制限 帯域 랜덤 入力을 가진 線型 시스템의 디지탈 시뮬레이션

(Digital Simulation of Linear Systems with Bandlimited Random Inputs)

金 泳 均*

(Young Kyun Kim)

要 約

本 論文은 制限 帯域 랜덤 입력 신호를 가진 線型 시스템의 解析을 위한 효과적이고 통계적으로 정확한 技法을 발견, 比較 硏究하는 데 그 목적이 있다.

前 論文[2]에서 보인 truncated expansion 정확도를 이용한 새로운 state 變換 技法이 만들어졌고, 平均 自乗 에러 基準에 의거하여 技法들의 性能 比較 硏究가 一次, 二次 線型 시스템 모델들에 대해 수행되었다.

그 結果, 새로운 制限 帯域 state 變換 技法이 다른 技法들(一次 state 變換 技法 또는 Z-變換 技法)보다 더욱 효과적이고 통계적인 의미에서 정확함이 判明되었다.

Abstract

The purpose of this paper is to find and compare efficient and "statistically accurate" algorithms for linear systems with bandlimited random inputs. Using the previously investigated truncated expansion[2], a new state-transition algorithm is derived.

With statistical error criteria (mean-square error), comparative study on the performances has been done for the first and second-order linear system models. The results show that a new bandlimited state-transition algorithm works better than any commonly used algorithms (e.g., first-order state-transition method or Z-transform method).

I. 序 論

지난 수 십년간, 많은 시스템 엔지니어들이 시뮬레이션 技法 개발을 통해 시스템을 分析, 解決하려고 노력해 왔다.

근래에, Marten의 論文[1]에 의해 線型과 非線型 시스템의 시뮬레이션에 쓰이는 技法들간의 比較 硏究가 되어졌고, 그 結果에 따르면 線型 시스템의 경우, state 變換 技法이 가장 좋고, 非線型 시스템의 一般的인 시뮬레이션의 경우, 可變 step-size Runge-Kutta-Merson 技法이 가장 正確하고 效果的임이 알려졌다. 그러나 Marten의 結果를 包含한 과거의 技法 比較 硏究는 주로 初期 條件 反應이나 간단한 deterministic 入力(一例로, step入力)에 局限되어 왔다.

이에 反하여 本 論文에서 시스템의 入力은 랜덤하다(예로, a uniform bandlimited random process). 많은 시스템이 실제로 랜덤 入力 成分을 갖는다는 事實 以外에도 랜덤 入力의 假定은 다른 두 가지 利點을 가

* 正會員, 韓國科學技術院 電氣 및 電子工學科

(Dept. of Electrical Engineering KAIST)

接受日字 : 1981年 5月 15日

진다. 첫째로, 우리가 技法들의 比較 硏究의 근거로 代表的인 入力을 택할때 랜덤 入力은 어떠한 情報도 없는 경우, 합리적인 선택이다.

둘째로, 랜덤 入力은 통계적인 에러 基準을 사용케 한다(예로, 平均 自乘 에러).

따라서, 이 論文의 主 目的은 制限 帶域 랜덤 入力을 가진 線型 시스템에 있어, 효과적이고 통계적인 의미에서 正確한 技法을 발견, 比較 硏究하는데 있다.

前 論文[2]에서, 均一한 制限 帶域 stationary 入力에 관해 truncated sampling expansion의 正確度가 조사되어졌고, 실제 10~12個의 有限한 terms을 취하는 경우 線型 interpolation에 比해 80% 以上의 에러가 감소됨이 밝혀졌다.

第Ⅱ章에서는 線型 시스템의 解析에 적합한 시뮬레이션 技法들(一次 state 變換 技法, Z-變換 技法 그리고 制限 帶域 state 變換 技法)에 대한 說明이 있고, 第Ⅲ章에서, 一次 線型 시스템 모델들에 대해 平均 自乘 에러 基準에 의거하여 技法들의 性能 比較 硏究가 되어 진다.

Ⅱ. 시뮬레이션 技法들

Polynonial Interpolation에 의한 State 變換 技法

代表的인 시스템들에 대한 실험을 통하여 Marten의 結果[1]에 따르면 線型 시스템의 시뮬레이션에 있어 state 變換 技法이 가장 좋음이 알려졌다. 또한 다양한 polynomial interpolations의 통계적 에러 解析에서, 실제 시뮬레이션에 있어 一次 以上의 interpolation이 하나도 有益함이 없음이 밝혀졌다. 그 이유는, 次數가 증가할수록 시뮬레이션의 복잡도가 증가하기 때문이다. 따라서 polynomial interpolation에 있어, 一次 interpolation은 最適의 선택이다.

一次 State 變換 技法:

時不變 線型 시스템

$$x(t)=Ax(t)+Bf(t) \qquad (1)$$ 에서

다음과 같은 difference 방정식을 얻는다.

$$x((k+1)T)=e^{AT}x(kT)+[M_0\ M_1]\begin{bmatrix} f(kT) \\ f((k+1)T) \end{bmatrix} \qquad [1]\ (2)$$

여기서 $M_1=\frac{1}{T}A^{-1}[A^{-1}(e^{AT}-I)-TI]B$

$M_0=A^{-1}(e^{AT}-I)B-M_1$ 이다.

이 技法의 利點은 straight-line interpolation에 의해 state 방정식을 쉽게 시뮬레이트 할 수 있는 점외에 일단 入力벡터가 (approximate)되면, 다른 어떤 근사도 시뮬레이션 과정에서 포함되지 않는다는 것이다.

制限 帶域 State 變換 技法

前 論文[2]에서, 制限 帶域의 入力에 대해 truncated sampling expansion에 의한 interpolation이 기존의 straight-line interpolation에 比해 正確度面에서 상당히 개선됨을 보였다.

따라서 이 새로운 interpolation에 依해 우리는 制限 帶域 入力 시스템에 適合한 技法을 求할 수 있다.

線型 時不變 시스템

$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bf(t)$ 에서

$$x((k+1)T)=e^{AT}x(kT)+\int_{kT}^{(k+1)T}e^{A((k+1)T-t)}Bf(t)\,dt \qquad (3)$$

이고, 여기에 $\tau=t-kT$로 놓고 變數置換을 하면

$$x((k+1)T)=e^{AT}x(kT)+\int_0^T e^{A(T-\tau)}Bf(\tau+kT)\,d\tau \qquad (4)$$

이 된다. Sampling 理論에 의하면

$f(\tau+kT)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{n+k}\ \mathrm{sin\,c}\left(\frac{t}{T}-n\right)$ 이고, 여기에 合理的인 結果[2]인 10 terms truncated expansion으로 入力을 近接化 시킨 새로운 技法은 다음과 같다.

$$x(k+1)T=e^{AT}x(kT)+\sum_{n=-4}^{+5} f_{n+k}\left[\int_0^T e^{A(T-\tau)}\cdot B\ \mathrm{sin\,c}\left(\frac{\tau}{T}-n\right)d\tau\right] \qquad (5)$$

처음, 式(5)의 괄호안을 求하는데 Composite 法則을 利用했다.

Composite 法則

구간(a, b) 사이의 f(x)를 積分하기 위해, 구간을 더 작은 구간 $h=\frac{b-a}{N}$로 세분한 다음 積分法則에 依해 다음과 같이 된다.

$$I(f)=\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{i=1}^{N}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx$$

우리는 x_i를 等간격이라 假定하고($x_i=a+ih$, $i=0,\ldots\ldots N$) 여기에 N구간에 대해 composite rectangle 法則을 적용하면

$$I(f) \approx h\sum_{i=1}^{N} f_{i-1}$$ 이 된다.

이 Composite 法則에 의해 10개의 서로 다른 iteration에 있어, 각각의 이 積分值는 그것과 相應하는 標本 入力值와 곱해지고 그런 다음에 合이 이루어졌다.

Z-變換 技法 [4]

Papoulis는 制限帶域 入力시스템에 대해 Z-變換을 이용하여 디지탈 시뮬레이터를 構成하였다.

Impulse 反應 $h_a(t)$와 시스템 함수 $H_a(w)$를 갖는 任意의 한 시스템을 생각해 보자. 만일 入力이 制限帶域이면, 따라서 그 入力의 變換은

$$F(w) = 0 \qquad |w| > \sigma \tag{6}$$

이다. (여기서 σ는 single-sided 帶域幅)

아날로그 시스템에 대한 디지탈 시뮬레이터는 truncated 시스템 $H_\sigma(w) = H_a(w)P_\sigma(w)$ 의 impulse反應 $h_\sigma(t)$를 sampling 함에 의해 얻어진다.

만일 $H_a(w) = 0 \qquad |w| > \sigma \qquad (7)$

이면,

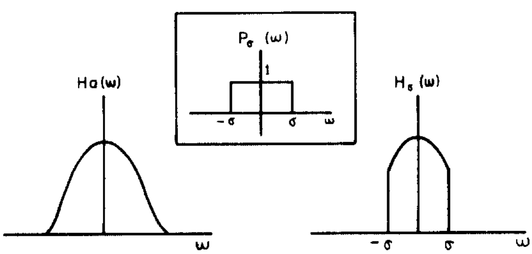

그림1. $H_a(\omega)$와 $H_\sigma(\omega)$

Fig.1. $H_a(\omega)$ and $H_\sigma(\omega)$.

$$h_a(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H_a(w)e^{jwt}\,dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma} H_a(w)$$

$$e^{jwt}\,dw = h_\sigma(t) \tag{8}$$

이 된다.

따라서, 시뮬레이션에서 $h_\sigma(t)$ 대신 $h_a(t)$를 sampling 한다. 방정식(7)은 Z-變換 技法에 있어 重要한 假定이며, 실제 應用에 있어 이 技法의 正確度를 制限시킨다.

Ⅲ. 技法들의 性能 比較 硏究

過去의 技法 比較 硏究[1]와는 달리 本 硏究에서 시스템 入力들은 랜덤하다. 實際로 많은 시스템들이 랜덤 入力 成分을 가지고 있는 事實 以外에도, 랜덤 入力 假定은 통계적인 에러 基準를 利用할 수 있게 한다.

本 硏究에서 택한 것은 平均 自乘 에러이고, inter-sampling點들에서의 "pseudo-true" state와 各 技法들에 의해 시뮬레이트 된 state 사이의 平均 自乘 에러가 조사되어졌다. 랜덤 入力은 制限帶域 Gaussian (平均이 0이고 variance가 1인)으로 假定하였고 IBM의 SSP(scientific subroutine package) 內의 Gauss subroutine에 의해 發生되었다.

"Pseudo-true" state를 求하기 위해 入力의 interpolation에 81-terms truncated expansion이 적용되었고, 10等分된 sampling구간 h (=T/10)에 대해 效果的인 一次 state 變換 技法이 利用되었다. "Pseudo-true" state를 구하는 技法을 式으로 表示하면 다음과 같다.

$$x[(k+1)T] = e^{AT}x(kT)$$

$$+ \sum_{n=1}^{10} e^{A(10-n)h}\,[M_0 \quad M_1]\begin{bmatrix} f(kT+(n-1)h) \\ f(kT+nh) \end{bmatrix}$$

여기서,

$$M_1 = \frac{1}{h}A^{-1}\,[A^{-1}(e^{Ah}-I)-hI]B$$

$$M_0 = A^{-1}(e^{Ah}-I)B - M_1$$

$$f(kT+(n-1)h) = \sum_{h=-40}^{+40} f_k \operatorname{sinc}\left(\frac{(n-1)h}{T}\right)$$

$$f(kT+nh) = \sum_{k=-40}^{+40} f_k \operatorname{sinc}\left(\frac{nh}{T}\right)$$

주로, 시스템 帶域幅을 入力 帶域幅과 같게 놓았고, 따라서 出力 反應에 대해서도 入力과 同一한 sampling 구간을 갖게 하였다.

一次와 二次 線型 시스템 모델들에 대해 上記한 技法들에 대한 性能이 比較되어 졌다. IBM-360에 依해 시뮬레이션이 수행되었고 FORTRAN이 利用되었다.

一次 시스템

모 델 : $x(t) = ax(t) + f(t)$ (9)

여기서 sampling 구간을 0.1로 했고, 따라서 入力帶域幅은 $B_f = 2\pi/0.1 = 20\pi$.

시스템 帶域幅의 定義에 의해 $a = -10\pi$로 구해졌고, 시스템 帶域幅은 入力의 帶域幅과 같게 놓았다. 이 경우 impulse 反應에 있어 exponential은 보통 5~6時間 常数가 지난 후에 고려될 수 있으므로, 여기에 [0.1, 5.0]을 시뮬레이션 구간으로 잡았다. 초기 state $x(0)$는 0 이다.

前에 規定한 技法들을 가지고 "pseudo-true" state 와 시뮬레이트된 state 사이의 平均 自乘 에러가 표1에 조사되어졌다.

표 1. 정규화된 平均 自乘에러(σ_x^2 의 %)

Table 1. Normalized mean squared errors in % of σ_x^2.

	First-order State-transition	Z-transform	Bandlimited State-transition
NMSE	0.3612132	3.284518	0.081415

線型 시스템에서

$$f(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow x(t)$$

出力 variance σ_x^2는 다음과 같이 계산된다.

$$\sigma_x^2 = \sigma_f^2 \int_0^\infty |h(t)|^2 dt$$

여기서 σ_f^2는 入力 variance이다.

표1에서 보이듯이 平均 自乘 에러 基準에서 制限帶域 state變換 技法이 가장 잘 수행되고 그 다음이 一次 state 變換 技法이고, 이 경우 Z-變換 技法은 수행 상태가 不良함을 알 수 있다.

二次 시스템

Over-damped 경우:

모 델: $\ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + bx(t) = f(t)$ (10)

이 경우 sampling구간을 0.1로 잡았다.

시스템 帶域幅의 定義에 의했고, 入力 帶域幅을 시스템 帶域幅과 같게 놓아 $a = (30+5\sqrt{5})\pi$와 $b = 150\sqrt{5}\pi$를 구했다. Impulse 反應 조사에 의해 平均 自乘 에러의 시뮬레이션 구간으로 [0.1, 5.0]를 잡았다.

이 over-damped 경우 표2에서 보이듯이, 制限 帶域 state 變換 技法이 가장 우수하고, 다음이 一次 state 變換技法이고, 이 경우도 Z-變換 技法은 매우 不良함을 알 수 있다.

표 2. 정규화된 平均 自乘 에러(σ_x^2 의 %)

Table 2. Normalized mean squared errors in % of σ_x^2.

	First-order State-transition	Z-transform	Bandlimited State-transition
NMSE	0.563064	4.226581	0.130855

Under-damped 경우:

모 델: $\ddot{x}(t) + \zeta\omega_0\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t)$

Sampling 구간을 0.1로 놓았고 damping constant $\zeta = 0.1$로 잡았다. 이 경우도 시스템 帶域幅을 入力의 帶域幅과 같게 놓아 $\omega_0 = 28.933$을 구했다. Impulse反應 조사 결과 平均 自乘 에러의 시뮬레이션 구간으로 [2.0, 7.0]을 잡았다.

표 3. 정규화된 平均 自乘 에러(σ_x^2 의 %)

Table 3. Normalized mean squared errors in % of σ_x^2.

	First-order State-transition	Z-transform	Bandlimited State-transition
NMSE	0.001656	0.001541	0.001393

이 under-damped경우는, 표3.에서 보이듯이, 制限帶域 state 變換 技法이 가장 좋고 그 다음으로 Z-變換 技法이 一次 state 變換 技法보다 통계적인 의미에서 조금 우세함을 볼 수 있다.

VI. 結 論

制限 帶域 랜덤 入力의 interpolation에 truncated sampling expansion의 이용은 새로운 디지탈 技法 - 制限帶域 state 變換 技法의 통계적 의미의 정확도를 개선하게 하였다. 平均 自乘 에러 基準에 의한 技法들의 性能 比較 研究는 一次, 二次 線型 시스템 모델들에 局限 되었지만 시뮬레이션 상의 복잡성만 感知한다면 쉽게 高次의 線型 시스템 모델들에도 수행될 수 있다. 比較 研究 結果에서 보인 바와 같이 새로운 制限 帶域 state 變換 技法은 制限 帶域 랜덤 入力을 가진 線型 시스템의 解析에 있어 가장 효과적이고도 통계적인 의미에서 정확한 技法이라고 볼 수 있다.

參 考 文 獻

[1] H. R. Marten, "A comparative study of digital integration methods", *Simulation*, vol. 12, no. 2, Feb. 1969.

[2] 金泳均, "협대역 海洋 시스템의 digital simulation", 電子工學會誌 第18巻 第2號 4月 1981年.

[3] R. B. Kerr, "Polynomial interpolation errors for bandlimited random signals", *IEEE Trans. on Sys., Men, & Cybern.* Nov. 1979.

[4] A. Papoulis, *Signal Analysis*. Mc Graw-Hill, 1977.