論文 82-19-4-1

線形 豫測을 위한 새로운 反射係数 推定 알고리즘

(A New Reflection Coefficient-Estimation Algorithm for Linear Prediction)

趙 基 元*, 金 秀 重**

(Ki Won Cho and Soo-Joong Kim)

要 約

래티스 公式에 기초를 두어 線形 豫測을 위한 새로운 알고리즘을 求하였다. 알고리즘의 출력은 all-pole모델의 安定度를 保障하는 反射係数이다. 매 豫測 段階에서 豫測 誤差의 共分散(covariance)을 循環的으로 계산하는 方程式이 誘導되었고 이 式을 계산하는 과정에서 豫測 係数에 관계없이 反射 係数를 推定하도록 하였다. 共分散 래티스(covariance-lattice) 방법과 비교하였을 때 새로운 알고리즘은 계산의 量을 약 반으로 줄였으며 豫測 次数가 높은 경우에 보다 効率的이 된다는 것을 설명하였다.

Abstract

A new algorithm, based upon a lattice formulation, is presented for linear prediction. The output of the algorithm is the reflection coefficients that guarantee the stability of the all-pole model. The equations are derived that compute the covariance of the residuals recursively at each prediction stage, and in processing of computing that eqations, the reflection coefficients are estimated without computing the predictor coefficients. Comparing with covariance-lattice method, it can be said that the new algorithm reduce the number of computations to about half and is more efficient for fitting of the high-order model.

I. 序 論

음성 신호의 線形 豫測的 解析을 위해 自己 相關關係(auto correlation) 방법과 自己分散(auto covariance) 방법[1]이 많이 利用되어 왔다. 前者는 maximum likelihood 推定理論[2]과 最小 自乘法[3]에 기초를 두어 각각 獨立的으로 誘導되었으며 all-pole 필터의 安定度를 이론적으로 保障한다. 그러나 處理될 신호에 窓函数(window function)를 곱하여야 하므로 스펙트럼 分解度를 減少시키며 실제로 FWL(finite word length) 계산을 하는 경우 반드시 安定度가 保障되는 것은 아니다. 한편 後者는 역시 最小 自乘法에 바탕을 둔 것으로서 음성 신호의 分析과 合成 문제에 最初로 應用되었으며[4] 신호가 窓函数를 지나지 않아도 되지만 반면에 浮動點 계산에서 필터의 安定度가 保障될 수 없는 缺點이 있다.

傳統的인 방법에 있어서의 이러한 문제점들은 래티스 公式[5]에 의해서, all-pole 필터의 安定度가 窓函数를 지나(windwing)지 않고도 保障될 수 있으며 FWL 계산을 하는 경우에도 安定度의 保障을 기대할

---

*準會員, **正會員, 慶北大學校 工科大學 電子工學科
(Dept. of Electronics, Kyungpook National Univ.)
接受日字：1982年 1月 15日

수 있게 됨으로서 해결되었다. 그러나 래티스 公式에 의한 필터 係數의 推定은 종래의 방법에 비해 4～5배나 많은 계산량을 요구한다. 共分散 래티스 방법은 래티스 公式을 最初로 提示하였을 때의 그러한 문제점을 개선시켜 래티스 公式의 장점을 유지하면서 自己相關 關係 및 自己 分散 방법에 比較될 만한 效率을 얻게 하였다.[6] 그러나 高次 모델에서는 非效率的이다.

이 論文에서는 래티스 公式에 기초를 두어 all-pole 모델의 安定度를 保障할 수 있는 파라메타를, 보다 效率的으로 推定하기 위한 새로운 알고리즘을 만들었다.

後向 豫測誤差와 前向 豫測誤差의 cross covariance와 自己 分散을 매 豫測 段階에서 循環的으로 계산하는 方程式이 誘導된다. 그러므로 이 式을 계산하는 과정에서 豫測 係數에 관계없이 反射 係數를 推定하도록 하여 래티스 公式에 기초를 둔 他 방법에 비해 계산의 양, 곱, 記憶容量을 줄이게 된다. 특히 Burg 및 共分散-래티스 방법에 비교하였을 때 새로운 알고리즘이 效率的이 된다는 것을 알 수 있다.

Ⅱ. 알고리즘의 誘導

線形 豫測에서 신호의 스펙트럼을 all-pole 스펙트럼으로 모델化할때 시스템을 모델化하므로 얻게 되는 第 i次의 前向 豫測 誤差 $f^{(i)}(m)$과 後向 豫測 誤差 $b^{(i)}(m)$은

$$f^{(0)}(m) = b^{(0)}(m) = s(m) \quad (s(m);\ \text{입력신호}) \qquad (1)$$

$$f^{(i)}(m) = f^{(i-1)}(m) - K_i f^{(i-1)}(m-1) \qquad (2)$$

$$b^{(i)}(m) = b^{(i-1)}(m-1) - K_i f^{(i-1)}(m) \qquad (3)$$

와 같은 循環 關係式을 얻는다. 위의 式으로부터 all-pole 필터의 安定度를 保障할 수 있는 反射 係數 K_i를 推定하기 위해 여러 방법의 래티스 公式이 提示되어 왔으나 그 중 數學的으로 잘 定義된 誤差 判定 基準을 갖는 Burg 방법에 의한 래티스 公式[5]

$$K_{i+1} = \frac{2\sum_{m=p}^{N-1}\left[f^{(i)}(m)\,b^{(i)}(m-1)\right]}{\sum_{m=p}^{N-1}\left[f^{(i)}(m)\right]^2 + \sum_{m=p}^{N-1}\left[b^{(i)}(m-1)\right]^2} \qquad (4)$$

을, 새로운 알고리즘을 誘導하기 위해 利用하기로 한다. 여기서 p는 最終 豫測 次數이며 N은 알려진 데이터 샘플의 全体数이다. 時間의 上限과 下限을 N-1과 p로한 것은 계산의 편리를 위하여 任意로 定하였다.

以下에서 다음 表記法을 使用하기로 한다. 신호가 랜덤 프로세스인 경우 ensemble 평균은 시간 평균에서 求해질 수 있는 것으로 가정한다. E(·)는 期待値이다.

$$E\left[f^{(i)}(m)f^{(i)}(m-k) + b^{(i)}(m)b^{(i)}(m-k)\right]$$

$$= \sum_{m=p}^{N-1} f^{(i)}(m)f^{(i)}(m-k) + \sum_{m=p}^{N-1} b^{(i)}(m)b^{(i)}(m-k) = FFBB^{(i)}(k)$$

$$E\left[f^{(i)}(m)b^{(i)}(m-k)\right] = \sum_{m=p}^{N-1} f^{(i)}(m)b^{(i)}(m-k) = FB^{(i)}(k)$$

$$E\left[b^{(i)}(m)f^{(i)}(m-k)\right] = \sum_{m=p}^{N-1} b^{(i)}(m)f^{(i)}(m-k) = BF^{(i)}(k)$$

계산의 效率을 얻는데 있어서 式(4)의 分子의 계산이 쉽게 되지 않으므로 이의 계산에 관심을 두고 式(2)와 k 지연된 式(3)을 곱하게 되면 다음과 같이 展開된다.

$$f^{(i)}(m)b^{(i)}(m-k) = f^{(i-1)}(m)b^{(i-1)}(m-k-1) - K_i\left[f^{(i-1)}(m)f^{(i-1)}(m-k) + b^{(i-1)}(m-1)b^{(i-1)}(m-k-1)\right] + K_i^2 b^{(i-1)}(m-1)f^{(i-1)}(m-k) \qquad (5)$$

式(5)의 양변을 時間 間隔 p에서부터 N-1까지 合하고 위의 表記法을 적용시키면

$$FB^{(i)}(k) = FB^{(i-1)}(k+1) - K_i\left[FFBB^{(i-1)}(k) + b^{(i-1)}(p-1)b^{(i-1)}(p-k-1) - b^{(i-1)}(N-1)b^{(i-1)}(N-k-1)\right] + K_i^2\left[BF^{(i-1)}(k-1) + b^{(i-1)}(p-1)f^{(i-1)}(p-k) - b^{(i-1)}(N-1)f^{(i-1)}(N-k)\right] \qquad (6)$$

로 나타낼 수 있다. 式(6)은 式(4)에 의해 推定되는 反射 係數의 分子를 직접 계산할 수 있는 式이 된다. 그

러며 (6)式의 계산은 우변의 1項, 2項 및 3項의 계산을 요구한다. 1項은 좌변과 同一한 豫測 誤差의 cross covariance이므로 (6)式 자체에서 계산될 수 있다. 매 次數에 對應하는 p개의 反射 係數를 推定하기 위해 第 i次 豫測 段階에서 (6)式이 계산되어져야 할 k의 범위를 연구로 하자. 式(6)의 우변의 1項에 注目하면 第 t+1次 反射 係數를 推定하기 위하여, 分子의 값으로 $FB^{t}(1)$이 계산되어야 하고 이의 계산은 $FB^{(t-1)}(2)$, $FB^{t-2}(3)$, …, $FB^{0}(t+1)$의 계산을 隨伴하게 되어 결국 그림 1의 ik座標에서 대각선 위의 點(i, k)에 對應하는 모든 $FB^{i}(k)$가 계산되어져야 한다. 위의 설명을 모든 次數에 적용시키면 最終 豫測 次數가 p일때 第i次 豫測 段階에서 豫測 誤差의 cross covariance $FB^{i}(k)$가 계산되어야 할 k의 범위는 그림1로 부터 $1 \le k \le p-i$가 되며 그 값이 다음 豫測 段階까지 保存되어야함을 알 수 있다.

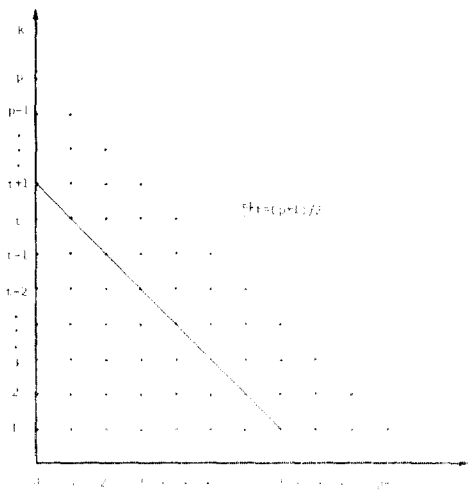

그림1. ik좌표
Fig 1. ik coordinates.

그리고 式(6)에서 2項과 3項을 求해야 하는데 豫測 誤差의 自己 分散의 合 $FFBB^{i-1}(k)$와 cross covariance $BF^{i-1}(k)$는

$$
\begin{aligned}
FFBB^{i}(k) = & -2K_i FB^{i-1}(k+1) \\
& + (1+K_i^2)\left\{ FFBB^{i-1}(k) + b^{i-1}(p-1)b^{i-1}(p-k-1) - b^{i-1}(N-1)b^{i-1}(N-k-1) \right\} \\
& - 2K_i\left\{ BF^{i-1}(k-1) + b^{i-1}(p-1)f^{i-1}(p-k) - b^{i-1}(N-1)f^{i-1}(N-k) \right\}
\end{aligned}
\quad (7)
$$

와

$$
\begin{aligned}
BF^{i}(k) = & -K_i FB^{i-1}(k+1) \\
& - K_i\left\{ FFBB^{i-1}(k) + b^{i-1}(p-1)b^{i-1}(p-k-1) - b^{i-1}(N-1)b^{i-1}(N-k-1) \right\} \\
& + \left\{ BF^{i-1}(k-1) + b^{i-1}(p-1)f^{i-1}(p-k) - b^{i-1}(N-1)f^{i-1}(N-k) \right\}
\end{aligned}
\quad (8)
$$

로 표시될 수 있다. 式(6)과 마찬가지로 되어 式(6)의 계산에 (7), (8)式의 계산도 다음에 循環的으로 할 수 있게 된다. 式(7), (8)은 式(6)과 같은 방법으로 誘導되었다. 第i次 豫測段階에서 式(7), (8)이 계산되어야 할 k의 범위는 (6)式의 범위를 고려하였을 때 $0 \le k \le p-i-1$로 되나 $k=0$일 때는 式은 $BF^{i-1}(-1)$을 포함하고 있어서 그 계산이 어렵게 된다. 따라서 式(7), (8)은 $1 \le k \le p-i-1$에 대한 계산 式이 되고 $k=0$에 대한 式(7), (8)의 계산은 다음과 같다. 즉 式(7)에서 $k=0$로 하면

$$
\begin{aligned}
FFBB^{i}(0) = & -4K_i FB^{i-1}(1) \\
& + (1+K_i^2)\left\{ FFBB^{i-1}(0) + \left(b^{i-1}(p-1)\right)^2 - \left(b^{i-1}(N-1)\right)^2 \right\}
\end{aligned}
\quad (9)
$$

이 되고 式(8)에서 $k=0$로 하면

$$
\begin{aligned}
BF^{i}(0) = & (1+K_i^2) FB^{i-1}(1) \\
& - K_i\left\{ FFBB^{i-1}(0) + \left(b^{i-1}(p-1)\right)^2 - \left(b^{i-1}(N-1)\right)^2 \right\}
\end{aligned}
\quad (10)
$$

이 된다. 각 式에서 豫測 誤差의 곱의 項은 式(2), (3)에서 만으로 계산되며 결국 위의 式들은 第i次 豫測 誤差의 cross covariance 및 自己 分散이 第i-1次 豫測 誤差의 cross covariance와 自己 分散 그리고 이전에 계산된 豫測 誤差의 항으로 表示된 것이다.

따라서 K_{i+1}을 推定하기 위한 式(4)의 分母와 分子는 式(6), (7), (8), (9) 및 (10)으로 부터 다음과 같이 求해진다. 즉 式(9)를 이용해서 分母를 계산하면

$$\sum_{m=P}^{N-1} \left[f^{(i)}(m) \right]^2 + \sum_{m=P}^{N-1} \left[b^{(i)}(m-1) \right]^2 = FFBB^{(i)}(0) + \left[b^{(i)}(p-1) \right]^2 - \left[b^{(i)}(N-1) \right]^2 \tag{11}$$

와 같이 되고 分子는 式(6)에서 $k=1$일 때의 값의 두배로서

$$2\sum_{m=P}^{N-1} f^{(i)}(m)\, b^{(i)}(m-1) = 2\,FB^{(i)}(1) \tag{12}$$

이 된다.

Ⅲ. 計算 節次

All-pole 모델의 反射 係數를 推定하기 위한 새로운 알고리즘은 다음과 같이 要約된다. 신호는 $0 \le m \le N-1$의 범위에서 알려진 N點의 데이터이며 處理의 始點은 $m=0$ 이다.

1) $i \leftarrow 0$
2) $f^{(0)}(m) \leftarrow s(m)$, $b^{(0)}(m) \leftarrow s(m)$ ($s(m)$; 입력 신호)
3) $FB^{(0)}(k) = \sum_{m=P}^{N-1} s(m)\, s(m-k)$,

   $BF^{(0)}(k) = FB^{(0)}(k)$, $FFBB^{(0)}(k) = 2\,FB^{(0)}(k)$

   ($0 \le k \le p$)를 계산한다.
4) $i \leftarrow i+1$로 하고 式(11), (12) 및 (4)를 이용하여 反射 係數를 계산한다.
5) $i=p$이면 마치고 아니면 다음 단계로 간다.
6) 式(9)와 式(10)을 이용하여 $FFBB^{(i)}(0)$와 $BF^{(i)}(0)$를 계산한다.
7) 式(7)과 (8)을 이용하여 $FFBB^{(i)}(k)$와 $BF^{(i)}(k)$ ($1 \le k \le p-i-1$)을 계산한다.
8) 式(6)을 이용하여 $FB^{(i)}(k)$ ($1 \le k \le p-i$)를 계산한다.
9) 式(2)와 (3)을 이용하여 $b^{(i)}(p-k-1)$, $b^{(i)}(N-k-1)$, $f^{(i)}(p-k)$, $f^{(i)}(N-k)$ ($0 \le k \le p-i$)를 각각 계산한다.
10) 4) 段階로 간다.

시간 m이 t로 이동되어 處理될 때는 p대신 $p+t$, $N-1$ 대신 $N-1+t$가 된다.

새로운 알고리즘은 初期 豫測 段階($i=0$)의 계산과 이를 제외한 나머지의 계산으로 구성되는데 初期 豫測 段階에서 豫測 誤差의 cross covariance 및 自己 分散은 處理되는 신호의 自己 分散이므로 自己 分散을 效率的으로 계산하기 위한 Blankenship 방법[7]을 이용하면 본 알고리즘의 初期 豫測 段階의 계산량이 약 반으로 줄어 들게 된다.

Ⅳ. 應用 및 評價

새로운 알고리즘의 効用性을 檢討하기 위하여 음성 신호의 解析에 應用하였다. 음성 신호를 샘플링 周波數 10kHz, 8 bit로 A/D 變換하여 磁氣 diskette에 기록한 다음 이를 입력 자료로 하여 새로운 알고리즘을 遂行하기 위한 프로그램에 의해 反射 係數를 推定하였다. N=256, 14次 豫測 次數에서 새로운 알고리즘과 Burg 방법으로 계산된 값을 표 1에 例示하였다. 소수 다섯째 자리까지 반올림 하였을 때 두 값이 같은 것을 알 수 있다. 시뮬레이션에서 사용된 음성 신호는 약 1.5초간 발생된 숫자 음성("1") 期始部의 25.6m sec에 해당하는 샘플링 데이터이며 컴퓨터의 기종은 마이크로컴퓨터 Cromemco system Ⅲ 였다. 계산 시간은 最終 豫測 次数 p, 데이터 點의 數 N에 따라 달라지나 14次, 256點 데이터로서 계산해 본바 본 알고리즘이 4.5초 정도, Burg 방법이 23초 가량 소요되었다.

표 1. Burg방법과 새로운 알고리즘으로 계산된 反射 係数値의 比較

Table 1. Comparison of the reflection coefficients computed by the Burg method and new algorithm.

	PARCO(I)*	BURG(I)
1	.9085641E+00	.9085641E+00
2	.3210414E+00	.3210417E+00
3	.9276181E-01	.9276242E-01
4	-.5684762E-01	-.5684790E-01
5	-.1706824E+00	-.1706824E+00
6	-.2162260E+00	-.2162257E+00
7	-.2034894E+00	-.2034893E+00
8	-.2013681E+00	-.2013680E+00
9	-.1921120E+00	-.1921126E+00
10	-.1312707E+00	-.1312712E+00
11	-.1075305E+00	-.1075308E+00
12	-.1348298E+00	-.1348296E+00
13	-.1231402E+00	-.1231399E+00
14	-.2662825E-01	-.2662752E-01

* (PARCO(Ⅰ); 새로운 알고리즘으로 계산된 결과)

본 방법에 의한 계산량은 $Np/2+7p^2$이 된다. 첫째 項은 初期 豫測 段階에서 입력 신호의 自己 分散을 얻는데 소요되는 계산량으로 윈 式에 의한 량 Np를 (7)의 기존 방법을 이용하여 약 반으로 줄이므로서 Np/2가 된다. 그리고 둘째 項은 初期 豫測 段階의 계산을 제외한 나머지의 계산량이 되는데 이것은 豫測 次數 i=1에서 最終 次数 p까지 계산되어야 할 k의 수 횟수가 그림 1에서 보는 바와 같이 대략 $p^2/2$이 되는 것을 알 수 있고 그러한 계산 조직을 갖는 곱셈의 項이 式(6), (7) 및 (8)에서 10개 項이, 또 後向 및 前向 豫測 誤差의 계산 과정에서 4개項으로 모두 14개項이 있으므로 $14\frac{p^2}{2}=7p^2$이 된다.

표 2는 새로운 알고리즘의 계산량을 다른 두 방법과 比較하여 나타낸 것이다. $p \leq N/14$일 때(例를 들면 N=256일때 18次 以下의 次數가 된다), 표 2에 의하여 각 방법에 대한 계산량을 求해 보면 새로운 알고리즘의 계산량이 Burg 방법에 비해서는 ⅙~⅛로, 共分散-래티스방법에 비해서는 약 ½로 각각 줄어 든다. 그리고 共分散-래티스방법에 의한 계산량은 p^3 項을, 새로운 알고리즘에 의한 그것은 p^2 項을 포함하고 있어서 새로운 알고리즘이 共分散-래티스방법에 비해 高次 모델에 더 効率的이 되며 Burg 방법에 비해서도 $p \leq N/4$을 만족하는 범위의 높은 豫測 次数에서는 2배 정도의 効率로서 계산을 遂行할 수 있게 된다. 래티스 公式에 의해 推定된 파라메터는 신호가 窓函數를 지나지 않아도 되므로 보다 적은 샘플링 周波数로 non-lattice 방법과 同一한 스펙트럼 分解度를 얻을 수 있다. 따라서 이를 고려하여 계산량을 求해보면 결국 傳統的인, 最小 自乘法에 기초 방법보다도 더 빨리 계산됨을 알 수 있다. 그리고 표 2에서 요구되는 記憶容量을 계산하면 새로운 알고리즘은 比較的 적은 記憶容量으로 신호를 處理할 수 있음을 나타낸다.

표 2. Burg 및 共分散-래티스 방법에 비교하였을 때 새로운 알고리즘의 계산 비용

Table 2. Computational cost for the new algorithm as compared to the Burg and covariance -lattice method.

	Burg 방법	共分散-래티스방법	새로운 알고리즘
Multiplication	5 Np	$N_p+p^3/2+2p^2$	$N_p/2+7p^2$
Storage	3 N	$N+p^2$	N+8-p
예측 차수가 높을 때	Expensive (단 $P \leq N/4$)	Expensive	Efficient

V. 結 論

래티스 公式에 기초를 두어 all-pole 필터의 파라메터를 推定하기 위한 安定하고도 効率的인, 새로운 알고리즘이 誘導되었다.

매 豫測 段階마다 前向 및 後向 豫測 誤差의 cross covariance 그리고 自己 分散을 循環的으로 계산하는 과정에서 豫測 係數에 관계없이 필터의 安定度를 保障하는 反射 係数가 推定되었다.

새로운 알고리즘은 N/4次 以下의 豫測 次數에서, 래티스 公式에 기초를 둔 他 방법에 비해 최소한 2배의 効率을 갖는다. 음성 기관을 모델化 하였을 때, 새로운 알고리즘과 Burg방법에 의해 계산된 反射 係數값이 같은 것을 봄으로써 새로운 알고리즘의 効用性이 確認되었다.

參 考 文 獻

[1] J. Makhoul, "Linear predicton: A tutorial review," *Proc. IEEE*, vol. 63, pp. 561-580, Apr. 1975.

[2] S. Saito and F. Itakura, "The theoretical consideration of statistically optimum methods for speech spectral density" (in Japanese), *Elec. Commun. Lab.*, N. T. T., Tokyo, Japan, Rep. 3107, Dec. 20, 1966.

[3] J. D. Markel, "Digital inverse filtering-A new tool for formant trajectory estimation," *IEEE Trans., Audio Electroacoust.*, vol. Au-20, pp. 129-137, June 1972.

[4] B. S. Atal and S. L. Hanauer, "Speech analysis and synthesis by linear prediction of speech wave," *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 50, pp. 637-655, Aug. 1971.

[5] L. R. Rabiner and R. W. Schafer, *Digital Processing of Speech Signal*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., pp. 413-416, 1978.

[6] J. Makhoul, "Stable and efficient lattice methods for linear prediction," *IEEE Trans., Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-25, pp. 423-428, Oct. 1977.

[7] W. A. Blankenship, "Note on computing autocorrelation," *IEEE Trans., Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-22, pp. 76-77, Feb. 1974.