

모멘트법에 의한 U형 傳送線의 特性임피던스 計算 (Calculation of Characteristic Impedance of the U-Type Transmission Line by the Moment Method)

李 相 高*
(Sang Seol Lee)

要 約

U形 傳送線의 特性임피던스는 有限差分법에 依해서도 計算될 수 있으나 이 研究에서는 모멘트법에 依하여 그의 特性 임피던스를 計算한다.

有限差分법에 依한 計算結果와 모멘트법에 依한 結果에는 10% 程度의 差가 存在한다. 그러나 内部導體가 外部導體의 中央에 있을 때 모멘트법에 依한 結果는 解析的인 方法에 依한 結果와 거의 一致된다.

Abstract

We can find the characteristic impedances of the U-type transmission lines by finite difference method. In this paper, the characteristic impedances of the lines are computed by the moment method.

There are 10% differences between the results of the finite difference method and those of the moment method. But when the interior conductor of the line is located at the center of the exterior conductor, the results of the moment method approach to that of analytical result when the length of outer conductor becomes in finite.

I. 序 論

U形 傳送線의 特性임피던스 特性은 샌드위치 안테나^[1, 2, 3]의 輻射特性을 解析하기 위하여, 또는 高周波 回路의 傳送特性을 解析하기 爲하여 必要하다.

그림 1은 U形 傳送線을 表示한다. 解析的으로 求할 수 없는 傳送線의 特性임피던스는 有限差分法으로도 計算할 수 있으나 Green과 Whitrow에 依한 結果를 보면 中心導體가 U形導體의 中央($x_s = a/2$)에 있을 때 解析的인 方法에 依한 結果와 約 10%의 誤差를 나타낸다.

이 研究에서는 傳送線의 外部導體를 여러 개의 작은 素子로 分割하여 모멘트法을 適用하므로써 中心導

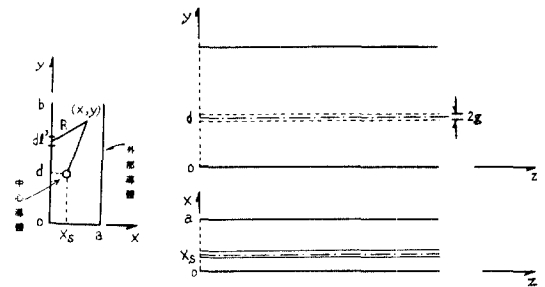


그림 1. U形 傳送線
Fig. 1. U-type transmission line.

體의 移動에 따른 傳送線의 特性임피던스 變化를 計算하여 Green과 Whitrow의 結果와 比較한다.

II. 傳送線 外部導體의 電荷分布에 關한 積分 方程式

無限이 긴 導線에 $q[m]$ 의 電荷가 分布되어 있을 때 導線에서 $R[m]$ 되는 點의 電位 $\psi(x, y)$ 는

$$\psi(x, y) = \frac{-q}{2\pi\epsilon_0} \int_n R + C, \quad (1)$$

* 正會員, 漢陽大學校 工科大學 電子通信工學科
(Dept. of Elec. Commun., Hanyang Univ.)

接受日字: 1982月 1月 28日

으로 된다. 여기서 C_1 은 어떤 基準點의 電位에 依하여 定해지는 常數이다. 따라서 그림 1에서 點(x, y)의 스칼라 포텐셜 $\phi(x, y)$ 는

$$\phi(x, y) = - \int_{\text{外部導體}} dl' \frac{\sigma(x', y')}{2\pi\epsilon_0} \ell_n R - \frac{\rho_0}{2\pi\epsilon_0} \ell_n \sqrt{(x-x_s)^2 + (y-d)^2} + C_2 \quad (2)$$

로 된다. 여기서

- ρ_0 : 内部導體 單位길이에 對한 電荷
- σ : 外部導體 單位面積에 對한 電荷
- C_2 : 어떤 基準點의 電位에 依하여 定해지는 常數
- R : $\sqrt{(x-x_s)^2 + (y-y')^2}$

x, y : 電界點의 座標

x', y' : 電荷點의 座標

를 表示한다. 傳送線 單位길이에 對하여 外部導體의 電荷를 ρ_L 이라 하면 $\rho_L = -\rho_0$ 이고, 外部導體의 電位를 V_E , 内部導體의 電位를 V_I 라 하면 外部導體面 위의 點에 對하여

$$V_E = - \int_{\text{外部導體}} dl' \frac{\sigma(x', y')}{2\pi\epsilon_0} \ell_n R + \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ell_n \sqrt{(x-x_s)^2 + (y-d)^2} + C_2 \quad (3)$$

의 關係가, 内部導體 위의 點에 對하여는

$$V_I = - \int_{\text{外部導體}} dl' \frac{\sigma(x', y')}{2\pi\epsilon_0} \ell_n R + \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ell_n g + C_2 \quad (4)$$

의 關係가 成立한다. 여기서 g 는 内部導體의 半徑이다.

III. 모멘트法の 適用

그림 2와 같이 傳送線 外部導體를 N 個의 작은 素子로 分割하여 分割素子 $\Delta \ell_n$ 내에서 電荷의 分布變化를 無視하고 外部導體의 電荷分布 $\sigma(x', y')$ 을 다음과 같이 無限數列로 表示한다.

$$\sigma(x', y') = \sum_{n=1}^N a_n f_n \quad (5)$$

여기서

$$f_n = \begin{cases} 1 & : \Delta \ell_n \text{ 위에서} \\ 0 & : \text{그밖에서} \end{cases} \quad (6)$$

이다.

(5)를 (3), (4)에 代入하면

$$V_E = - \int_{\text{外部導體}} dl' \frac{\ell_n R}{2\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^N a_n f_n + \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ell_n \sqrt{(x-x_s)^2 + (y-d)^2} + C_2$$

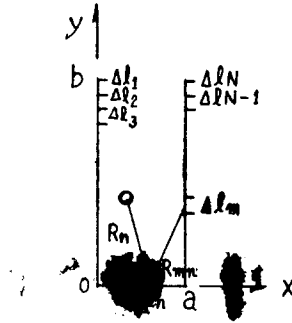


그림 2. 傳送線 外部導體의 分割

Fig. 2. Subdivision of interior conductor of transmission line.

$$\begin{aligned} & \cdot \ell_n \sqrt{(x-x_s)^2 + (y-d)^2} + C_2 \\ & = - \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \{ a_1 \int_{\Delta \ell_1} \ell_n R dl' + a_2 \int_{\Delta \ell_2} \ell_n R dl' \\ & \quad + \dots + a_n \int_{\Delta \ell_n} \ell_n R dl' \} + \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ell_n \sqrt{(x-x_s)^2 + (y-d)^2} + C_2 \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_I = & - \int_{\text{外部導體}} dl' \frac{\ell_n R}{2\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^N a_n f_n + \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ell_n g + C_2 \\ & = - \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \{ a_1 \int_{\Delta \ell_1} \ell_n R dl' + a_2 \int_{\Delta \ell_2} \ell_n R dl' \\ & \quad + \dots + a_n \int_{\Delta \ell_n} \ell_n R dl' \} + \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ell_n g + C_2 \quad (8) \end{aligned}$$

로 되고, 그림 2에서

$$R_{mn} = \sqrt{(x_m - x_n')^2 + (y_m - y_n')^2} \quad (9)$$

$$R_n = \sqrt{(x_s - x_n')^2 + (d - y_n')^2} \quad (10)$$

$$m, n = 1, 2, 3, \dots, N$$

$$n = 1, 2, 3, \dots, N$$

으로서 x_m, y_m 은 $\Delta \ell_m$ 위에 있는 點의 座標, x_n', y_n' 은 $\Delta \ell_n$ 위에 있는 點의 座標를 表示한다. (9), (10)을 (7), (8)에 對入하면

$$\begin{aligned} V_E = & - \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \{ a_1 \int_{\Delta \ell_1} \ell_n R_{m1} dl' + a_2 \int_{\Delta \ell_2} \ell_n R_{m2} dl' \\ & \quad + \dots + a_n \int_{\Delta \ell_n} \ell_n R_{mn} dl' \} \\ & + \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ell_n \sqrt{(x_m - x_s)^2 + (y_m - d)^2} + C_2 \quad (11) \end{aligned}$$

$$V_I = - \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \{ a_1 \int_{\Delta \ell_1} \ell_n R_1 dl' + a_2 \int_{\Delta \ell_2} \ell_n R_2 dl' \}$$

$$+ \alpha_N \int_{\Delta} \ell_N R_N d\ell' + \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ell_N g + C_2 \quad (12)$$

로 된다. 式을 簡單히 하기 爲하여

$$P_{mn} = \int_{\Delta} \ell_n \frac{\rho_n R_{mn}}{2\pi\epsilon_0} d\ell' \quad (13)$$

$$P_n = \int_{\Delta} \ell_n \frac{\rho_n R_n}{2\pi\epsilon_0} d\ell' \quad (14)$$

이라 하면 (11), (12)에서

$$V_E = - \sum_{n=1}^N P_{mn} \alpha_n + \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ell_n \sqrt{(x_m - x_s)^2 + (y_m - d)^2} + C_2 \quad (15)$$

$$V_I = - \sum_{n=1}^N P_n \alpha_n + \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ell_n g + C_2 \quad (16)$$

로 쓸 수 있다.

傳送線의 内部導體와 外部導體 間의 電位差 V

$$V = V_I - V_E$$

$$= \sum_{n=1}^N \alpha_n (P_{mn} - P_n) \cdot \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ell_n \left(\frac{g}{\sqrt{(x_m - x_s)^2 + (y_m - d)^2}} \right) \quad (17)$$

로 된다. 여기서 $\int_{\Delta} \sum_{n=1}^N \alpha_n \cdot \ell_n$ 이므로 (17)을 다시 쓰면 다음 式을 얻는다.

$$V = \sum_{n=1}^N \alpha_n \left\{ (P_{mn} - P_n) + \frac{\rho_L \ell_n}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ell_n \left(\frac{g}{\sqrt{(x_m - x_s)^2 + (y_m - d)^2}} \right) \right\} \quad (18)$$

(18)에서

$$\ell_{mn} = (P_{mn} - P_n) + \frac{\rho_L \ell_n}{2\pi\epsilon_0} \ell_n \cdot \left\{ \frac{g}{\sqrt{(x_m - x_s)^2 + (y_m - d)^2}} \right\} \quad (19)$$

라 놓으면

$$V = \sum_{n=1}^N \ell_{mn} \alpha_n \quad (20)$$

로 된다.

(20)에서 m, n 은 1에서 N 까지 變化하는 整数이므로 다음과 같이 行列關係式으로 쓸 수 있다.

$$[\ell_{mn}] \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \\ V \\ V \\ \vdots \\ V \end{pmatrix} \quad (21)$$

따라서

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix} = V [\ell_{mn}]^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (22)$$

로부터 行列 $[\alpha]$ 를 求할 수 있다. 또한 傳送線 單位 길이에 對한 커패시턴스 C 는 $C = \rho_L / V$ 이므로

$$C = \frac{1}{V} \sum_{n=1}^N \alpha_n \Delta \ell_n \quad (23)$$

로 되고, 各 分割素子의 長이를 간게 하여 $\Delta \ell_1 = \Delta \ell_2 = \Delta \ell_3 = \dots = \Delta \ell_N = \Delta \ell$ 로 하면

$$C = \Delta \ell \sum_{n=1}^N \alpha_n \quad (24)$$

으로 주어진다. 또 두 導體間의 電位差 V 는 任意로 選擇하여도 一般性을 잃지 않으므로 $V=1$ 로 하면

$$C = \Delta \ell \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \ell_{mn}^{-1} \quad (25)$$

로서 行列 $[\ell_{mn}]$ 을 求하면 傳送線 單位 길이에 對한 커패시턴스를 求할 수 있다. 또 傳送線의 損失을 無視할 때 傳送線 單位 길이에 對한 인덕턴스 L 및 特性 임피던스 Z_0 는 다음 式으로 求할 수 있다.

$$L = \mu_0 \epsilon_0 / C \quad (26)$$

$$Z_0 = \sqrt{L/C} \quad (27)$$

行列 $[\ell_{mn}]$ 을 計算하는 데 있어서 電界點 即, m 點을 $\Delta \ell_m$ 의 中心點으로 하면 $m=n$ 인 경우는 (13)에서

$$P_{mn} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{\Delta \ell_m} \ell_n x dx$$

$$= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \Delta \ell \left(\ell_n \frac{\Delta \ell}{2} - 1 \right) \quad (28)$$

또, $m \neq n$ 인 경우는 $\Delta \ell_n$ 중에서 R_{mn} , R_n 의 變化를 無視하여 다음과 같이 近似計算을 할 수 있다.

$$P_{mn} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{\Delta \ell_n} \ell_n R_{mn} d\ell' \approx \frac{\Delta \ell}{2\pi\epsilon_0} \ell_n R_{mn} \quad (29)$$

$$P_n = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{\Delta \ell_n} \ell_n R_n d\ell' \approx \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \Delta \ell \ell_n R_n \quad (30)$$

따라서 $m=n$ 일 때,

$$\ell_{mn} = \frac{\Delta \ell}{2\pi\epsilon_0} \left(\ell_n \frac{\Delta \ell}{2} - 1 \right) - \frac{\Delta \ell}{2\pi\epsilon_0} \ell_n R_n$$

$$+ \frac{\Delta \ell}{2\pi\epsilon_0} \ell_n \left[\frac{g}{\sqrt{(x_n - x_s)^2 + (y_n - d)^2}} \right],$$

$m \neq n$ 일 때,

$$\ell_{mn} = \frac{\Delta \ell}{2\pi\epsilon_0} \frac{R_{mn}}{R_n} + \frac{\Delta \ell}{2\pi\epsilon_0} \ell_n \frac{g}{\sqrt{(x_m - x_s)^2 + (y_m - d)^2}}$$

로 된다. 위 式을 整理하면

$$\ell_{mn} = \begin{cases} \frac{\Delta \ell}{2\pi\epsilon_0} \left[\ell_n \left(-\frac{y \Delta \ell}{2R_n^2} \right) - 1 \right]; & m=n \\ \frac{\Delta \ell}{2\pi\epsilon_0} \ell_n \left(\frac{g R_{mn}}{R_n R_m} \right); & m \neq n \end{cases} \quad (31)$$

를 얻는다.

IV. 計算結果

Green과 Whitrow의 計算結果와 比較하기 爲하여 傳送線의 寸수를 그림 1에서 표 1과 같이 定하고 外部

導體를 45個의 素子(a는 5個素子, b는 20個素子)로 分割하여 行列 $[\ell_{mn}]$ 을 計算하였다. 그림 1에서 x_s 는

$$x_s = \frac{a}{2} - \frac{h}{2J} (2S - 1) \quad (32)$$

$$S = 1, 2, 3 \dots J$$

로서 $J=12$, 即 12個의 點에 内部導體를 移動시켰을 때 特性임피던스의 變化를 計算하였다. 符録은 計算에 使用된 컴퓨터 프로그램이고 표 2는 傳送線 單位길이에 對한 커패시턴스, 인덕턴스 및 特性임피던스의 計算結果이다. 그림 3에서 A_1 은 모멘트法에 依한 計算結果이고, A_2 는 有限差分法에 依한 結果이다.

표 1. 傳送線의 寸수

Table 1. Dimension of transmission line.

a	b	d	g
12.7	50.8	12.7	0.8
單位 mm			

- a : 外部導體 밑변의 길이
- b : 外部導體의 높이
- d : 外部導體벽과 中心 導體間的 거리
- g : 中心導體의 半径

표 2. 傳送線 單位길이의 커패시턴스, 인덕턴스 및 特性임피던스

Table 2. Characteristic impedance, and capacitance and inductance per unit length of transmission line.

N	커패시턴스 (F/m) ($\times 10^{-14}$)	인덕턴스 (H/m) ($\times 10^{-10}$)	Z_0 (Ω)
1	1.541787	2.927530	137.79
2	1.556879	2.940152	137.42
3	1.588084	2.966292	136.67
4	1.637628	3.007919	135.53
5	1.709404	3.068507	133.98
6	1.809885	3.153923	132.01
7	1.949999	3.274256	129.58
8	2.149238	3.447941	126.66
9	2.445991	3.712338	123.19
10	2.929595	4.157407	119.13
11	3.886362	5.083527	114.37
12	9.620564	11.393430	108.82

그림 3에서 傳送線의 特性임피던스는 内部導體가 外部導體의 中央附近에 있을 때는 緩慢하게 變化하나, 外部導體壁에 接近할수록 急激히 減少하고 있다.

그림 3에서 두 方法에 依하여 計算된 結果는 全体

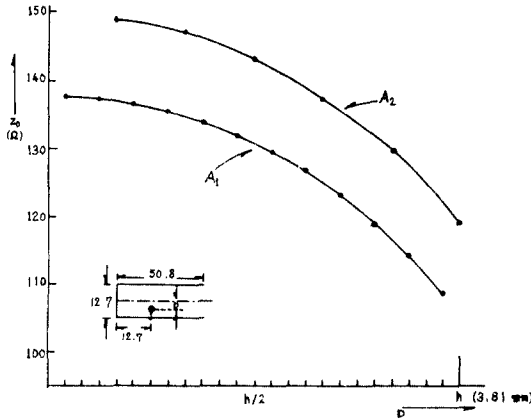


그림3. 傳送線 特性임피던스의 計算 結果 比較
Fig. 3. Comparison of characteristic impedance computed.

적으로 10% 程度의 差를 보이고 있다. 그림 4와 같이 内部導體가 U形 外部導體 中央에 있고 外部導體가 매우 寬을 때는 다음 式에 依하여 傳送線의 特性임피던스를 計算할 수 있다.

$$Z_0 = \frac{\eta}{2\pi} \ell_n \left[\frac{2}{\pi} \frac{a}{g} \tanh \frac{\pi d}{a} \right] \quad (33)$$

여기서 η 는 媒質의 固有임피던스이다.

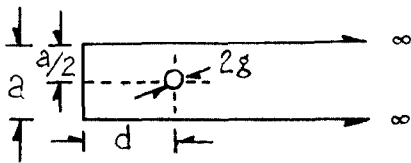


그림4. 内部導體가 中央에 있는 傳送線
Fig. 4. Transmission line whose interior conductor is located at the center of its exterior conductor.

표 3은 内部導體가 外部導體 中央에 있을 때 모멘트 法에 依하여 計算된 結果와 (33)에 依한 結果를 比較 하고 있다.

표 3. 内部導體가 外部導體의 中央에 있을 때 計算된 特性임피던스

Table 3. Characteristic impedance of the line whose interior conductor is located at the center of it's exterior conductor.

$Z_0 (\Omega)$		誤差(%)
(4.2)式에 依한 計算值	모멘트法에 依한 結果	
138.566	137.797	-0.55

V. 結 論

모멘트法을 適用하므로써 任意 形態의 傳送線 特性 임피던스를 計算할 수 있다.

모멘트法에 依한 計算結果와 有限差分法에 依한 計算結果 사이에는 全般的으로 約10%의 差가 存在한다. 그러나 内部導體가 U形 外部導體의 中央에 있을 때 모멘트法에 依한 計算結果는 解析的인 方法에 依한 結果와 거의 一致된다.

U形 傳送線의 特性임피던스는 内部導體가 外部導體의 中央 附近에 있을 때는 緩慢하게 變化하나 外部導體壁에 接近할수록 急히 減少한다.

參 考 文 獻

- [1] W. ROTMAN and N. KARAS, Sandwich-Wire Antenna Design, AFCRC-TR-59-103, ASTIA Doc. n° AD 160764, Dec. 1958.
- [2] J. A. Mc DONOUGH, R. G. MALECH, J. KOWALSKY, Recent Developments in the Study of Printed Antennas, IRE Nat. Conv. Rec., part 1, 173-176, Mar. 1957.
- [3] K. M. CHEN, "Sandwich-Wire Antenna, IRE Trans., Ap. 10, 159-164, Mar. 1962.
- [4] H. E. GREEN and J. L. WHITROW, A New Analysis of the Sandwich-Wire Antenna, IEEE Trans., Ap. 19, no. 5 600-605, Sep. 1971.
- [5] R. F. HARRINGTON, Field Computation by Moment Methods, Chap. 1, 2, 7, McMillan Co, New York, 1968
- [6] R. F. HARRINGTON, Time Harmonic Electromagnetic Fields, Chap. 2, 8. McGraw-Hill, New York, 1961.

부록: 컴퓨터 프로그래밍

```

C
C
C CALCUL DE LA CAPACITANCE ET L'INDUCTANCE
C
  IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
  REAL*8 LMN(45, 45), X(45), Y(45), C(12), L(12), MC(25), ML(24)
  COMPLEX*16 TM(48,48), AA, U, UU, V, VOK, VAP, VMP, ALP
  P = 3.14159265D0
  E = 8.854D-12
  H = 1.5D-3
  A = 7.D-3
  B = 28.D-3
  D = 7.681672424D-3
  R = 0.5D-3
  DL = A/5.D0
  K = 12
  RK = 12.D0
  WRITE(6, 201)
  N = 0
11 N = N + 1
  XS = A/2.D0-H*DSIN(P*(2*N-1)/4.D0/RK)
  DO 14 I = 1, 45
  IF (I.LE.20) GO TO 12
  IF (I.GT.20.AND.I.LE.25) GO TO 13
  X(I) = A
  Y(I) = (I-25.5D0) * DL
  GO TO 14
12 X(I) = 0.D0
  Y(I) = B + (0.5D0 - I) * DL
  GO TO 14
13 X(I) = (I - 20.5D0) * DL
  Y(I) = 0.D0
14 CONTINUE
  DO 16 I = 1,45
  DO 16 J = 1,45
  IF (I.EQ.J) GO TO 15
  LMN(I,J) = DL*LOG(DSQRT((X(I) - X(J))**2+ (Y(I) - Y(J))**2)*H
1 /DSQRT((X(I)-XS)**2+(Y(I)-D)**2)/DSQRT((X(J)-XS)
2 **2+(Y(J)-D)**2))*DL
  GO TO 16
15 LMN(I,I) = DL * (LOG(0.5D0 * DL * R/((X(I)-XS)**2+(Y(I)-D)**2))
1 -1.D0)
16 CONTINUE
  CALL ZIMAT(LMN, 45, IK)
  CS(0) = 0.D0
  DO 17 I = 1,45
  DO 17 J = 1,45
  CS(0) = CS(0) + LMN(I,J) * 2.D0 * P * E * DL
17 CONTINUE
  C(N) = DABS(CS(0))
  L(N) = 1.0D-16 / 9.D0 / C(N)
  WRITE (6, 202) N, C(N), L(N)
  IF (N.LT.K) GOTO 11
201 FORMAT (1H1, 9X, 'N', 10X, 'CAPACITANCE', 10X, 'INDUCTANCE' / )
202 FORMAT (111, 6X, 1PD15.6, 5X, 1PD15.6 )

```

C