

熱平衡積分法에 의한 사다리꼴斷面の 直線핀에서의 熱傳達解析

曹 鐘 徹 * · 趙 珍 鎬 **

Heat Transfer Analysis in a Straight Fin of Trapezoidal
Profile by the Heat Balance Integral Method)

Jo Jong - Chull · Cho Jin - Ho

ABSTRACT

When exact analytical solutions to certain type of heat conduction problems are quite cumbersome or not obtainable, it is important to introduce approximate analytical methods which are simple and useful compared with numerical methods. In this study, therefore, the Heat Balance Integral Method is applied to analysis of steady-state conduction in a straight fin of trapezoidal profile, and the two-dimensional temperature distribution in the fin and the approximate fin efficiency are obtained. Results are compared with those by the one-dimensional analysis and two-dimensional numerical analysis for a wide range of Biot numbers.

It is shown that the two-dimensional temperature distribution obtained by the integral method is in good agreement with that by the finite element method at Biot numbers for which the result by the one-dimensional analysis is unreliable.

* 正會員 漢陽大學校 大學院 機械科

** 漢陽大學校 工大 機械科

記 號 說 明

- B : dimensionless Biot number based on fin surface length, $B = h(r_b - r_t) / k$
- $F_1(Z)$: hypergeometric function,
 $F_1(Z) = F(P, -P | 1 | Z)$
- $F_2(Z)$: hypergeometric function,
 $F_2(Z) = F(P+1, -P+1 | 2 | Z)$
- $$F(a, b | c | \chi) = \frac{\prod_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(c) \Gamma(a+n) \Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \cdot \frac{\chi^n}{n!}}{\Gamma(a) \Gamma(b)}$$
- h : convective heat transfer coefficient, constant
- k : thermal conductivity of fin
- P : dimensionless parameter, $P^2 = 3 / \theta_0^2$
- Q : total fin heat transfer
- R : dimensionless radial coordinate,
 $R = r / (r_b - r_t)$
- r : radial coordinate
- S : dimensionless parameter, $S = \cos \theta_0 / \cos \theta$
- T : dimensionless temperature,
 $T = (t - t_\infty) / (t_b - t_\infty)$
- t : temperature in fin
- U : dimensionless temperature integral,
 $U = \int_{\theta_0}^{\theta} T d\theta$
- X, Y : cartesian coordinates
- Z : dimensionless radial distance from the origin, $Z = -BR\theta_0 / 3$
- α, β, γ : functions of R only
- η : fin efficiency
- θ : angular coordinate
- θ_0 : trapezoidal-fin taper angle
- $\Psi(a)$: digamma function, $\Psi(a) = d \ln(a) / da$

< Subscripts >

- ()_b : condition at the base of the fin
- ()_t : condition at the tip of the fin
- ()_∞ : conditions in the fluid surrounding the fin

1. 序 論

사다리꼴斷面의 直線핀에서의 熱傳導問題는 Harper 와 Brown¹⁾에 의하여 핀을 先端두께의 1/2 만큼 擴張시켜서 핀先端에서의 放熱量을 考慮하므로써 1次元的으로 解析되어 實用되고 있으나 핀 높이에 대한 平均 두께比가 크고 傾斜角이 클 때에는 熱流動을 1次元이라고 假定하여 求한 結果는 믿을 수 없고 2次元의 正確解를 구하는 것이 매우 어려우므로 近似解析解를 구하는 것이 필요하다. 最近에는 1次元解析結果를 믿을 수 없는 핀에서의 熱傳導에 대한 近似解析을 위하여 Pohlhausen 과 Von Karman²⁾이 粘性境界層問題를 풀기 위하여 提示하고 Goodman^{3,4)}이 1次元非定常狀態熱擴散問題를 푸는데 使用하였던 熱平衡積分法 (the Heat Balance Integral Method : HBIM)을 Sfeir⁵⁾가 처음으로 핀의 橫斷溫度變化를 近似的으로 計算하기 위하여 使用하였다. 그는 1次元解析媒介變數를 簡單히 修正하므로써 얻어지는 微分方程式들이 1次元解析에 의한 形態와 同一하기 때문에 橫斷溫度變化의 效果에 대한 補正을 할 수 있었다. 그러나 사다리꼴斷面의 直線핀에 대하여는 만족할 만한 結果式을 구하지 못하고 常微分方程式을 數值解析하여 溫度分布를 구하였다. 또한 Burmeister⁶⁾는 3角形핀의 性能解析을 위하여 熱平衡積分法을 使用하였으나 結果式의 常數決定에 있어서 핀베이스에서의 境界條件을 假定된 溫度分布多項式에 滿足되는 새로운 形態의 條件

으로 變換하지 않고 解析하였다. 따라서 本 研究에서는 사다리꼴斷面의 直線핀에서의 熱平衡積分法の 適用을 再考察하고 溫度分布에 對한 完全한 近似解析解를 구하여 핀效率를 計算할 수 있도록 하는데 目的을 두었다. 그리고 1次元解析解와 有限要素法에 의한 數值解析結果들과 比較 檢討하여 理論에 對한 評價와 適用條件을 調査하였다.

2. 熱平衡積分法에 의한 近似解析

本 研究에서는 아래와 같은 假定下에서 Fig.1에 表示된 사다리꼴斷面의 直線핀에서의 熱傳導解析을 하기로 한다.

- (1) 핀에서의 熱流動과 溫度는 時間에 獨立의 이다.
- (2) 핀材質은 均質이며 熱傳導係數는 모든 方向에서 同一하고 溫度와 時間에 無關하다.
- (4) 핀周圍의 媒體溫度는 均一하고 핀베이스에서의 溫度도 均一하다.
- (3) 對流熱傳達係數는 핀의 全表面에서 一定하다.
- (5) 핀自體内部에 熱源이 없다.
- (6) 輻射熱傳達은 無視하고 핀 全體에 걸쳐서 2次元傳導로 假定한다.

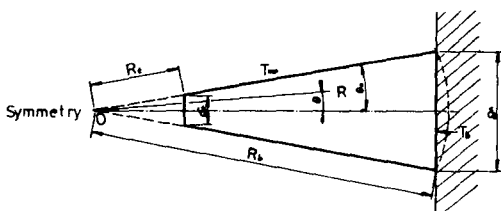


Fig.1 Physical Configuration and Coordinate System

여기서 溫度T와 원점으로부터의 半徑R은 다음과 같이 定義되는 無次元數이다.

$$T = \frac{t - t_{\infty}}{t_b - t_{\infty}}, \quad R = \frac{r}{r_b - r_i}$$

Fig.1에 表示된 핀모델에서의 2次元定常狀態 熱傳導方程式과 境界條件은 다음과 같다.

支配方程式:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial T}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0$$

$$R_i < R < R_b \dots\dots\dots (1)$$

$$0 \leq \theta < \theta_0$$

境界條件:

$$\theta = \theta_0 \text{에서}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = -BRT \dots\dots\dots (2)$$

$$\theta = 0 \text{에서}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \dots\dots\dots (3)$$

$$R = SR_b \text{에서}$$

$$T = 1 \dots\dots\dots (4)$$

$$R = SR_i \text{에서}$$

$$\frac{\partial T}{\partial R} = BT \dots\dots\dots (5)$$

여기서 $S = \cos \theta_0 / \cos \theta$ 이며 $B = h(r_b - r_i) / k$ 는 핀의 경사면길이에 기초를 둔 Biot 數이다.

溫度分布 $T(R, \theta)$ 를 구하기 위하여 먼저 다음과 같이 θ 에 關한 多項式의 形態를 假定한다.

$$T = \alpha + \beta \theta + \gamma \theta^2 \dots\dots\dots (6)$$

여기서 α, β, γ 는 R만의 函數이다.

境界條件式(2)와 (3)으로부터 β 와 γ 를 α 의 項으로 구하여 式(6)을 다시 쓰고 $U = \int_{\theta_0}^{\theta} T d\theta$ 를 定義하여 α 를 U의 項으로 表示하면 溫度分布式은 다음과 같이 된다.

$$T = U \cdot \frac{2 + 3(BR\theta_0/3) \{1 - (\theta/\theta_0)^2\}}{2\theta_0(1 + BR\theta_0/3)} \dots\dots\dots (7)$$

그리고 式(1)을 T에 關하여 0에서 θ_0 까지 積

分하고 U의 定義式과 境界條件(2)와 (3)을 代入하여 整理하면 다음과 같이 U에 關한 常微分方程式으로 變換된다.

$$\frac{d^2U}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{dU}{dR} - \frac{B}{\theta_0 R} \left(1 + \frac{BR\theta_0}{3}\right)^{-1} U = 0 \dots (8)$$

Sfeir 와 Burmister 가 假定한 橫斷溫度分布에 대한 2次形態는 式(8)의 形態와 同一함을 알 수 있으며 Sfeir 는 이러한 形態의 式을 數值解析하고 또한 式(8)의 괄호안의 $BR\theta_0/3$ 에 해당하는 값의 平均值(常數)를 使用하므로서 1次元解析에 의한 式과 同一하게 만들어서 近似解析하였으나 一般性이 없고 원래의 목적에 부합되지 않는다. 그리고 有限要素法에 의한 解析結果와 상당한 차이를 보였다.

常微分方程式(8)을 풀기 위하여 $Z = -BR\theta_0/3$ 으로 두고 變換하면

$$Z(Z-1) \frac{d^2Z}{dZ^2} + (Z-1) \frac{dU}{dZ} - P^2 U = 0 \dots (9)$$

式(9)는 hypergeometric 微分方程式의 標準型으로서 branch point는 $Z=0, 1$ 및 ∞ 이며 單位圓 $|Z| < 1$ 內的 모든 Z에 대하여 滿足하는 다음과 같은 두개의 線型獨立解를 가진다.^{7), 8)}

$$U_1 = F_1(Z), \quad U_2 = F_1(Z) \ln Z + \sum_{n=1}^{\infty} Z^n \phi_n(P) \dots (10)$$

여기서 $F_1(Z) = F(P, -P+1 | Z)$ 으로서 hypergeometric function이며

$$\begin{aligned} \phi_n(P) = & \frac{(P)_n (-P)_n}{(n!)^2} \{ \Psi(p+n) - \Psi(p) \\ & + \Psi(-p+n) - \Psi(-p) - 2\Psi \\ & (n+1) + 2\Psi(1) \} \end{aligned}$$

대부분의 경우의 實用편에 대하여 $|Z| < 1$ 을 滿足하므로 사다리꼴斷面의 直線綫에서의 溫度分布近似式은 式(10)의 結果로부터 구할 수 있으며 위에서 구한 U에 關한 解는 實數範圍에서 얻었으므로 $\ln Z = \ln |Z|$ 로 計算한다. 따라서 U의 一般解는 다음과 같다.

$$U = C_1 F_1(Z) + C_2 \left\{ F_1(Z) \ln |Z| + \sum_{n=1}^{\infty} Z^n \phi_n(P) \right\} \dots (11)$$

여기서 C_1, C_2 는 常數로서 나머지 境界條件(4)와 (5)에 의하여 決定된다. 이때 境界條件은 實際의 解에 의해서만 滿足되므로 式(9)을 풀기 위하여는 多項近似式(6)에 矛盾이 없는 새로운 形態의 境界條件式^{5), 6)}이 必要하다. 따라서 近似解(11)은 다음 條件을 滿足시켜야 한다.

$$R = SR_b \text{에서} \quad U = \theta_0 \dots (12)$$

$$R = SR_t \text{에서} \quad \frac{\partial U}{\partial R} = BU \dots (13)$$

式(11), (12) 및 (13)으로부터 常數 C_1 과 C_2 를 구하면 다음과 같다.

$$C_1(S) = \frac{\theta_0}{D(S)} \left[\left\{ F_1(SZ_t) - \frac{\theta_0}{3} P^2 F_2(SZ_t) \right\} \right.$$

$$\left. \ln |SZ_t| + \frac{\theta_0}{3 SZ_t} F_1(SZ_t) + \sum_{n=1}^{\infty} (SZ_t - \frac{\theta_0}{3} n) (SZ_t)^{n-1} \phi_n(P) \right] \dots (14)$$

$$C_2(S) = -\frac{\theta_0}{D(S)} \left\{ F_1(SZ_t) - \frac{\theta_0}{3} P^2 F_2(SZ_t) \right\} \dots (15)$$

$$D(S) = F_1(SZ_b) \left[\left\{ F_1(SZ_t) - \frac{\theta_0}{3} P^2 F_2(SZ_t) \right\} \right.$$

$$\left. (SZ_t) \ln(R_t/R_b) + \frac{\theta_0}{3 SZ_t} F_1(SZ_t) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[F_1(SZ_b) (SZ_t - \frac{\theta_0}{3} n) \right.$$

$$\left. (SZ_t)^{n-1} - \left\{ F_1(SZ_t) - \frac{\theta_0}{3} P^2 F_2(SZ_t) \right\} (SZ_b)^n \right] \phi_n(P) \dots (16)$$

여기서 $Z_t = -BR_t \theta_0/3, Z_b = -BR_b \theta_0/3, F_2(Z) = F(P+1, -P+1 | 2|Z)$ 그러므로 溫度分布는

$$T = U \cdot \frac{1 - \frac{3}{2} Z (1 - \frac{\theta_0^2}{\theta_0^2})}{\theta_0 (1 - Z)} \dots (17)$$

핀 표면의 온도분포 $T(R, \theta_0)$ 을 구하기 위하여 $\theta = \theta_0$, $S=1$ 을 식(17)에代入하면

$$T(R, \theta_0) = \frac{1}{1-Z} [C_1' F_1(Z) + C_2' \{ F_1(Z) \ln |Z| + \sum_{n=1}^{\infty} Z^n \phi_n(P) \}] \dots\dots\dots (18)$$

여기서 $C_1' = C_1(1)/\theta_0$, $C_2' = C_2(1)/\theta_0$ 이다.

사다리꼴斷面의 直線핀의 效率은 定義 $\eta = Q/Q_{ideal}$ 로부터 다음과 같이 無次元變數로서 나타낼 수 있다.

$$\eta = \frac{R_b}{B} \int_0^{\theta_0} \frac{\partial T(R_b, \theta)}{\partial R} d\theta / \{ R_b + R_t (\sin \theta_0 - 1) \} \dots\dots\dots (19)$$

式(19)에서의 積分은 $S = \cos \theta_0 / \cos \theta$ 가 $\cos \theta_0 \leq S \leq 1$ 의 範圍內에 있으므로 θ_0 가 작을 때에는 $S \approx 1$ 로 近似시킬 수 있고 그 외의 경우에도 S 를 적당한 값으로 假定하면 쉽게 계산된다. 여기서는 $S = 1$ 이라고 假定하면

$$\eta \approx \frac{R_b}{\sqrt{3}P} [C_1' P^2 F_2(Z_b) + C_2' \{ P^2 F_1(Z_b) \ln |Z_b| - \frac{1}{Z_b} F_1(Z_b) - \sum_{n=1}^{\infty} n Z_b^{n-1} \phi_n(P) \}] \dots\dots\dots (20)$$

3. 計算모델 및 計算方法

計算에서 使用한 熱傳導媒介變數들과 設計치수들은 다음 Table 1과 같으며 이 값들은 熱平衡積分法에 의한 解析의 有用性을 判定하기 위하여 다른 解析法에 의한 結果들과 다만 比較하기 위한 資料이므로 實際의 設計條件은 아니다. 1次元解析은 Harper와 Brown이 提示한 式¹⁰⁾으로 計算하였으며 有限要素解析^{9), 11)}에서는 Fig. 2와 같이 對稱軸의 上半部斷面을 모두 66개의 線型3角形要素로 分割하고 Galerkin의 方法에 의하여 有限要素式을 誘導하였다. 有限要素解析에 의한 放熱量은 핀表面上의 隣接한 節點에서의 溫度를 補間하여 計算하였다.

Table 1. Dimensions of Parameters

Classification	Nomenclature	Dimensions
Biot Number	B	0.01, 0.05, 0.1, 0.5, 1.0, 5.0
Ratio of Fin	δ_t / δ_b	
Thicknesses Fin Base and Tip		$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$
Half Angle of Fin	θ_0	10°, 15°
Fin-height	L	0.1 (m)
Thermal conductivity	k	100 (W/m°C)
Convective Heat Transfer coefficient	h	10, 50, 100, 500, 1000, 5000, (W/m²°C)

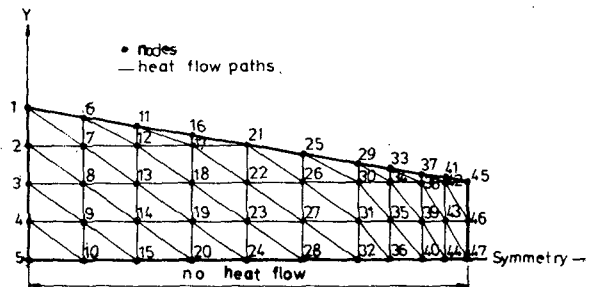


Fig. 2 Finite Elements Model of the Given Fin.

4. 結果 및 考察

핀베이스와 핀先端의 두께比, 핀의 테이퍼角 및 Biot 數의 變化에 따른 사다리꼴斷面의 直線핀에서의 橫斷溫度分佈에 대한 1次元解析, 有限要素解析(2次元), 熱平衡積分法에 의한 解析들의 結果를 說明하면 핀의 테이퍼角이 커지고 핀兩端두께比와 Biot 數가 커질수록, 또한핀의 先端部에 가까울수록 핀에서의 橫斷溫度勾配가

커짐을 알 수 있다. 따라서 이러한 경우에는 1次元解析結果는 믿을 수 없으므로 2次元解析이 必要하게 된다. 熱平衡積分法에 의한 解析結果의 正確性を 確認하기 위하여 有限要素解析時에 分割한 핀表面上的의 節點들에서의 溫度를 Biot 數變化에 따라서 各 解析法으로 구하여 比較하였으며, 例로서 節點 29에서의 溫度變化를 Fig. 3~6에 나타내었다. 그림에서와 같이 1次元解析結果를 믿을 수 없는 Biot 數範圍에서도 熱平衡積分法에 의한 解析結果는 有限要素解析結果와 큰 誤差없이 거의 一致하다. 그러나 핀베이스에서의 溫度曲線은 四角形斷面直線핀에 대한 數值計算에 의한 研究結果^{12), 13)}와 正반대의 曲率을 나타내고 Biot 數가 커질수록 핀베이스部の 가장자리溫度는 中心溫度보다 낮아지는데 實際는 핀의 放熱效果때문에 反대의 경우이다. 따라서 式(4)의 條件에 믿을 수 있는 修正을 하므로써 핀性能解析에 있어서 誤差를 줄이기 위한 研究가 이루어져야 할 것이다. 핀效率에 대한 計算結果는 Fig. 7~10과 같으며 핀의 테이퍼角이 작을수록 1次元解析에 의한 結果는 Biot 數가 0.5 보다 작은 경우에만 有限要素法과의 相對誤差가 적으나 熱平衡積分法에 의한 解析結果는 훌륭한 一致를 보인다. 또한 溫度分布에서와 마찬가지로 $\delta t / \delta b$ 가 작을수록 1次元解析結果는 Biot 數가 0.5 보다 큰 경우에도 有限要素解析結果와 거의 같다.

5. 結 論

사다리꼴斷面의 直線핀에서의 熱傳導解析을 위한 熱平衡積分法의 適用에 關한 本 研究로부터 얻어진 結論은 다음과 같다.

(1) 사다리꼴斷面의 直線핀에서의 定常狀態, 2次元熱傳導問題를 熱平衡積分法에 의하여 近似解析할 수 있었다.

(2) 사다리꼴斷面의 直線핀에서의 溫度分布와 效率는 Biot 數가 0.5 보다 클 때에는 1次元解析에 의한 結果를 믿을 수 없으며 2次元解析이 必要하다.

(3) 핀의 테이퍼角과 핀의 兩端두께比가 클수록, 핀의 先端에 가까울수록 橫斷溫度의 勾配는 커진다.

參 考 文 獻

1. D.R. Harper and W.B. Brown, Mathematical Equation for Heat Conduction in the Fins of Air Cooled Engines, NACA Report, No. 158, Washington, D.C., pp. 679-708, 1922
2. H. Schlichting, Boundary Layer Theory, Sixth ed., McGraw Hill, New York, p. 144, 1968
3. T.R. Goodman, The Heat Balance Integral and Its Application to Problems Involving a Change of Phase, Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute, Stanford University Press, 1957
4. T.R. Goodman, The Heat Balance Integral, Further Considerations and Refinements, Journal of Heat Transfer. ASME Series C, Vol. 83, pp. 83-86, 1961
5. A.A. Sfeir, The Heat Balance Integral in Steady-State Conduction, TRANS. A-SME, Vol. 98, pp. 466-470, 1976
6. L.C. Burmeister, Triangular Fin Performance by the Heat Balance Integral Method, Journal of Heat Transfer, ASME, Vol. 101, pp. 562-564, 1979
7. Phzlip. M. Morse, Herman Fresh Dach, Method of Theoretical Physics, McGraw -

- Hill, pp.541-547, pp.587-593, and pp.668-671, 1953
8. A.Kyrala. Applied Functions of a Complex Variable, Wiley- Interscience, pp. 293-301, 1972
9. J.C. Jo, A Study on the Heat Transfer in a Straight Fin of Rectangular Profile, M. S. Thesis, Hanyang University Graduate School, 1980
10. D. Q. Kern and A. D. Kraus, Extended Surface Heat Transfer, McGraw - Hill, pp. 86-97, 1972
11. K.H. Huebner, The Finite Element Method for Engineers, John Wiley & Sons, Inc, pp.106-117, 1975
12. E.M. Sparrow and D.K. Hennecke, Temperature Depression at the Base of a Fin, Transactions of the ASME, Journal of Heat Transfer, pp. 204-206, 2, 1970
13. G. C. Pinchera, Maurizio Cumo and Sergio Lopez, Numerical Calculation of Extended Surface Efficiency, CHEMICAL ENGINEERING PROCESS SYMPOSIUM SERIES, HEAT TRANSFER CLEVELAND, No. 59, Vol. 61, pp. 225-233.

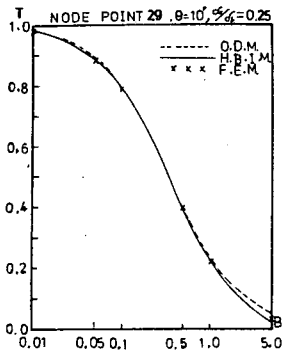


Fig.3 The effect of Biot number on temp.

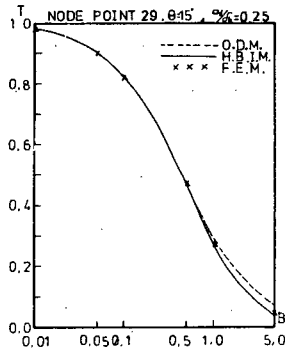


Fig.4 The effect of Biot number on temp.

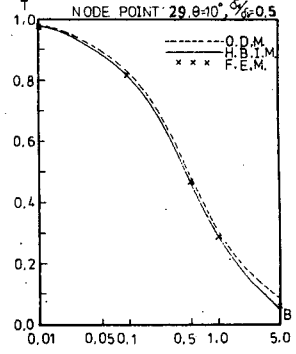


Fig.5 The effect of Biot number on temp.

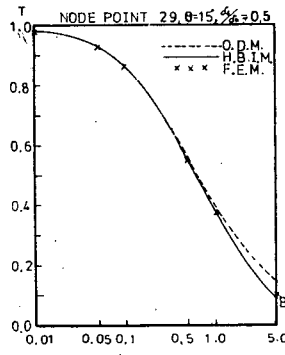


Fig.6 The effect of Biot number on temp.

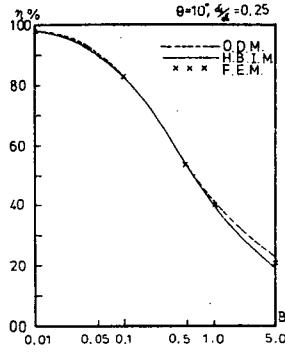


Fig.7 The effect of Biot number on T .

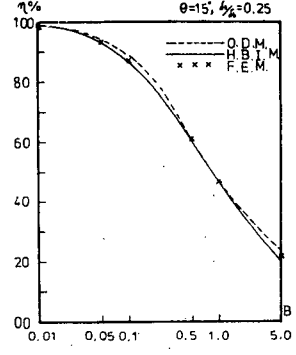


Fig.8 The effect of Biot number on T .

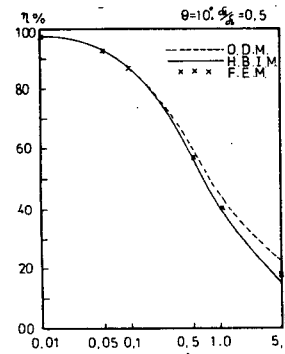


Fig.9 The effect of Biot number on T .

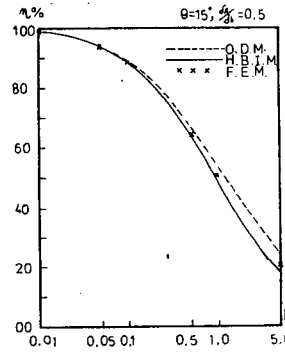


Fig.10 The effect of Biot number on T .