrix} \cdots\cdots (8)$$

但, l_{ij}는 對流가 일어나는 任意 三角形의 邊의 길이.

Ⅲ. 数値 解析例

本 研究를 遂行 함에 있어서 첫째, 材質과 熱傳導 係數, 熱傳達 係數는 一定하며, 둘째, 各 要素 自體內에 熱源은 없으며 熱흐름 및 溫度에 時間에 따라 變하지 않고, 셋째, Fig 3-1과 같이 AB面에서의 溫度와 周圍 溫度는 一定하며 輻射 傳熱은 없는 것으로 假定한다.

Fig 3-1과 같은 斷面을 差分法 (FDM), 3節點 有限要素法 (FEM3), Fig 3-2와 같이 6節點 有限要素法 (FEM 6), 6節點 要素와같은 數의 3節點 有限要素 (FEM3(25)) (Fig 3-2 參照), Fig 3-4와 같이 10節點要素와 같은 數의 3節點 有限要素 (FEM 3(49)) 를 使用하여 溫度 分布를 求하였다.

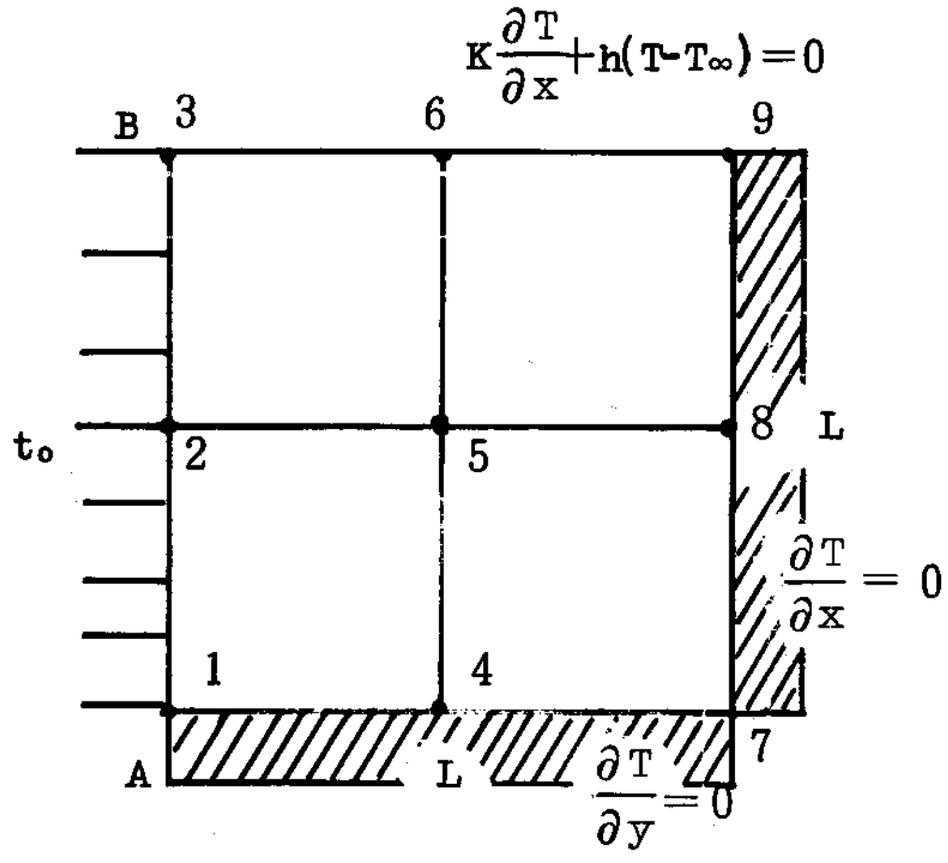

Fig 3-1. Rectangular Cross Section

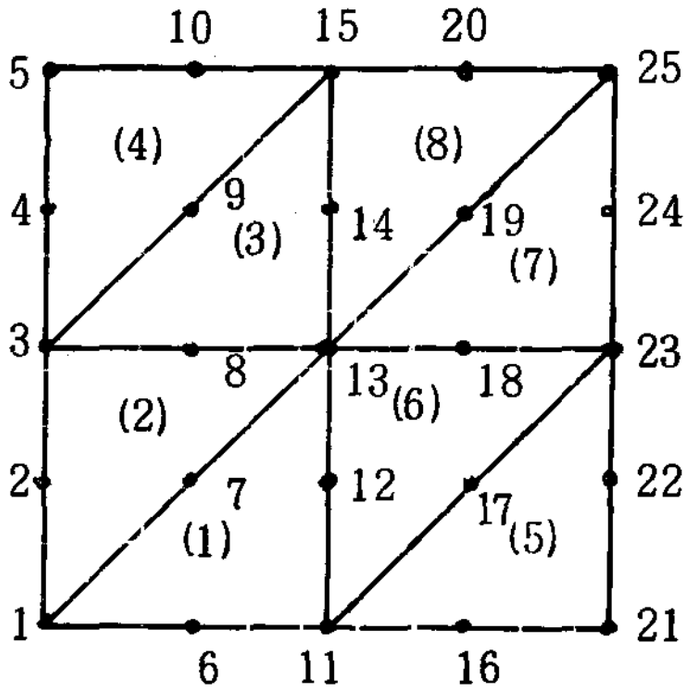

Fig 3-2. Finite Element of 6Nodal point

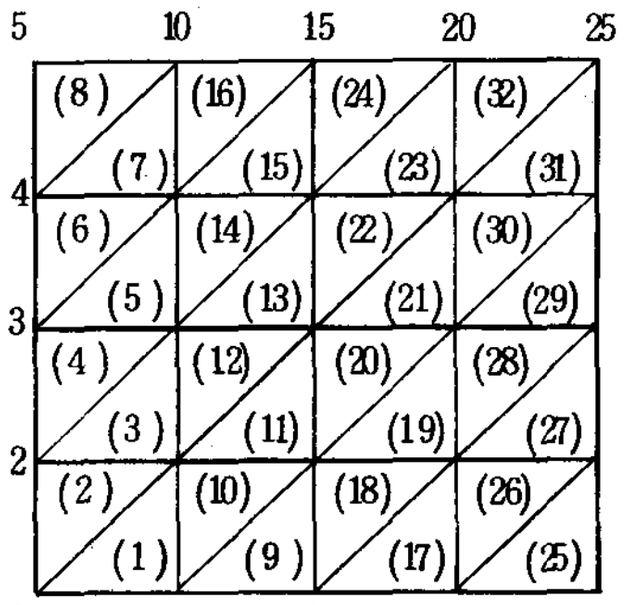

Fig 3-3. Finite-element arrangement of nodal point 25

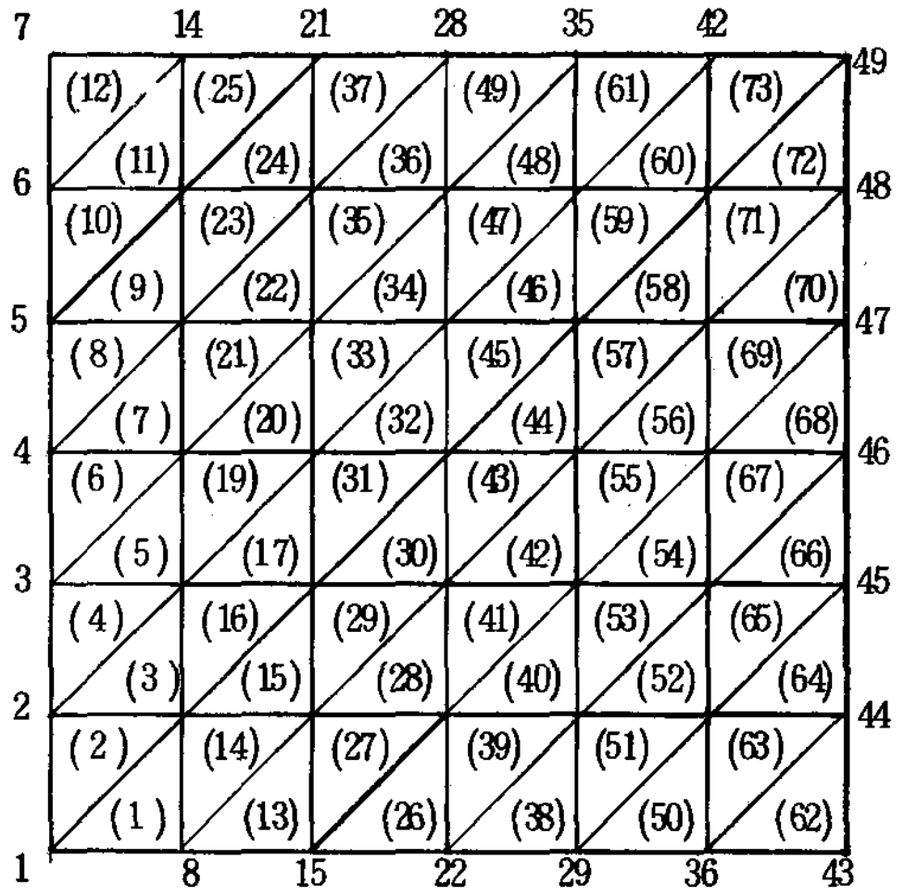

Fig 3-4. Finite-element arrangement of nodal point 49

Ⅳ. 比較 및 檢討

4-1 温度分布

矩形斷面에서의 温度分布를 求하여 Biot 數에 對한 相對誤差를 그리면 Fig 4-1 ~ Fig 4-9와 같다。

Fig 4-1과 Fig 4-5는 한 面이 斷熱된 곳의 温度分布로서 FEM 3과 FDM만 除外하고는 誤差는 5% 未滿이라는 것을 알 수 있다。

Fig 4-2는 中央點의 温度分布이며 Biot 數 1.0에서 -10~-15%의 誤差를 보이며, FEM6가 가장 優秀하다。

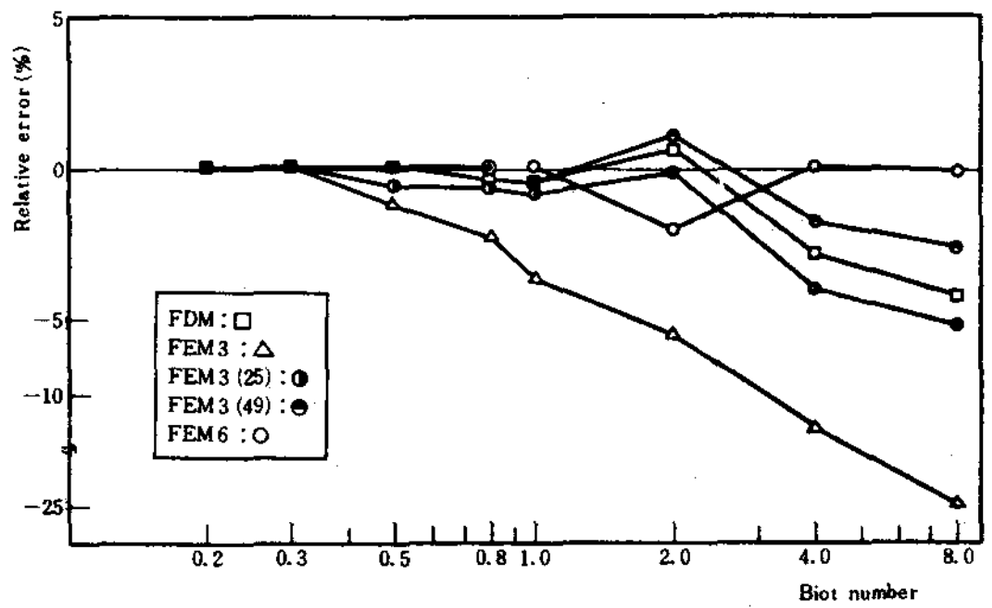

Fig.4-1. Temperature distribution at nodal point 4

Fig 4-4는 兩面이 斷熱된 곳의 温度分布이며, Biot 數가 0.2에서 모든 方法이 12~14% 정도의 誤差를 나타내며, 나머지 Boit 數에서는 Fig 4-1과 비슷하다는 것을 알 수 있다。

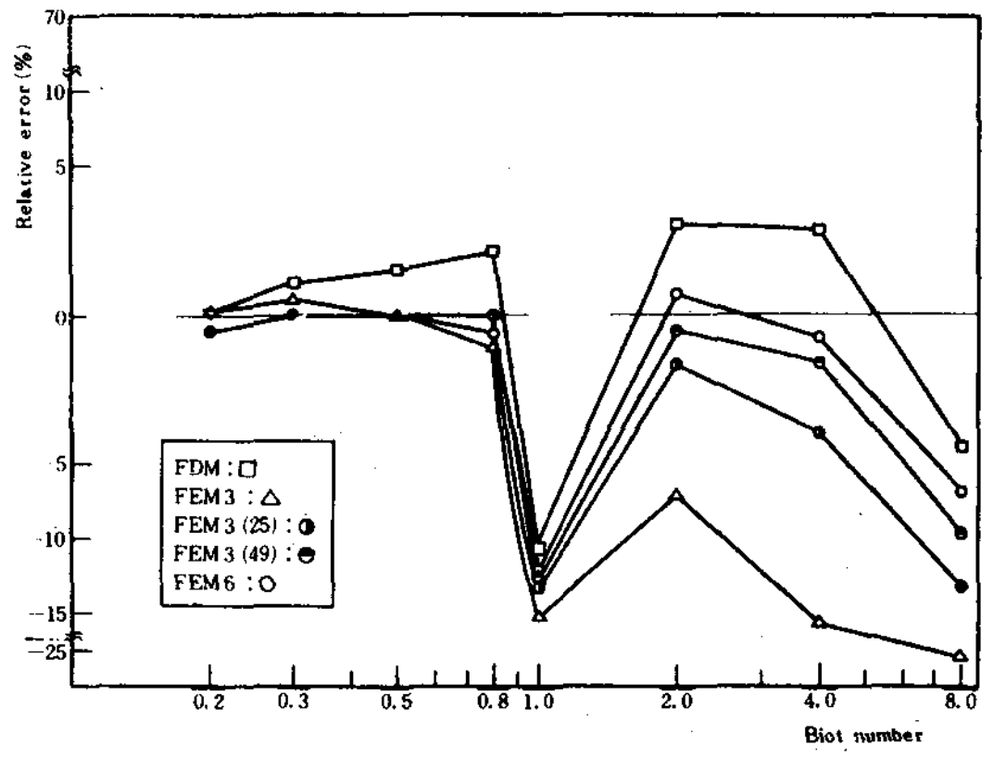

Fig.4-2. Temperature distribution at nodal point 5

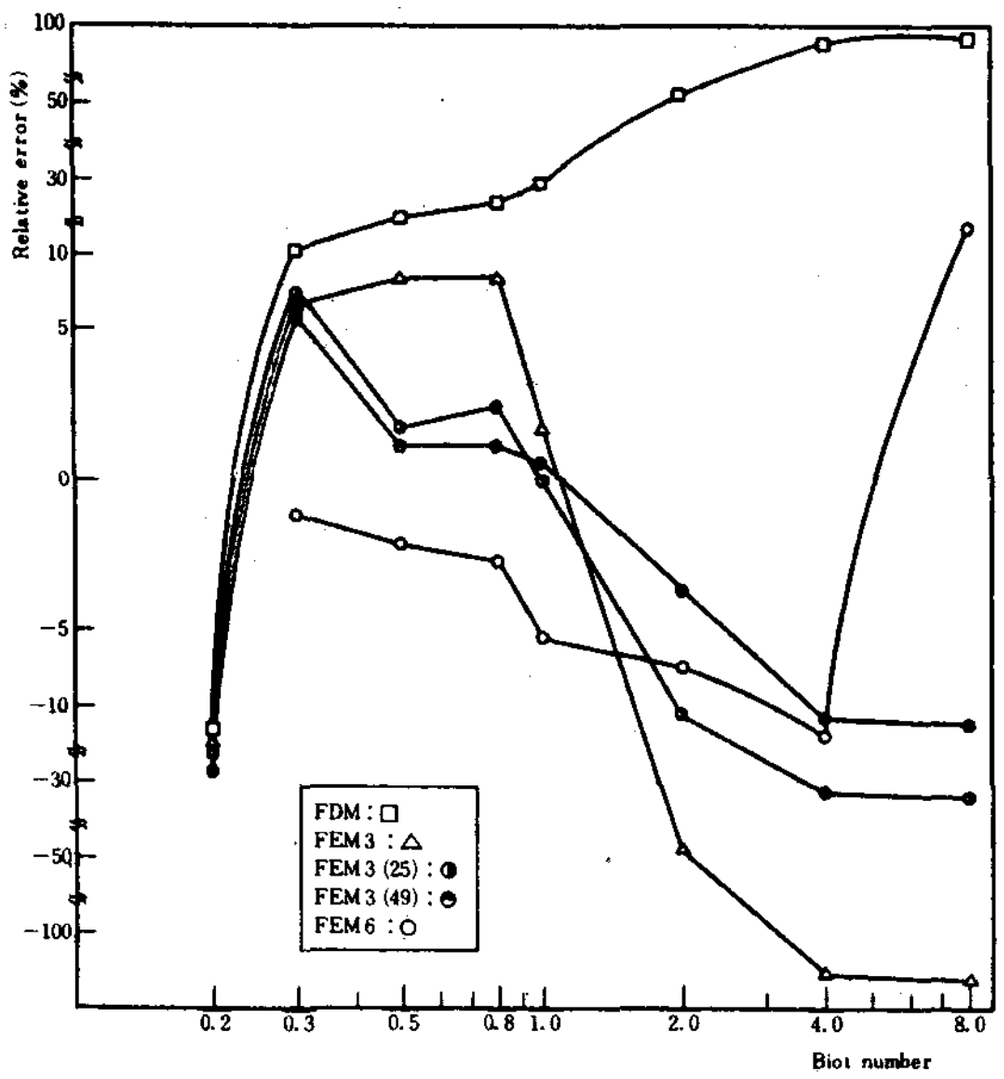

Fig.4-3. Temperature distribution at nodal point 6

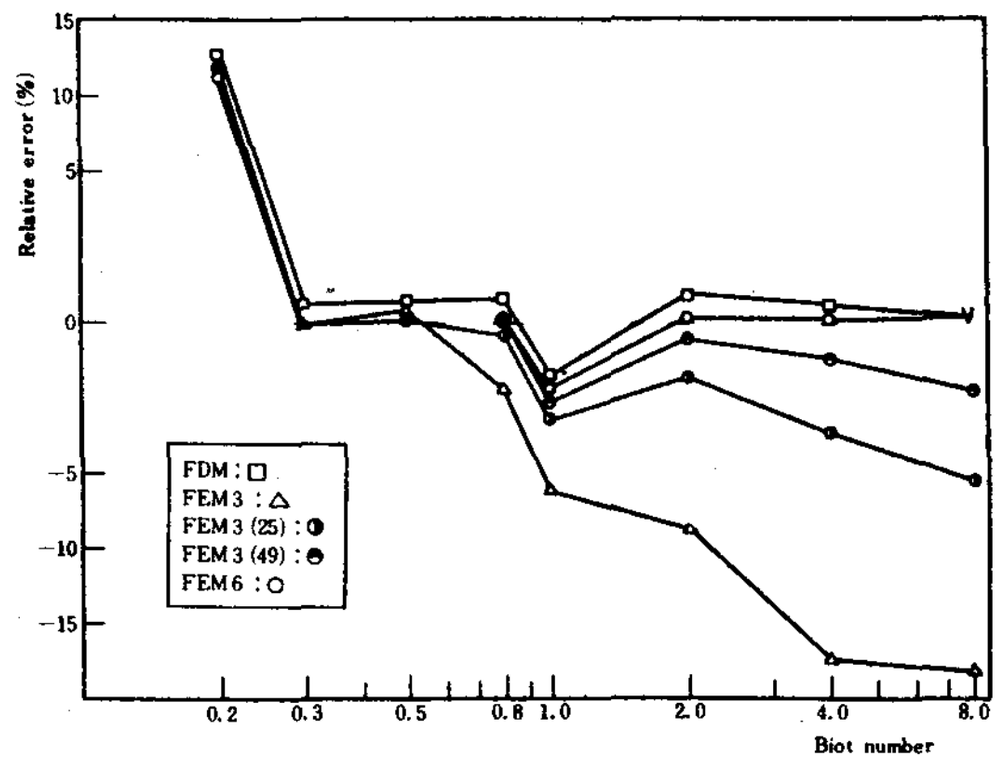

Fig.4-4. Temperature distribution at nodal point 7

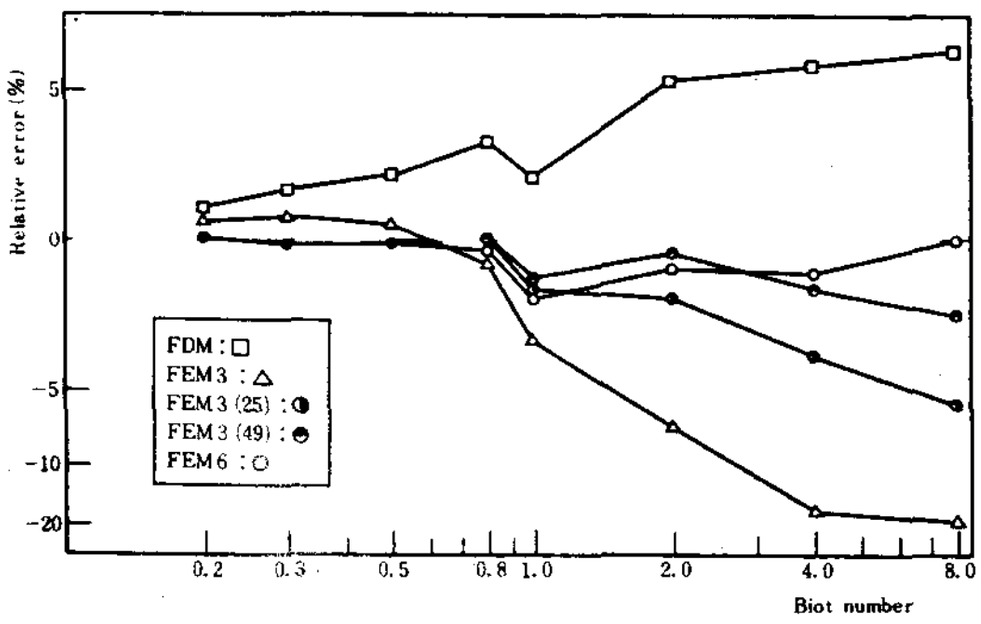

Fig.4-5. Temperature distribution at nodal point 8

Fig 4-3과 Fig 4-6은 對流 境界에 接한 節點으로서 모든 Biot數에 對하여 搖動이 深함을 알 수 있으며, 그 중에서도 FEM 3와 FDM의 誤差가 대단히 크다.

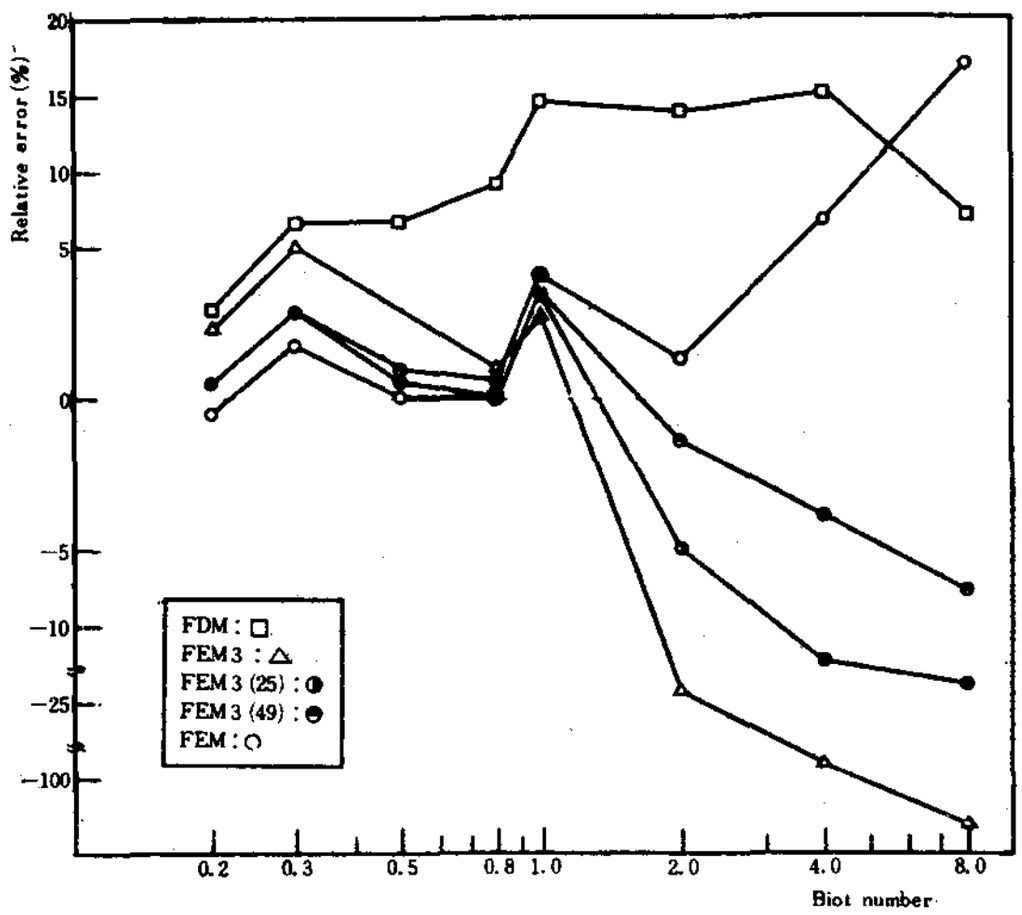

Fig.4-6. Temperature distribution at nodal point 9

Fig 4-7은 平均 温度分布의 相對誤差이며 FEM 6가 FEM 3(25) 나 FEM 3(49) 보다 훨씬 正確하다.

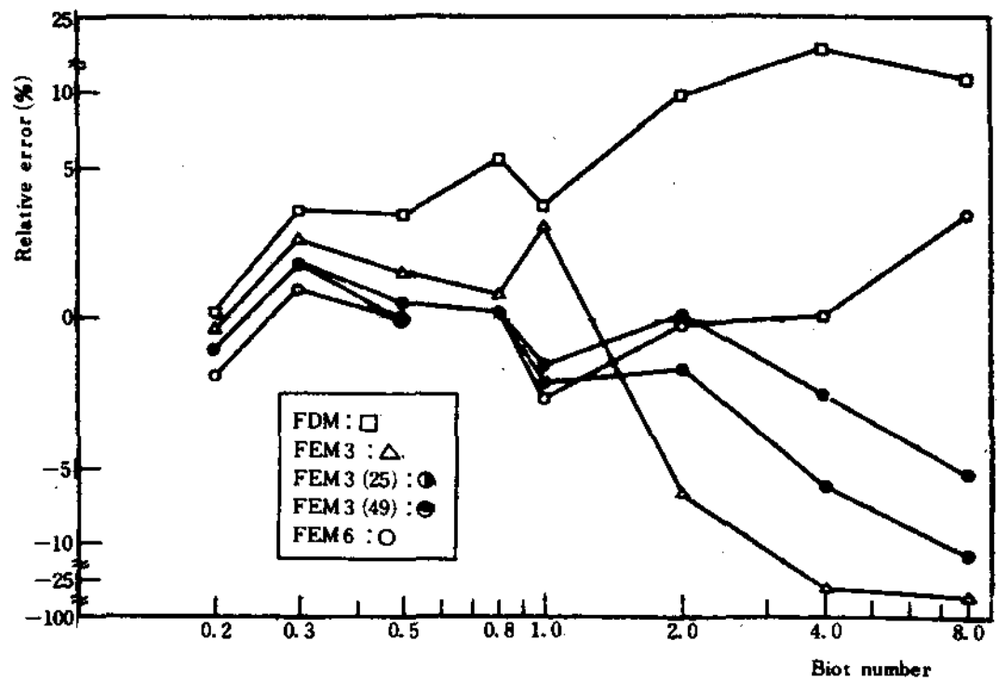

Fig.4-7. Mean temperature distribution

Fig 4-8은 温度分布의 平均 自乘値이며 FEM 3(49)가 FEM 6보다 약간 良好하다.

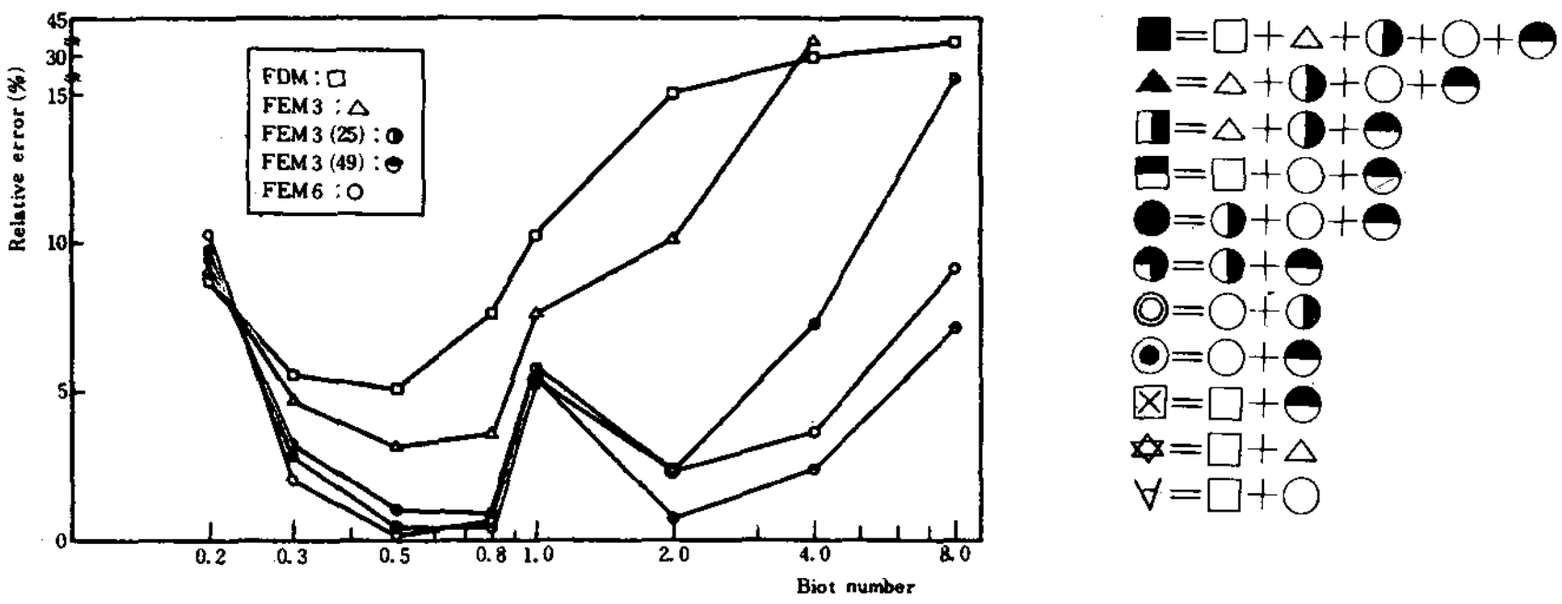

Fig.4-8. Root mean square value of temperature distribution

4-2 伝熱量

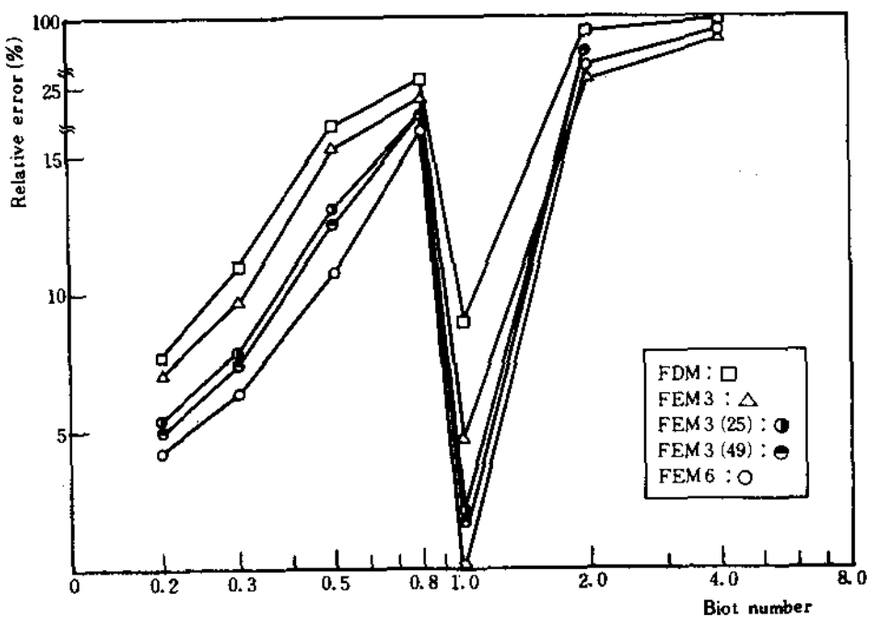

Fig.4-9. Relative error in heat transfer

温度分布에서는 모든 Biot數에 對하여 FEM이 가장 큰 誤差를 나타내고 있는 것과 마찬가지로 熱傳達에서도 가장 큰 誤差를 보이며 (Biot 1.0以下), Biot 1.0以上에서는 反對로 FEM 3이 가장 좋고 FDM順으로 되어 있다。平均的인 誤差를 볼때 Biot數가 1.0以下에서는 FDM,FEM3,FEM3(25),FEM6,FEM3(49)가 各各 3.63%, 3.0%, 2.46%, 1.97%, 2.39%를 나타낸다。이와같이 모든 節點에서의 温度分布와 傳熱量을 考擦해 볼때 FEM6이 가장 優秀함이 證明되었다.

그러므로 熱傳導 問題에서 正確解에 近似한 解를 求하기 위하여 要素를 많이 分割할 것이 아니라, FEM10 또는 FEM9 等을 研究하는 것이 賢明함을 알 수 있다。

但, 各 Fig에서의 記號의 合은 다음과 같으

■=□+△+◑+○+◓
▲=△+◑+○+◓
◨=△+◑+◓
◫=□+○+◓
●=◑+○+◓
◔=◑+◓
◎=○+◑
◉=○+◓
⊠=□+◓
✡=□+△
∀=□+○

며, 記號를 連結한 線은 曲線일 것이라고 思料되나, 本研究에서는 8個의 Biot數에 對해서만 研究하였으므로 直線으로 되었다.

V. 結　論

本 研究에서 얻은 結論은 다음과 같다.

1. 同一한 數의 節點을 갖는 矩形斷面에서는 FEM6가 FEM3(25)보다 温度分布는 94.79% (相對誤差의 百分率), 傳熱量은 (B<1.0) 19.92% 만큼 正確하다.

2. 温度分布의 相對誤差는 境界面, 中央, 兩面이 斷熱, 한面이 斷熱된 順으로 되어 있고, FDM, FEM3, FEM3(25), FEM6, FEM3(49)의 温度分布의 平均 相對誤差는 1.664%, -4.035%, -0.724% -0.038%, -0.292%이므로 FEM6이 가장 우수하다.

3. 傳熱量(B<1.0)의 平均 相對誤差는 FEM6, FEM3(49), FEM3(25), FEM3, FDM의 順序이다.

参 考 文 献

1. 藤野 勉, 熱傳導と 熱應力, 培鳳館, pp 40 ~ 150, 1972
2. Kenneth H. Huebner, The Finite Element Method for Engineers, John Wiley & Son, pp 248 ~ 252, 1975
3. Larry J. Segerlind, Applied Finite Element Analysis, John Wiley & Son, pp 71-77, 1976
4. A.F. Emery & W.W. Carson, "An Evaluation of the Use of the Finite-Element Method in the Computation of Temperature", J of Heat Transfer, pp 136-145, 1971

5. Robert L. Taylor, "On Completeness of Shape Functions for Finite Element Analysis", Int J for Num M in E. vol 4. pp17-22. 1972
6. Martin A. Eisenbery & Lawrence E. Malvern, "On Finite Element Integration in Natural Co-Ordinates", Inter J for Num M in E. pp574-575, 1973
7. D.G. Harrison & Y.K. Cheung, "A Higher-Order Triangular Finite Element for the Solution of Field Problems in Orthotropic Media", Inter J for Num M in E vol 7. pp287-295, 1973
8. S.O. Lee, "A Study of Numerical Methods for Heat Conduction of a "Fin, GS, DKU. 1979

- 22페이지에서 계속 -

13. Mackey, C.O., Wright, L.T., Clark, R.E. and Gay, N.R.: Radiant heating and cooling, Part I, Cornell University Engineering Experiment Station Bulletin, Vol. 32, Aug., 1943
14. 磁田憲生, 小林陽太郎, 堀越哲美, 池田信己: 風洞内 氣流と人體皮膚温との 關係に關する實驗的 研究(着衣), 日本建築學會論文報告集, Vol。229, P。121 昭和 50年
15。孫 章烈, 磁田憲生, 松井昌幸, 小林陽大郎: 室内 温熱環境の總合的 評價に關する研究(6), 日本建築學會大會學術講概集, P.537, 昭和 54年