

DDS의 이론 및 응용(I)

李 鍾 元 · 金 光 駿

<韓國科學技術院 機械工學科 · 工博>

1. 서 론

DDS란 약어는 1973년에 Pandit⁽¹⁾가 그의 박사학위논문에서 처음 사용하기 시작했다. 그는 주어진 시스템의 동적특성을 그 계로부터 측정·관측되는 자료로부터 유도해낼 수 있는 방법론을 제시하고 이를 Data Dependent Systems이라 칭하였다. 한편 그의 학위논문 지도교수인 Wu⁽²⁾는 시계열(time series)의 형태로 주어지는 동적자료(dynamic data)를 통계적인 방법을 이용하여, 그 자료를 유발시킨 시스템의 물리적인 특성을 찾는다는 의미에서 Dynamic Data System이라 칭하나 둘사이에 근본적인 방법론상의 차이는 없다고 하겠다.

시계열 형태의 자료를 처리·모형화하는 과정에서 Eox-Jenkins^(3,4)의 방법과 다른점은 모형의 차수결정과정에서 자료로부터의 자동상관(auto-correlation) 또는 편 자동상관(partial autocorrelation)함수에 의존하지 않고 확률적인 중요도 시험(significance test) 방법에 의해서 모형을 결정하며 이산(discrete) 자료로부터의 차등방정식 유출에 그치지 않고 동력학 시스템의 해석⁽²⁾(dynamic systems analysis)의 입장에서 시스템의 물리적인 특성을 표현해주는 미분방정식을 유도하는데 역점을 두고 있다. DDS이론의 발전과 여러분야에의 응용추세는 많은 자료를 정확하고 효율적으로 측정·처리할 수 있는 계측기

술의 급속한 발전과 전산기의 개발에 힘입어 가능하게 되었다.

재래의 공학적 해석과정에서는, 주어진 시스템에 대한 정량적 해석을 위해 우선 시스템에 대한 수학적 모형을 가정·도입하고, 미지계수에 대한 결정은 시스템으로부터 관측된 자료에 의존하게 된다. 일단 모형이 확립되면 해석, 예측, 설계 및 제어에 응용할 수 있는 장점은 있으나, 모형을 설정하기 위해서는 시스템에 대한 확고한 사전(a priori) 지식내지 이해가 필요하고, 시스템의 특성을 나타내는 미분방정식을 유도하기 위한 시스템의 이상화작업과 Newton의 운동법칙이나 Hamilton 법칙과 같은 일반적인 법칙을 적용해야 한다. 이러한 모형화작업은 현대의 복잡·미묘한 시스템을 다루기에는 종종 비효율적이 되며 경우에 따라서는 시스템에 대한 불확실한 이해로 이상화작업마저 어려워져 적합·타당한 수학적 모형을 얻는데 난점이 많게된다. 반면 DDS에 의한 모형화는 시스템에 대한 사전 지식이 없어도 시스템으로부터의 자료에 대한 체계적인 정량적 해석을 통해서 시스템을 특성화시키는 미분방정식을 유도할 수 있게 하며 오히려 시스템에 대한 이해를 돕게한다. 이때 결정되는 모형은 최소오차차승법(least square error method)에 의한 통계학적으로 가장 적합한 근사모형으로 결정된 모형의 계수로 부터 시스템의 물리적 특성을 규명(identify)할 수 없는 경우에도 그 모형으로 표현되는 추상시스템을 바탕으로 특성화, 예측내지

제어 목적으로 활용할 수 있다. DDS는 단일변수(univariate) 및 다변수(multivariate) 자료에 모두 적용 가능하며 전달함수 규명(Transfer Function Identification) 및 닫힌 루우프 시스템(closedloop system)의 모형화 및 해석에도 이용되고 있다.

2. DDS 방법론

2.1. AM(n, m) 및 USAM(n, m) 모형^(2,5,6,7)

EDS는 시계열(time series) 또는 순서가 중요시되는 자료로부터 물리적으로 의미를 갖는 스토캐스틱(Stochastic) 미분 또는 차등 방정식을 이끌어 내는 새로운 모형화 기법으로 동역학 시스템으로부터 운전중에 관측되는 자료가 그 시스템의 특성을 반영하고 있다는 전제하에 시계열의 형태로 주어지는 동적자료를 통계학적으로 분석하여 시스템의 구조적 및 동적특성을 찾아낼 수 있다. 이때 관측된 자료의 불규칙(random)성을 고려하여 통계학적인 의미에서 가장 적합한 근사모형인 상계수 선형 미분 또는 차등방정식을 결정하게 된다. 비선형(nonlinear) 시스템의 모형화 과정은 스토캐스틱 선형화가 되어 확률적으로 최적의 선형화가 이루어지게 되며 선형화 정밀도의 정확한 확률적 평가가 가능하게 된다.

DDS 방법론의 개요는 그림 1에 보였다.

시스템의 단일 동적 변수 $X(t)$ 가 스토캐스틱 선형미분방정식의 형태로 표시될 때, 일반적인 연속적 자동회귀-이동평균(continuous autoregressive moving average) 모형인 $AM(n, m)$ 은

$$\begin{aligned} &(D^n + \alpha_{n-1}D^{n-1} + \dots + \alpha_1D + \alpha_0)X(t) \\ &= (b_nD^n + b_{n-1}D^{n-1} + \dots + b_1D + 1)Z(t) \quad (1) \\ E[Z(t)] &= 0, \quad E[Z(t)Z(t-u)] = \delta(u)\sigma_z^2 \end{aligned}$$

여기서

n, m : 자동회귀 및 이동평균 차수, $m \leq n-1$

$Z(t)$: 백색잡음

E : 기대값 연산자

$\delta(u)$: Dirac delta 함수

σ_z^2 : $Z(t)$ 의 분산

α_i, b_i : 자동회귀 및 이동평균 계수

관측되는 연속적 불규칙 변수 $X(t)$ 를 일정한 시간 간격으로 샘플링(sampling)하면 USAM($n, n-1$) 모형(uniformly sampled auto regressive moving average model)이 되는데 이 때의 차등 방정식은

$$\begin{aligned} X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} - \dots - \phi_n X_{t-n} \\ = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_{n-1} a_{t-n+1} \quad (2) \end{aligned}$$

$$E[a_t] = 0, \quad E[a_t a_{t-k}] = \delta_k \sigma_a^2$$

또는 $\Phi(B)X_t = \Theta(B)a_t$

여기서

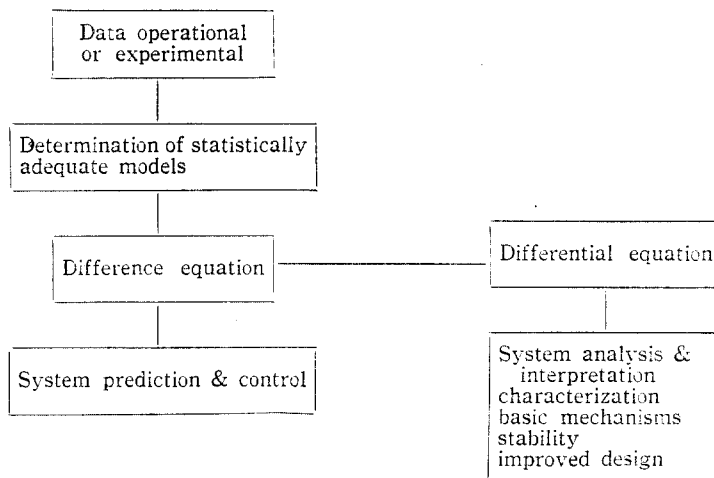


그림 1 DDS 방법론의 개요

ϕ_i, θ_i : 자동회귀 및 이동평균 계수

X_t : 시간 t 에서 관측된 자료

a_t : 이산적 백색잡음

σ_a^2 : a_t 의 분산

δ_k : Kronecker delta

B : Backward shift operator; $B^k X_t = X_{t-k}$

$$\Phi(B) = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_n B^n)$$

$$\Theta(B) = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_{n-1} B^{n-1})$$

이때 AM(n, m)과 USAM($n, n-1$) 모형의 계수 사이의 관계식은 다음과 같다. 즉

USAM($n, n-1$) 모형의 특성방정식

$$\begin{aligned} \Phi(B) &= (1 - \lambda_1 B)(1 - \lambda_2 B) \dots (1 - \lambda_n B) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

의 특성근을 $\lambda_i, i=1, 2, \dots, n$ 이라 하고 AM(n, m) 모형의 특성방정식

$$\begin{aligned} (D^n + \alpha_{n-1} D^{n-1} + \dots + \alpha_1 D + \alpha_0) \\ = (D - \mu_1)(D - \mu_2) \dots (D - \mu_n) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

으로 부터의 특성근을 $\mu_i, i=1, 2, \dots, n$ 이라 하면

$$\begin{aligned} \phi_k &= (-1)^{k+1} \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_k=1 \\ i_1 < i_2 < \dots < i_k}} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_k}, \quad k=1, 2, \dots, n \\ \phi_0 &= -1 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\theta_l = \frac{\sum_{i,j=1}^n Q(\mu_i) \bar{R}(\mu_j) \frac{V_i V_j}{\mu_i + \bar{\mu}_j} (\lambda_i \bar{\lambda}_j - 1) \sum_{k=0}^l \phi_k \lambda_i^{l-k}}{\sum_{i,j=1}^n R(\mu_i) \bar{R}(\mu_j) \frac{V_i V_j}{\mu_i + \bar{\mu}_j} (\lambda_i \bar{\lambda}_j - 1)} \quad l=1, 2, \dots, n-1$$

$$V_k = (-1)^{n+k} \prod_{\substack{i=1, \dots, n-1 \\ i \neq j}}^k (\mu_i - \mu_j) \quad k=1, 2, \dots, n$$

$$R(\mu) = b_m \mu^n + b_m + \mu^{n-1} + \dots + b_1 \mu + 1$$

의 관계식을 유도해낼 수 있다. 여기에서 “-”는 공액복소수를 의미한다. 또한 AM(n, m)과 USAM($u, n-1$) 모형의 특성근과 분산(variance) 사이의 관계는

$$\lambda_i = e^{\mu_i \Delta} \quad i=1, 2, \dots, n$$

$$\begin{aligned} \sigma_a^2 &= \frac{\sigma_z^2}{|V|^2} \sum_{i,j=1}^n R(\mu_i) \bar{R}(\mu_j) V_i V_j \frac{(\lambda_i \bar{\lambda}_j - 1)}{(\mu_i + \bar{\mu}_j)} \\ &= \prod_{i=1}^n (\mu_i - \mu_j) \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 Δ 는 샘플링간격이다.

시스템의 특성근중 공액쌍 $\lambda_i, \bar{\lambda}_j$ 가 존재할 때, 감쇠진동모우드가 있는 진동시스템으로 고려할

수 있으며 이 경우 고유진동수 f_{ni} 와 감쇠율 ζ_i 는

$$\begin{aligned} f_{ni} &= \frac{1}{2\pi\Delta} \sqrt{\frac{[\ln(\lambda_i \bar{\lambda}_i)]^2}{4} + \left[\cos^{-1} \left(\frac{\lambda_i + \bar{\lambda}_i}{2\sqrt{\lambda_i \bar{\lambda}_i}} \right) \right]^2} \\ \zeta_i &= \sqrt{\frac{[\ln(\lambda_i \bar{\lambda}_i)]^2}{[\ln(\lambda_i \bar{\lambda}_i)]^2 + 4 \left[\cos^{-1} \left(\frac{\lambda_i + \bar{\lambda}_i}{2\sqrt{\lambda_i \bar{\lambda}_i}} \right) \right]^2}} \end{aligned} \quad (7)$$

로부터 산출해낼 수 있다.

USAM($n, n-1$) 모형은 ARMA($n, n-1$) 모형과 형태상 유사하나 후자에서는 자동회귀와 이동평균 계수가 서로 독립적인데 비해서 전자에서는 식(5)와 같은 일정한 함수적인 관계가 있다. 일반적으로 식(1)의 AM(n, m) 모형과 식(2)의 USAM($n, n-1$) 모형의 자동회귀 차수는 동일하게 결정되는 반면 이동평균 차수는 다르게 결정될 수 있다.

2.2. 유일성(Uniqueness)^(2,8)

임의의 시스템은 이론적으로 AM(n, m) 모형과 USAM(n, m) 모형으로 동시에 표현이 가능하지만 실제로는 샘플된 이산 자료로부터 USAM(n, m) 모형을 결정한 후 이로부터 AM(n, m) 모형을 구하게 되므로 이때 유일성의 문제가 대두된다. 즉 식(6)으로 부터

$$\mu_i = \frac{1}{\Delta} \ln \lambda_i \quad i=1, 2, \dots, n \quad (8)$$

이 성립하는 데 λ_i 가 복소수이기 때문에 μ_i 는 다가함수가 된다. 말하자면 주어진 이산모형(discrete model)의 계수에 대한 해당 연속모형(continuous model)의 계수가 유일하게 정해지지 않을 수 있다. 이러한 다중성(multiplicity)의 문제는 식(5)로 주어지는 θ_e 의 μ_i 에 대한 의존성을 이용해서 해결할 수 있으며 이산모형으로 부터 연속모형을 유일하게 결정할 수 있게 된다.

2.3. Green 함수

Green 함수는 시스템의 동적특성을 나타내는 중요한 함수로 연속 시스템에서는

$$X(t) = \int_{-\infty}^t G(t-v) Z(v) dv \quad (9)$$

로 표시되는 충격반응함수(impulse response fu-

nction) $G(t)$ 가 되며, 이산시스템에서는

$$X_t = \sum_{j=1}^{\infty} G_j a_{t-j}, \quad G_0=1 \quad (10)$$

로 표시되는 과거의 충격력(impulse shock)에 대한 가중(weighting)함수 G_j 가 된다.

USAM(n, m) 모형의 Green 함수는

$$G_j = \sum_{k=1}^n g_k \lambda_k^j \quad (11)$$

가 되는데 g_k 는 초기조건으로 구해지는 λ_i 와 θ_i 의 함수이다. Green 함수는 과거의 충격력 a_t 에 대한 “기억정도”로도 풀이되며 시스템의 안정성에 직접관련이 있다. 즉 시스템이 안정하기 위해서는

$$|\lambda_k| < 1, \quad k=1, 2, \dots, n \quad (12)$$

의 조건을 만족해야 하는데 이는 이산모형의 특성근 λ_i 가 복소평면에서의 단위 원(unit circle) 내에 있어야 하는 조건이 되며 연속모형의 특성근 μ_i 의 실수부가 음이 되어야 하는 조건과 일치한다.

2.4. 역함수(Inverse Function)

이산적 자료로부터의 USAM 모형의 계수 결정과정에서는 비선형회귀법(non linear regression)을 이용하여야 하는데 이때의 계수에 대한 초기예측치를 구하는 과정은 다음과 같다.

즉, USAM(n, m) 모형에 대한 역함수 I_j 는

$$X_t = \sum_{j=1}^{\infty} I_j X_{t-j} + a_t \quad (12)$$

$$I_0 = -1$$

로 표시되며

$$\phi_k = I_k - \theta_1 I_{k-1} - \theta_2 I_{k-2} - \dots - \theta_n I_{k-n} \\ k=1, 2, \dots,$$

$$\phi_k = 0 \text{ for } k > n, \quad m = \min(k, n-1) \quad (13)$$

I_j 에 대한 근사예측 \hat{I}_j 를 이용하면

$$X_t = \sum_{j=1}^p \hat{I}_j X_{t-j} + a_t \quad (14)$$

로 p 가 충분히 크면 \hat{I}_j 는 I_j 에 근사하게 됨을 알 수 있다. \hat{I}_j 에 대한 값은 선형최소오차승법(linear least square error method)에 의해 이산자료 X_t 를 이용해서 식(14)로부터 용이하게

계산할 수 있다. \hat{I}_j 가 산출되면

$$\hat{\phi}_k = \hat{I}_k - \sum_{j=1}^m \hat{\theta}_j \hat{I}_{k-j} \quad k=1, 2, \dots \quad (15)$$

$$m = \min(k, n-1)$$

로부터 $\hat{\phi}_i$ 와 $\hat{\theta}_i$ 에 대한 값을 구할 수 있게 되고 계수간의 관계식으로 부터 AM 모형의 계수를 구할 수 있게 된다.

2.5. 자동공분산(Autocovariance)⁽⁶⁾

AM(n, m) 모형의 자동공분산은

$$\gamma(s) = E[X(t)X(t-s)] \\ = -\frac{\sigma_z^2}{|V|^2} \sum_{i,j=1}^n R(\mu_i) \bar{R}(\mu_j).$$

$$V_i \bar{V}_j = \frac{e^{\mu_i s}}{(\mu_i + \bar{\mu}_j)} \quad (16)$$

으로 표시되며 자동공분산의 푸리에변환(fourier transform)인 PSD(power spectral density)는

$$S(\omega) = \frac{\sigma_z^2}{2\pi} \frac{|\hat{b}_m(i\omega)^n + \hat{b}_{m-1}(i\omega)^{n-1} + \dots + 1|^2}{|(i\omega)^n + \alpha_{n-1}(i\omega)^{n-1} + \dots + \alpha_0|^2} \quad (17)$$

으로부터 구할 수 있고 스펙트럼 모우멘트(spectral moment)는

$$M_{2k} = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^{2k} S(\omega) d\omega \\ = (-1)^k \frac{d^{2k}}{ds^{2k}} [\gamma(s)] |_{s=0} \quad (18)$$

$$= (-1)^{k+1} \frac{\sigma_z^2}{|V|^2} \sum_{i,j=1}^n R(\mu_i) \bar{R}(\mu_j).$$

$$V_i \bar{V}_j = \frac{\mu_i^{2k}}{(\mu_i + \bar{\mu}_j)} \quad k < n-m$$

이고 이로 부터의 분산은

$$\gamma(0) = m_0 = \sum_{i=1}^n R(\mu_i).$$

$$V_i \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{-\sigma_z^2}{|V|^2} \bar{R}(\mu_j) \bar{V}_j \frac{1}{\mu_i + \bar{\mu}_j} \right\} \quad (19)$$

여기서 { } 안의 항은 각 특성근 μ_i 에 의한 동력(power) 또는 분산(variance)에의 기여도를 나타낸다. PSD는 USAM(n, m) 모형의 계수로 부터 직접 구할 수 있다. 즉

$$S(\omega) = \frac{2\sigma_a^2}{\gamma_0} \frac{|1 - \sum_{k=1}^n \theta_k e^{-ik\omega d}|^2}{|1 - \sum_{k=1}^n \phi_k e^{-ik\omega d}|^2} \quad (20)$$

인때 이 식에서 γ_0 는 X_t 의 분산이다. 이때 구해진 식(17), (18)의 PSD는 통계학적으로 안정된 부드러운 곡선으로 나타난다.

2.6. USAM(2, 1) 모형^(2,8,9,10,11,12)

일반적인 USAM(n, m) 모형의 기본이 되는 모형은 USAM(2, 1) 모형으로 이 모형에 대한 이해는 일반모형으로 쉽게 확장될 수 있다. 먼저 연속모형인 AM(2, 1)을 표시하면

$$(D^2 + \alpha_1 D + \alpha_0)X(t) = (1 + b_1 D)Z(t) \quad (21)$$

$$E[Z(t)] = 0, \quad E[Z(t)Z(t+s)] = \sigma_z^2 \delta(s)$$

이 되는데 이 시스템은 1 자유도 감쇠진동계에 해당하며 ω_n 을 고유진동수, ζ 를 감쇠율이라 하면

$$(D^2 + 2\zeta\omega_n D - \omega_n^2)X(t) = (1 + b_1 D)Z(t) \quad (22)$$

로 표시할 수 있다. 이때의 특성 방정식은

$$(D^2 + \alpha_1 D + \alpha_0) = (D^2 + 2\zeta\omega_n D + \omega_n^2) = (D - \mu_1)(D - \mu_2) = 0 \quad (23)$$

이때

$$\begin{aligned} \mu_{1,2} &= -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \\ &= \frac{-\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0}}{2} \end{aligned} \quad (24)$$

한편

$$\begin{aligned} X(t) &= \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \int_{-\infty}^t [(b_1\mu_1 + 1)e^{\mu_1(t-\tau)} \\ &\quad - (b_1\mu_2 + 1)e^{\mu_2(t-\tau)}] Z(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (25)$$

이므로 $X(t)$ 의 자동공분산 함수 $\gamma(s)$ 는

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= E[X(t)X(t+s)] = A_1 e^{\mu_1 s} + A_2 e^{\mu_2 s} \\ A_1 &= -\sigma_z^2 \frac{(1 - b_1^2 \mu_1^2)}{2\mu_1(\mu_2^2 - \mu_1^2)}, \\ A_2 &= \sigma_z^2 \frac{(1 - b_1^2 \mu_2^2)}{2\mu_2(\mu_2^2 - \mu_1^2)} \\ \gamma(-s) &= \gamma(s) \end{aligned} \quad (26)$$

AM(2, 1) 모형으로 표시되는 $X(t)$ 를 균일시간 간격 Δ 로 샘플해서 생기는 이산 자료 X_t 에 대한 자동공분산 γ_k 는

$$\gamma_k = \gamma(k\Delta) = A_1 e^{\mu_1 k\Delta} + A_2 e^{\mu_2 k\Delta} \quad (27)$$

윗식은 USAM(2, 1) 모형인

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} = a_t - \theta_1 a_{t-1} \quad (28)$$

로부터의 자동공분산

$$\gamma_k = d_1 \lambda_1^k + d_2 \lambda_2^k \quad (29)$$

$$d_1 = \frac{\sigma_a^2 (\lambda_2 - \theta_1)}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} \left[\frac{(\lambda_1 - \theta_1)}{(1 - \lambda_1^2)} - \frac{(\lambda_2 - \theta_1)}{(1 - \lambda_1 \lambda_2)} \right]$$

$$d_2 = \frac{\sigma_a^2 (\lambda_2 - \theta_1)}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} \left[\frac{(\lambda_2 - \theta_1)}{(1 - \lambda_2^2)} - \frac{(\lambda_1 - \theta_1)}{(1 - \lambda_1 \lambda_2)} \right]$$

의 형태를 갖고 있으므로 AM(2, 1)과 USAM(2, 1) 사이에 다음과 같은 관계식을 유도할 수 있다. 즉

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 = e^{\mu_1 \Delta} + e^{\mu_2 \Delta} \\ \phi_2 &= -\lambda_1 \lambda_2 = -e^{(\mu_1 + \mu_2) \Delta} \\ \theta_1 &= [e^{\mu_2 \Delta} (b_1 \mu_1 + 1)^2 (e^{2\mu_1 \Delta} - 1) / \\ &\quad 2\mu_1 - (e^{\mu_1 \Delta} + e^{\mu_2 \Delta}) \times \\ &\quad (b_1 \mu_1 + 1)(b_1 \mu_2 + 1)(e^{(\mu_1 + \mu_2) \Delta} - 1) / (\mu_1 + \mu_2) \\ &\quad + e^{\mu_1 \Delta} (b_1 \mu_2 + 1)^2 (e^{2\mu_2 \Delta} - 1) / 2\mu_2] / \\ &\quad [(b_1 \mu_1 + 1)^2 (e^{2\mu_1 \Delta} - 1) / 2\mu_1 - 2(b_1 \mu_1 + 1) \\ &\quad (b_1 \mu_2 + 1)(e^{(\mu_1 + \mu_2) \Delta} - 1) / (\mu_1 \mu_2) \\ &\quad + (b_1 \mu_2 + 1)^2 (e^{2\mu_2 \Delta} - 1) / 2\mu_2] \end{aligned} \quad (30)$$

(28)식의 형태를 갖는 ARAM(2, 1) 모형이 안정하기 위한 조건식인 식(12)로부터

$$\begin{aligned} \phi_1 + \phi_2 &< 1 \\ \phi_2 - \phi_1 &< 1 \\ |\phi_2| &< 1 \end{aligned} \quad (31)$$

을 얻을 수 있는데 이 영역은 그림 2에서의 삼각형 내부에 해당한다.

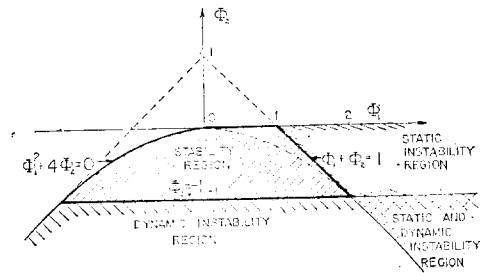


그림 2 Stability region of the USAM(2, 1) model.

USAM(2, 1) 모형의 경우는 식(31) 이외에 다음의 안정조건이 추가된다. 먼저, μ_1 과 μ_2 는 공액복소근이기 때문에 $(\mu_1 + \mu_2)$ 는 실수가 된다. 즉

$$\mu_1 + \mu_2 = -2\zeta\omega_n = -\alpha_1 \quad (32)$$

따라서

$$\phi_2 = -e^{-\alpha_1} < 0 \quad (33)$$

또한 μ_1 과 μ_2 가 실수라면 λ_1 과 λ_2 는 실수이며 동시에 양수가 되므로

$$\phi_1 = \lambda_1 + \lambda_2 = e^{\mu_1 d} + e^{\mu_2 d} > 0 \quad (34)$$

for real μ_1, μ_2 or λ_1, λ_2

부가 안정조건 식(33) 및 (34)를 만족하는 영역은 그림 2의 삼각형 내부의 빗금친 부분에 해당한다. 불안정조건(instability condition) 중 $\phi_2 < -1$ 은 $\alpha_1 < 0$ ($\zeta < 0$)에 해당하는 것으로 동적 불안정영역(dynamic instability region)이며 $\phi_1 + \phi_2 > 1$ 은 $\alpha_0 < 1$ 에 해당하는 것으로 정적 불안정영역(static instability region)이다. 그림 2에서의 $\phi_1^2 + 4\phi_2 = 0$ 으로 표시되는 포물선은 $\zeta = 1$ 인 임계감쇠(critically damped) 영역이 되고 $\alpha_1^2 - 4\alpha_0 = 0$ 을 만족하며 이 포물선의 아래는 $0 < \zeta < 1$ ($\alpha_1^2 - 4\alpha_0 < 0$)인 감쇠진동(under damped oscillation) 영역이다. 포물선 위상단의 빗금친 영역은 $\zeta > 1$ 인 과감쇠(over damped) 영역으로 지수함수적 특성을 갖게 된다. 이 때의 ($\phi_2 = 0, 0 \leq \phi_1 \leq 1$) 및 ($\phi_1^2 + 4\phi_2 = 0, -1 \leq \phi_1 < 0$)의 경계선은 안정성과는 관계없는 물리적인 시스템 AM(2, 1) 모형으로 부터의 자료를 샘플하게 됨에 따라서 발생하는 조건이 된다. 결론적으로 USAM(2, 1) 모형의 계수인 ϕ_1, ϕ_2 의 존재영역을 일반적인 이산 모형인 ARAM(2, 1) 모형의 계수 ϕ_1, ϕ_2 의 존재영역보다 작으며 VSAM(2, 1) 모형으로 부터의 ϕ_1 과 ϕ_2 는 b 과 무관하게 결정되며 θ_1 은 α_0, α_1 및 b_1 과 함수적인 관계에 있다.

3. 모형화 과정 (2.13, 16, 17)

균일시간간격으로 샘플된 자료로부터 USAM($n, n-1$) 모형을 결정하고 다시 이로부터 AM(n, m) 모형을 구하는 과정은 다음과 같다. 먼저 USAM($n, n-1$)의 차수 n 을 점차적으로 증가시키면서 통계학적으로 적합한 모형으로 근사될 때까지 모형화 과정을 계속한다. 차수 m 은 영에 가까워지는 최종 b_i 계수를 참조하여 결정하고, 실제적으로는 n 을 2씩 증가시키는 것이 효율적인데 이는 n 의 차수가 2씩 증가하는 것은 진동계의 모우드 즉 자유도가 1씩 증가되는

것과 같기 때문이다. 따라서 USAM($2n, 2n-1$) 모형에서 $n=1, 2, \dots$ 의 차수 증가를 고려하는 것이 효과적이다. N 개의 샘플된 이산 자료에 대해서 각 차수에 대한 USAM($n, n-1$) 모형이 설정되면 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ 및 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}$ 과 동시에 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 및 b_1, b_2, \dots, b_m 등이 비선형최소자승법에 의해 a_i 의 자승합을 최소화하도록 정해진다. 이 때의 각 계수에 대한 초기 예측치는 2.4 절에서 기술한 역함수의 예측치로부터 산출해낸다.

차수가 증가하면 대체로 a_i 의 최소자승합이 감소하게 되는데 최적차수의 결정은 증가된 계수의 수에 대한 a_i 의 최소자승합의 감소가 통계학적으로 중시(significant)되는가의 여부를 조사하거나 결정된 계수중 마지막 계수가 영에 가까운지의 여부로부터 결정한다. 만약 USAM($n, n-1$)의 결정된 계수 중 θ_{n-1} 의 예를 들어, 95% 신뢰도 구간이 영을 포함하고 θ_{n-2} 는 영으로부터 멀다면 USAM($n, n-2$) 모형이 USAM($n, n-1$) 모형을 대체하게 된다. a_i 의 최소자승합의 차수증가에 따른 감소의 통계학적 중시도는 F -기준에 의하게 되는데, F -기준은 (4, 15)

$$F = \frac{(A_1 - A_0)(N-r)}{s \cdot A_0} \quad (35)$$

여기에서

A_0 : 차수가 증가된 모형에서의 a_i 의 자승합

A_1 : 차수가 증가되기 전의 모형에서의 a_i 의 자승합

r : 차수가 증가된 모형에서의 계수의 수

s : 차수의 증가로 인한 계수의 증가

N : 자료의 개수

$F(s, N-r)$ 은 s 와 $(N-r)$ 의 자유도(degree-of freedom)를 갖는 F -분포라고 불리우며 계산된 F 값이 소정(대개 95%)의 확률도(probability level)에서의 F 분포표의 값보다 크게되면 차수가 증가되기 전의 모형은 부적합하다고 판정되며 작게되면 차수가 증가되기 전의 모형이 적합하다고 판정한다. 전체적인 모형화 과정을 그림 3에 보였다.

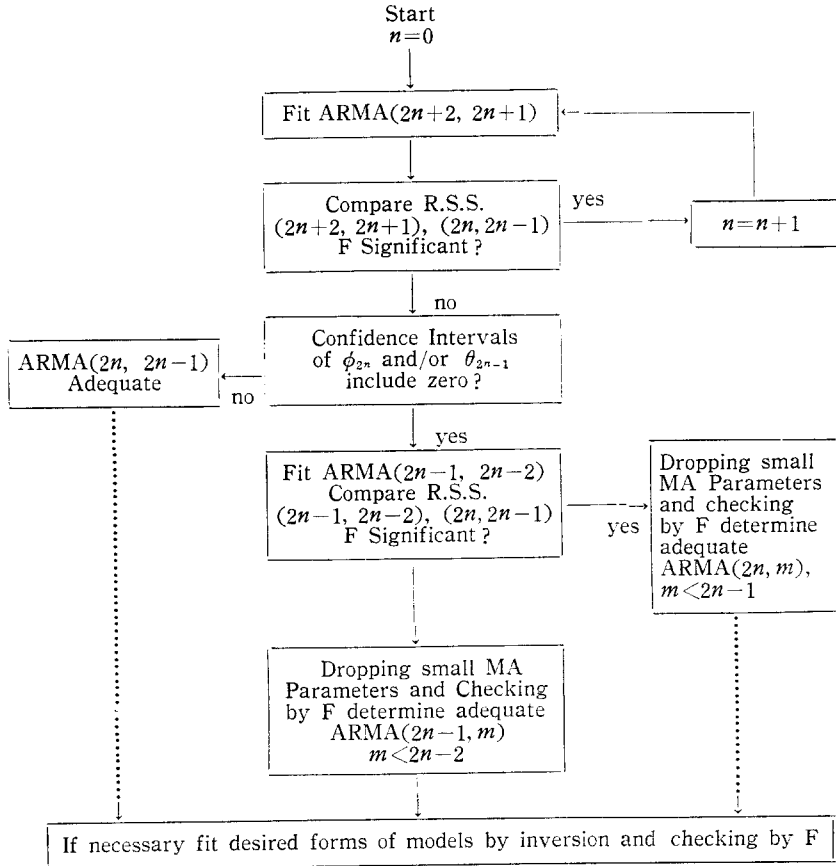


그림 3 모형화 과정의 흐름도

참 고 문 헌

1. Pandit, S.M., "Data Dependent Systems: Modeling Analysis and Optimal Control via Time Series," Ph. D. Thesis, University of Wisconsin, Madison, 1973.
2. Wu, S.M. and Pandit, S.M., Time Series and System Analysis: Modeling and Application, to be published
3. Box, G.P. and Jenkins, G.M., Time Series Analysis: Forecasting and Control, Holden-Day, 1970
4. Chatfield, C., The Analysis of Time Series: An Introduction, Chapman and Hall, 1975; 1980.
5. Wu, S.M., "Dynamic Data System: A New Modeling Approach," J. of Eng. for Industry, Trans ASME, Aug. 1977, p.708-713.
6. Pandit, S.M., "Analysis of Vibration Records by Data Dependent Systems," Shock and Vibration Bulletin, No. 47, 1977, p. 161-174.
7. Pandit, S.M., "Data Dependent Systems and Exponential Smoothing," Analysing Time Series (ed. by O.D. Anderson), North Holland Pub. Co., 1980, p.217-238.
8. Pandit, S.M., and Wu, S.M., "Unique Estimates of the Parameters of a Continuous Stationary Stochastic Process," Biometrika, 1975, pp.497-501.
9. Pandit, S.M. and Wu, S.M., "Exponential Smoothing as a Special Case of a Linear

(482 페이지 지에 계속)