퍼터베이션 方法을 利用한 랜덤 파라미터 시스템의 統計的 解析

(Statistical Analysis of Random Parameter Systems with Perturbation Method)

金 泳 均*

(Young Kyun Kim)

要 約

本 論文에서는 랜덤 파라미터를 포함하는 線型 시스템의 實際 解析에 perturbation 理論의 應用을 보이고 있다.

시스템의 出力의 통계치가 시스템의 파라미터와 入力의 통계치들에 의해 (perturb된 線型 연산자 방정식에 의해) 구해졌고, perturb된 state 변환 매트릭스도 유도되었다.

간단한 一次, 二次 線型 시스템 모델을 가지고, 正確한 解와 perturbation 結果사이의 正確度가 比較되어 졌고 perturbation series의 수렴도도 조사되어 졌다.

Abstract

This paper reviews and describes some applications of perturbation theory in the practical analysis of linear systems which involve random parameters.

Statistical measures of the system outputs are derived in terms of statistical measures of the system parameters and inputs (i. e., in the way of perturbed linear operator equations). Perturbed state transition matrix is also derived. With simple first-order and second-order linear system models, we compare the accuracy of perturbation results with the exact ones. And the convergence of perturbation series is also investigated.

I. 序 論

實際 많은 物理的 現象이나 시스템을 모델化 하는 데 있어 "랜덤" 파라미터 개념을 방정식에 適用함은 필수적이고 有用하다. 우리는 많은 시스템의 경우, 그 파라미터들을 測定하기 어렵거나 혹은 不可能한 경우들을 接하게 된다.

例로, 大量 生産되는 電子部品의 경우, 모든 部品들의 定數値를 實際로 測定하기는 매우 어렵다. 따라서, 그대신 우리는 實質的인 어떤 公差 (tolerance) (例로 5%)를 준다. 항공기의 "Bending mode" 시스템도 하나의 좋은 例이다. 이러한 시스템들에 대해, 우리는 合理的으로 그 파라미터들을 어떠한 確率 分布를 갖는 랜덤 變数들로 생각할 수 있다. 랜덤 시스템 방정식의 解를 規定함에 있어, 우리는 대개 종속 變数의 통계적인 表現, 즉 통계적 平均 또는 共分散(covariances)을 意味하게 된다. 이러한 관점에서, 잘 알려져 있으면서도 看過치 못할 事實이 있다. 平均된 방정식의 解는 바람직한 結果를 주지 않을 경우가 있다는 것이다.

연산자 방정식 $Lx = U$에 있어서, (여기서 L은 線型 연산자이다.) 그 통계적 기대치는

$$\langle Lx \rangle \neq \langle L \rangle \langle x \rangle \tag{1}$$

일때도 있다.

* 正會員, 韓國科學技術院 電氣 및 電子工學科
(Dept. of Electrical Science, KAIST)
接受日字 : 1981年 7月 30日

그 이유는 연산자와 종속 變数 x가 獨立的이 아닐 때가 있기 때문이다. 따라서

$$\langle x\rangle \neq \langle L\rangle^{-1}\langle u\rangle \tag{2}$$

일때도 있다.

만일 L과 U가 獨立的이라면 (이는 實際로 좋은 假定이다.)

$$\langle x\rangle = \langle L^{-1}\rangle\langle u\rangle \tag{3}$$

이다.

式 (3)은 式 (2)와는 달리 랜덤 매트릭스의 逆을 內包하고 있으며, 이 경우 一般的으로 正確한 解는 一次式에만 可能하다. 그 동안 이 近似解를 求하기 위한 많은 方法들이 硏究되어졌고[2], 大部分이 perturbation 理解에 관련, 또는 의거되고 있다. Perturbation 理論을 random연산자 방정식에 應用함은 Keller[1], Adomian[2] 그리고 많은 學者들에 의해 연구 되어졌지만 實際的인 엔지니어링 개념이 좀 결여되어 있는 것 같다. 그中 가장 強力한 近似解 技法인 perturbation方法은 랜덤 파라미터의 변이(variation)가 미약하거나 작은 경우에 適用될 수 있지만, 實際的으로 많은 物理的 現象에서 이 랜덤 파라미터의 개념이 적용되고 있어 그 重要性이 높다 하겠다.

Ⅱ. Perturb 된 線型 연산자 방정식[3]

연산자 방정식, $Lx=u$에 있어, L은 deterministic 연산자 部分L_0 와 比較的 작은 랜덤 perturbation 으로 되어있다고 假定한다. Perturbation 理論을 利用, L을 작은 변수 ε에 관해 power series로 전개하면

$$L = L_0 + \varepsilon L_1 + \varepsilon^2 L_2 + \cdots\cdots\cdots \tag{4}$$

이 된다. 여기에 함수의 連續性을 假定하면, x에 대해서도 작은 perturbation을 줄 수 있어 같은 전개를 할 수 있다.[3]

$$[L_0+\varepsilon L_1+\varepsilon^2 L_2+\cdots][x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2 x_2+\cdots] = u \tag{5}$$

式 (5)에서 같은 ε의 power에 관해 파라미터들을 정리하면

$$\left.\begin{array}{l} L_0 x_0 = u \ \text{(perturb안된 방정식)} \\ L_1 x_0 + L_0 x_1 = 0 \\ L_2 x_0 + L_1 x_1 + L_0 x_2 = 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}\right\} \tag{6}$$

이 되고 이 방정식들을 x_1, x_2, …에 관해 풀면 perturb된 x는 二次까지 보았을 때 다음과 같이 된다.

$$x = [I - \varepsilon L_0^{-1} L_1 + \varepsilon^2 L_0^{-1}[L_1 L_0^{-1} L_1 - L_2] + \cdots + \cdots] L_0^{-1} u \tag{7}$$

여기서 우리는 u와 L이 통계적으로 서로 獨立이라고 假定하고 L_1, L_2, …의 기대치들을 다 零이라고 假定하면 (實際 시스템에 있어, 零이 아닌 이들 平均値들은 보통 L_0에 묶어 생각하게 된다.) 여기에 x의 기대치는 式(3)에 의하여 정리하면

$$\langle x\rangle = [I + \varepsilon^2 L_0^{-1}\langle L_1 L_0^{-1} L_1\rangle + \cdots] L_0^{-1}\langle u\rangle \tag{8}$$

이 된다.

여기서 Adomian[2] 의 지적에 의하면, 逆을 求해야 할 唯一한 매트릭스는 perturbation에 無關한 derterministic연산자 L_0이다.

우리는 또한 autocorrelation 매트릭스$\langle xx^+\rangle$의 perturbation 전개도 求할 수 있다. 여기서 x^+는 x의 Hermetian adjoint complex conjugate이다. Autocorrelation 매트릭스, R_{xx}는

$$R_{xx} \triangleq \langle xx^+\rangle = \langle x_0 x_0^+ + \varepsilon[x_0 x_1^+ + x_1 x_0^+] + \varepsilon^2[x_0 x_2^+ + x_1 x_1^+ + x_2 x_0^+] + \cdots\rangle \tag{9}$$

이 되고,

$$\langle x_0 x_0^+\rangle = \langle L^{-1} uu^+ L_0^{-1+}\rangle = L_0^{-1}\langle uu^+\rangle L_0^{-1+} \tag{10}$$

이므로 入力 백터 autocorrelation 매트릭스 $R_{ii} \triangleq \langle uu^+\rangle$ 라 하고, L과 u가 서로 獨立的이고 $\langle L_1\rangle = \langle L_2\rangle = \cdots = 0$ 라고 假定하면 式 (9)는 아래와 같이 된다.

$$R_{xx} = L_0^{-1} R_{ii} L_0^{-1+} + \varepsilon^2[P + P^+ + L_0^{-1}\langle L_1 L_0^{-1} uu^+ L_0^{-1+} L_1^+\rangle L_0^{-1+}] + \cdots \tag{11}$$

여기서 $P \triangleq L_0^{-1}\langle L_1 L_0^{-1} L_1\rangle L_0^{-1} R_{ii} L_0^{-1+}$ (12)

式 (11)과 式 (12)에서 보면, R_{xx}를 求하는데 L_1과 u의 二次 통계치 ($\langle L_1 L_0^{-1} L_1\rangle$과 R_{ii})들이 쓰여짐을 알 수 있다.

Ⅲ. 線型 미분 시스템에의 應用

線型 미분 시스템

$$\dot{x} + Ax = Bu \tag{13}$$

에서 매트릭스 A는 포함하는 랜덤 파라미터들의 性格에 따라 時不変 또는 時変 매트릭스로 假定한다. 公稱値의 매트릭스 A_0에 대한 랜덤 perturbation 이 작다고 假定하면 다음과 같이 될 수 있다.

$$A = A_0 + \varepsilon A_1 \tag{14}$$

여기서 A_0 는 안다고 假定했고 A_1는 랜덤 매트릭스

이다. 따라서 perturb 된 연산자는 이 경우

$$L = L_0 + \epsilon L_1 \tag{15}$$

이 되고 여기서

$$L_0 = I\frac{d}{dt} + A_0 \tag{16}$$

$$L_1 = A_1 \tag{17}$$

이 된다. Perturb 안된 연산자 L_0는 다음과 같은 積分形으로 쓸 수 있고,

$$L_0^{-1}(t,\tau) = \int_{-\infty}^{t} \phi_0(t,\tau) \quad d\tau \tag{18}$$

여기서 ϕ_0는 perturb 안된 시스템의 state 변환 매트릭스이다. A가 時不変이면 다음 式과 같이 된다.

$$L_0^{-1}(t,\tau) = \int_{-\infty}^{t} e^{-A_0(t-\tau)} \text{——} d\tau \tag{19}$$

이제 式 (8)을 적절히 쓰면

$$\langle x(t) \rangle = x_0(t) + \epsilon^2 L_0^{-1}(t,\tau)\langle L_1 L_0^{-1}(\tau,\beta) L_1\rangle x_0(\beta) + \cdots\cdots \tag{20}$$

이 되고, 여기서 $x_0(t) = L_0^{-1}(t,\tau)\langle B(\tau)\rangle\langle u(z)\rangle$이다. 그리고 $x(t)$는 實 스칼라 量이므로 perturb된 auto-correlation 매트릭스의 式(11)을 적용하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} R_{xx}(t_1, t_2) &= x_0(t_1)x_0(t_2) \\ &+ \epsilon^2\langle L_1^2\rangle[L_0^{-1}(t_1,\tau)L_0^{-1}(\tau,\beta)x_0(\beta)x_0(t_2) \\ &+ L_0^{-1}(t_2,\tau)L_0^{-1}(\tau,\beta)x_0(\beta)x_0(t_1) \\ &+ [L_0^{-1}(t_1,\tau)x_0(\tau)][L_0^{-1}(t_2,\tau)x_0(\tau)]] \\ &+ \cdots\cdots \end{aligned} \tag{21}$$

이 perturbation 方法에 의한 解는 perturb 안된 연산자가 時變이거나, perturbation이 랜덤變數가 아닌 랜덤 프로세스에 의한 경우에도 適用시킬 수 있다. 첫째 경우는, 時變 시스템 매트릭스에 대하여 적절한 perturb 안된 逆 연산자(또는 적절한 state 변환 매트릭스 $\phi_0(t,\tau)$를 求하는게 唯一한 문제이고, 둘째 경우는, perturbation이 랜덤 프로세스이므로 時積分에서 그 개념 그대로 다루어져야 한다. 例로 $L_1(t,\alpha)$를 랜덤 프로세스 라 하고, 確率分布 $P(\alpha)$를 안다고 하자. 그러면 式 (20)에서 기대치가 취해지는 部分은

$\langle L_1(\tau,\alpha)L_0^{-1}(\tau,\beta)L_1(\beta,\alpha)x_0(\beta)\rangle$ 로 되며 랜덤變數 α에 관해 기대치로 表現된다. 따라서 이 두 가지 경우, 물론 解들은 좀 복잡하여졌지만, 새로운 理論上의 어려움은 하나도 찾아 볼 수 없다.

Perturb된 State 변환 매트릭스

線型 미분 시스템

$$\dot{x}(t) + A(t)x(t) = u(t) \tag{22}$$

에서 그 解는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} \phi(t,\tau)u(\tau)d\tau \tag{23}$$

여기서 만일 시스템 매트릭스(A)가 랜덤이면 (random 變數 또는 랜덤 프로세스에 의존하는), state 변환 또한 매트릭스도 랜덤이다. 前과 같이 時積分과 통계적 기대치를 구하는 과정이 서로 교환될 수 있다고 보고, L과 u가 서로 獨立的이라고 가정하면

$$\langle x(t)\rangle = \int_{-\infty}^{t} \langle \phi(t,\tau)\rangle\langle u(\tau)\rangle d\tau \tag{24}$$

이 되고

$$R_{xx}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{t_1}\int_{-\infty}^{t_2} \langle \phi(t_1,\tau_1)\phi^{+}(t_2,\tau_2)\rangle R_{ii}(\tau_1,\tau_2)\ d\tau_1 d\tau_2 \tag{25}$$

이 된다.

여기서 state 벡터의 모멘트들이 직접 같은 차수의 랜덤 state 변환 매트릭스의 모멘트들로 表現됨을 알 수 있다.

그리고 이 state 변환 매트릭스의 모멘트를 求하는데도 랜덤 매트릭스의 逆을 求해야 하는 어려움이 있다. 만일 연산자의 랜덤 成分이 작다면, 여기에도 perturbation 方法은 다시 適用된다.

$$\int_{-\infty}^{t} \phi(t,\lambda)\delta(\tau,\lambda)I d\lambda = \phi(t,\tau) \quad (\tau \leq t) \tag{26}$$

이므로 state 변환 매트릭스는 다음 式의 解로 求해진다.

$$L\phi(t,\tau) = \delta(t-\tau)I \tag{27}$$

시스템 매트릭스 A가 時不變이고 $u(t)$가 랜덤인 경우를 假定하면, state 변환 매트릭스는

$\phi(t,\tau) = \phi(t-\tau) = e^{-A(t-\tau)}$ 이고, 따라서 $\langle \phi(t-z)\rangle$를 찾기 위해서는 다음 式을 求함으로 充分하다.

$$\langle \phi(t)\rangle = e^{At}$$

이제 $\phi(t)$에 대한 式을 관찰해 보자.

$$L\phi(t) = \dot{\phi}(t) + A\phi(t) = \delta(t)I \tag{28}$$

$A = A_0 + \epsilon A_1$이라 놓고, perturb 안된 解를 求하면

$$\phi_0(t) = e^{-A_0 t} \tag{29}$$

이 되고, 그 逆연산자는 다음과 같다.

$$L_0^{-1}(t,\lambda)=\int_{-\infty}^{t} e^{-A_0}(t-\lambda)\text{——}\,d\lambda \tag{30}$$

前과 同一하게 perturbation 表現을 쓰면

$$\langle\phi(t)\rangle=e^{-A_0t}+\varepsilon^2\int_{-\infty}^{t} e^{-A_0(t-\lambda)}\int_{\infty}^{\lambda}\langle A_1e^{-A_0(\lambda-\beta)}A_1\rangle e^{-A_0\beta}d\beta d\lambda+\cdots \tag{31}$$

이 된다.

Ⅳ. 数値的인 實驗

간단한 一次, 二次 線型 시스템 모델들을 가지고, 正確한 解에 比한 perturbation方法의 解의 正確度를 조사하였다. 安定性과 수렴을 생각하여 파라미터의 변이는 한정된 영역내에 있다고 보고 미지의 변수에 대한 確率分布는 안다고 假定했다.

一次 線型 시스템

그림 1에 간단한 一次 RL回路를 나타내었다.

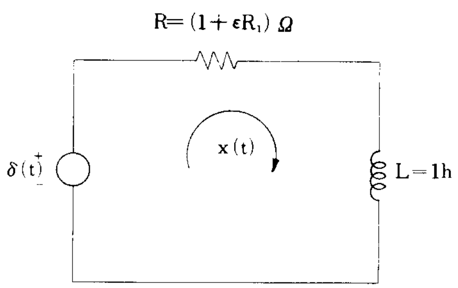

그림1. RL回路
Fig. 1. RL circuit.

여기서 저항 R의 成分中 랜덤部分인 R_1은 均一分布(−1, +1)인 變数로 假定하면 그 평균치는

$\langle R_1\rangle=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}R_1dR_1=0$ 이고 평균 자승치는

$\langle R_1^2\rangle=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}R_1^2dR_1=\frac{1}{3}$ 이 된다.

전압은 델타 入力을 假定하고 전류 $x(t)$에 관한 一次 미분 방정식을 세우면 다음과 같다.

$$\text{모델}: \dot{x}(t)+[1+\varepsilon R_1]x(t)=\delta(t) \tag{32}$$

여기서 ε은 0.1로 놓자. 델타 함수에 의한 초기 조건 $x(o^+)=1$ 이고, $t>0$에서 式은 homogeneous 하므로, 이 경우 perturb 안된 解는

$$x_o(t)=e^{-t}\quad(t>0) \tag{33}$$

이고 式 (20)을 適用하면

$$\begin{aligned}\langle x(t)\rangle&=e^{-t}+\varepsilon^2\int_0^t e^{-(t-\tau)}\langle R_1\int_0^\tau e^{-(\tau-\beta)}R_1\varepsilon^{-\beta}d\beta\rangle d\tau+\cdots\ (t>0)\\&=e^{-t}+0.01\langle R_1^2\rangle\int_0^t e^{-(t-\tau)}\int_0^\tau e^{-\tau}d\beta d\tau+\cdots(t>o)\\&=e^{-t}[1+\frac{0.01}{6}t^2]+\cdots(t>0)\end{aligned} \tag{34}$$

이 된다.

이 一次 시스템에 대한 正確한 解는 다음과 같이 求해진다.

$$\begin{aligned}\langle x(t)\rangle&=\int_0^1 x(t,R_1)dP[R_1]\\&=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}e^{-(1+0.1R_1)t}dR_1\\&=10\frac{e^{-t}}{t}\sinh(0.1t)\end{aligned} \tag{35}$$

이 경우, 正確한 解에 比한 perturbation 方法의 結果가 퍼센트 에러의 意味로 표 1에 나타나 있다.

표 1. 相對 퍼센트 에러(%)
Table 1. Relative percent error.

時間 (sec)	명목상의 解 (perturb안된)	Perturbation解 (둘째 項까지)
1	0.165725	0.000666
2	1.48430	0.000331
3	1.48430	0.006568
4	2.617116	0.020288

$$\text{相對퍼센트 에러}=\frac{|\text{正確解}-\text{Perturbation解}|}{\text{正確解}}\times100(\%)$$

표 1에서 볼 수 있듯이, 이 경우 둘째 項까지의 perturbation 結果가 명목상(perturb 안된)의 結果보다 더 正確하며 合理的인 선택임을 알 수 있다.

二次 線型 시스템

아래에 간단한 二次 homogeneous 시스템을 보인다.

$$\text{모델}: \dot{\underline{x}}=A\underline{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\-b & -a\end{bmatrix}\underline{x} \tag{36}$$

시스템 매트릭스 $A = A_0 + \varepsilon A_1$ 으로 놓고, A_0는 안다고 가정하고 A_1은 랜덤이라고 본다. 상수 a와 b에 대해 Gauss 分布를 假定한다. $a \sim N(3, \sigma^2)$ $b \sim N(2, \sigma^2)$ variances는 같게 놓았다. 초기 조건 $\underline{x}_0 = [1 \quad 0]^T$로 놓았다. 이 경우 perturbation 方法(式(31))을 適用하면 다음과 같이 state 변환 매트릭스가 구해지고 따라서 解($\langle \underline{x}(t) \rangle = \langle e^{At} \rangle \underline{x}_0(t)$)는 구해진다.

$$\langle e^{At} \rangle = e^{A_0 t} + \varepsilon^2 \int_0^t e^{A_0 (t-\tau)} \langle A_1 e^{A_0(\tau-\beta)} A_1 e^{A_0 \beta} d\beta \rangle d\tau$$

$$- \varepsilon^3 \int_0^t e^{A_0 (t-\tau)} \langle A_1 \int_0^\tau e^{A_0 (\tau-\beta)} A_1 \int_0^\beta e^{A_0(\beta-\gamma)} \cdot$$

$$A_1 e^{A_0 \gamma} d\beta d\gamma > d\tau \quad + \cdots\cdots \tag{37}$$

正確한 解를 求하기 위해 상수 a와 b에 대해 joint Gauss 分布를 假定한다.

$$f(a, b) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-r^2}} \exp \left[- \frac{(a-3)^2 - 2r(a-3)(b-2) + (b-2)^2}{2\sigma^2(1-r^2)} \right]$$

여기서 r은 correlation 상수이다. a와 b의 평균치 주변의 $\pm 3\sigma$ 범위의 값에 대해 合理的인 step size를 취하고 이에 Runge-Kutta subroutine을 適用한다.

$$\langle e^{At} \rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \left[e^{At} \right]_{ij} f(a_i, b_j) \triangle a_i \triangle b_j \tag{38}$$

比較 硏究에서, 처음에 $\sigma^2 = 0.1$이고 $r = 0.1$로 놓았다. 이 경우 合理的인 step size로 0.2를 잡았다. 그 理由는 simulation 결과, 더 좁은 step size 0.1인 경우에 比해 0.1% 内의 正確度 差 박에 안났기 때문이다. State x_1에 대한 正確한 解에 比한 pertuabation 結果들의 퍼센트 에러가 표 2에 나타나 있다.

表 2. 相對 퍼센트 에러(%) $r = 0.1$
Table 2. Relative percent error. $\sigma^2 = 0.1$

時間 (sec)	명 목 상 의 解 (perturb 안된)	Perturbation解 (둘째 項까지)	Perturbation解 (셋째 項까지)
1	0.0572	1.2125	0.2293
2	0.9388	3.5678	2.8736
3	6.2119	6.5651	6.5585

두번째로, $\sigma^2 = 1.0$이고 $r = 0.1$로 놓았다. 이 경우 step size는 0.4로 택했다. Simulation 結果, step size를 0.3으로 했을 때에 比해 0.15%內의 正確度 差 박에 안났기 때문이다. State x_1에 대한 perturbation 方法의 結果가 相對 퍼센트 에러로 표 3에 나타나 있다.

위의 두 가지 경우에서, variance가 작은 ($\sigma^2 = 0.1$) 경우의 perturbation 結果는 正確한 解에 比해 7% 미만의 에러를 보이며 近接함을 알 수 있으나, variance가 큰 ($\sigma^2 = 1.0$) 경우의 perturbation 結果는 매

表 3. 相對 퍼센트 에러(%) $r = 0.1$
Table 3. Relative percent error. $\sigma^2 = 1.0$

時間 (sec)	명 목 상 의 解 (perturb안된)	Perturbation解 (둘째 項까지)	Perturbation解 (셋째 項까지)
1	0.3547	11.9422	11.3773
2	10.4079	30.3500	30.3195
3	44.7680	30.4766	30.4512

우 不安定하고 信賴性이 없음을 볼 수 있다. 그 理由로는 perturbation series에서 variance를 포함하는 둘째 項이 커지기 때문이다. 따라서 perturbation 方法이 랜덤 파라미터의 변이가 미약한 경우에 合理的으로 適用 할 수 있음이 입증되었다. 또한 두 가지 경우에서, 둘째 項까지의 perturbation 結果에 比해 셋째 項까지의 perturbation 結果는 계산상의 복잡해짐을 감안할 때 거의 正確度의 利點이 없음을 알 수 있다.

V. 結 論

線型 시스템 解析 應用에 랜덤 연산자 방정식이 導入되었고, 랜덤 파라미터 시스템 解析에 있어 가장 근본적인 어려움 (랜덤 매트릭스의 逆을 求함)을 解決하는데 perturbation 方法의 有用함을 보였다. 實際 simulation 結果에서 보듯이, 파라미터들의 변이가 작을 경우, 둘째 項까지의 perturbation 結果는 계산의 복잡성과 正確度 面에서 合理的임을 보여 주었다.

계속적인 硏究課題로는 이 랜덤 파라미터 시스템에 대한 stability 解析을 생각할 수 있다.

부 록

Simulation Program ($\sigma^2=0.1$, r=0.1)

```
$JOB      DO,007,AD4180/KIM,TIME=0060,PAGES=0050
      EXTERNAL F
      DIMENSIONX(2),P11(999),S11(999),EP11(10),SUM(999,10)
      EP11(1)=0.
      EP11(2)=0.
      EP11(3)=0.
      Q=0.1
      N=1
      D=1.9
      DO 6 L=1,21
      D=D+0.1
      E=0.9
      DO 6 J=1,21
      E=E+0.1
      X(1)=1.
      X(2)=0.
      H=0.1
      HMX=1.
      S=-1.
      DO 9 I=1,3
      S=S+1.
      CALL RKF(S,X,2,F,1. ,H,HMX,1.E-6,0.0,IFLAG,D,E)
      P11(N)=X(1)
      CALL G(D,E,Q,C)
      S11(N)=P11(N)*C
      SUM(N,I)=S11(N)
      EP11(I)=EP11(I)+SUM(N,I)
    9 CONTINUE
      N=N+1
    6 CONTINUE
      WRITE(3,100)EP11(1),EP11(2),EP11(3)
  100 FORMAT(/6X,3E15.7,/)
      STOP
      END

      SUBROUTINE RKF(A,Y,N,F,DA,H,HMX,ABSERR,RELERR,IFLAG,D,E)
      DIMENSION Y(N)
      DIMENSION YTEMP(10),TEMP(10),R(10)
      REAL K1(10),K2(10),K3(10),K4(10),K5(10),K6(10)
      U=9.0E-7
      IF(RELERR.LT.0.0.OR.ABSERR.LT.0.0)GO TO 18
      IF(RELERR+ABSERR.EQ.0.0)GO TO 18
      IF(HMX.LE.0.0)GO TO 18
      B=A+DA
      IF(ABS(DA).LE.13.0*U*AMAX1(ABS(A),ABS(B)))GO TO 19
      HMAX=AMIN1(HMX,ABS(DA))
      IF(ABS(H).LE.13.0*U*ABS(A))H=HMAX
      KOUNT=0
      IADJUS=0
    3  H=SIGN(AMIN1(ABS(H),HMAX),DA)
      IF(ABS(B-A).GT.1.25*ABS(H))GO TO 4
      HKEEP=H
      IADJUS=1
      H=B-A
    4 CALL F(A,Y,K1,D,E)
      KOUNT=KOUNT+1
    5 CONTINUE
      DO 6 I=1,N
    6 YTEMP(I)=Y(I)+0.25*H*K1(I)
      ARG=A+0.25* H

      CALL F(ARG,YTEMP,K2,D,E)
      DO 7 I=1,N
    7 YTEMP(I)=Y(I)+H*(K1(I)*(3.0/32.0)+K2(I)*(9.0/32.0))
      ARG=A+H*(3.0/8.0)
       CALL F(ARG,YTEMP,K3,D,E)
       DO 8 I=1,N
    8 YTEMP(I)=Y(I)+H*(K1(I)*(1932.0/2197.0)-K2(I)*(7200.0/2197.0)
     1   +K3(I)*(7296.0/2197.0))
       ARG=A+H*(12.0/13.0)
      CALL F(ARG,YTEMP,K4,D,E)
      DO 9 I=1,N
    9 YTEMP(I)=Y(I)+H*(K1(I)*(439./216.)-8.*K2(I)
     1   +K3(I)*(3680.0/513.0)-K4(I)*(845.0/4104.0))
      ARG=A+H
      CALL F(ARG,YTEMP,K5,D,E)
      DO 10 I=1,N
   10  YTEMP(I)=Y(I)+H*(-K1(I)*(8./27.)+2.0*K2(I)-K3(I)*(3544./
     12565.)+K4(I)*(1859./4104.)-K5(I)*(11./40.))
      ARG=A+0.5*H
       CALL F(ARG,YTEMP,K6,D,E)
      DO 11 I=1,N
       TEMP(I)=K1(I)*(25./216.)+K3(I)*(1408./2565.)+K4(I)*
     1   (2197./4104.)-0.2*K5(I)
   11  YTEMP(I)=Y(I)+H*TEMP(I)
      DO 12 I=1,N
   12  R(I)=K1(I)/360.0-K3(I)*(128.0/4275.0)-K4(I)*(2197./75240.0)+
     1 K5(I)/50.0+K6(I)*(2./55.)
      RATIO=0.0
      DO 13 I=1,N
      TR=ABS(R(I))/(RELERR*ABS(YTEMP(I))+ABSERR)
   13  RATIO=AMAX1(RATIO,TR)
      IF(RATIO.GT.1.0)GO TO 15
      DO 14 I=1,N
   14  Y(I)=YTEMP(I)
       A=A+H
      IF(IADJUS.EQ.1)GO TO 16
      RATIO=AMAX1(RATIO,6.5536E-4)
   15 RATIO=AMIN1(RATIO,4096.0)
      H=0.8*H/SQRT(SQRT(RATIO))
      IF(ABS(H).LE.13.0*U*ABS(A))GO TO 19
      KOUNT=KOUNT+5
      IF(KOUNT.GE.2995)GO TO 17
       IF(RATIO.LE.1.0)GO TO 3
      IADJUS=0
      GO TO 5
   16 IFLAG=1
      H=HKEEP
      RETURN
   17 IFLAG=2
      RETURN
   18 IFLAG=3
      RETURN
   19 IFLAG=4
      RETURN
       END

        SUBROUTINE F(T,X,XP,D,E)
       DIMENSION X(2),XP(2)
       XP(1)=X(2)
      XP(2)=-E*X(1)-D*X(2)

      RETURN
       END

      SUBROUTINE G(D,E,Q,C)
      Y1=(2.*Q*(D-3.)*(E-2.)-(D-3.)**2-(E-2.)**2)/(0.2*(1.-Q*Q))
      C=0.0159155*EXP(Y1)/SQRT(1.-Q*Q)
       RETURN
      END
$DATA

0.5995951E 00  0.2548267E 00  0.1037338E 00
```

參 考 文 獻

[1] J. B. Keller, "Propagation through random media", *Proc. Symp. in Applied Math.*, vol.16, pp. 145-170, 1964.

[2] G. Adomian, "Random operator equations in mathematical physics", *Jour. of Math. Phys.*, vol. 11, no. 3, 1970.

[3] M Pease III, *Methods of Matrix Algebra.* Academic Press, N. Y., 1965.

[4] W. M. Wonham, "Random differential equations in control theory", *Probabilistic Methods in Applied Mathematics*, Academic Press, N.Y., vol. 3, 1973.

[5] O' Grady, E. Pearse, *Digital Computer Methods for Continuous System Simulation*. 4th Annual Pittsburgh Modelling & Simulation Conference, April 1973.