論文 82-19-4-3

分散 制御로 安定 可能한 大形 시스템에 대하여
(Study on Stabilizable Interconnected System by Decentralized Control)

李 鍾 洙*, 崔 悰 鎬**

(Chong Soo Lee and Chong-Ho Choi)

要 約

대형 시스템에 있어서 안정도는 매우 중요하며 특히 분산 제어로 안정 가능한 시스템에 관한 연구는 점차 중요성을 더해 가고 있다. 본 논문은 몇 개의 국부 시스템으로 구성된 대형 시스템에서 각 국부 시스템의 제어기가 자기 자신의 입력만을 제어하고 또한 자기 자신의 출력만을 관측하는 경우에 대형 시스템이 안정하기 위한 충분 조건을 제시하였다. 이 충분 조건은 Sezer와 Hüseyin이 제시한 조건을 확장시킨 것이며 상호 연관된 시스템을 표현하는 시스템 모델은 가장 일반적이다. 특수한 경우로써 각 부 시스템이 단일 입력이고 가제어 companion형으로 주어졌을 때 본 논문에서 사용한 증명 방법과 유사하게 Ikeda와 Siljak이 제시한 충분 조건을 증명하였다.

Abstract

Stabilization by decentralized control is an important problem in large scale systems and there has been an increasing interest in this area.

The objective of this paper is to obtain the sufficient condition for an interconnected system to be stabilized by local feedback. Recently there has been many papers about this, and we further broaden the class of interconnections for which we can find a decentralized control to stabilize the overall system. The interconnection matrix may take any arbitrary time invariant values and this implies connective stability in some sense. The assumed model is more general than most of previous ones, and as a special case, when each subsystem is given by companion form of a single input, the result is compared with that of Ikeda and Siljak.

The obtained result is illustrated by examples.

I. 序 論

대형 시스템에 대한 이론 중 안정도는 매우 중요하며 최근에 많은 이론들이 발표되었다.[1] 특히 분산 제어로 안정 가능한 시스템에 대한 연구는 점차 중요성을 더해 가고 있다. 많은 대형 시스템은 몇 개의 국부 시스템으로 구성되어 있으며 각 국부 시스템의 제어기는 자기 자신의 입력만을 제어하고 또한 자기 자신의 출력만을 관측하는 경우 분산 제어가 불가피하며, 이러한 상황에서 전체 시스템은 안정하게 유지되어야 한다. 따라서 전체 시스템이 분산 제어에 의하여 안정화 될 수 있기 위한 조건을 아는 것은 중요하다. 이에 대한 연구 중에는 Graph Theory의 개념이 이용되기도 하고,[2,3] 상호 연결 행렬의 구조적 성질이 이용되기도 하였다.[4] 본 논문은 Sezer와 Hüseyin[2]이 제시하였던, 시스템의 분산 제어로 안정 가능하기 위한 충분 조건을 확장한 것이다.[5] 이 결

*準會員, **正會員, 서울大學校 計測制御工學科

(Dept. of Instrumentation and Control Eng., Seoul National Univ.)

接受日字 : 1982年 3月 11日

과는 각 부시스템을 매우 안정하게 만들어 줌으로써 상호 연관성이 전체 시스템의 안정을 파괴하지 못하도록 하는 개념에서 얻었다. 상호 연관된 시스템을 표현하는 시스템 모델은 가장 일반적인 경우로서 상호 연관 구조를 가지며 상호 연관 행렬은 임의의 값을 가질 수 있다. 또한 각 부시스템의 A, B, C 행렬의 형태에 제한이 없고, 다른 부시스템으로부터의 상호 작용 입력과 국부 제어 입력은 각 부시스템에 서로 다르게 작용한다. 특수한 경우로써 각 부시스템이 단일 입력이고 가제어 companion 형으로 주어졌을 때, 본 논문이 제시한 충분 조건과 Ikeda와 Siljak[4]이 제시한 충분 조건을 비교하였다. 그리고 얻은 결과를 예제에 의하여 제시하였다.

Ⅱ. 問題의 提示

대형 시스템(φ)은 N개의 부시스템으로 구성되어 있다고 하자.

$$\varphi_i : \dot{x}_i = A_i x_i + B_i v_i + D_i v_i$$
$$y_i = C_i x_i \qquad i = 1, \cdots N \qquad (1)$$

여기서 $x_i \in R^{n_i}$, $v_i \in R^{m_i}$, $y_i \in R^{r_i}$, $v_i \in R^{p_i}$이며 v_i는 다른 부시스템들로부터 부시스템 φ_i에 주어지는 상호 작용 입력으로써

$$v_i = \sum_{j=1}^{N} E_{ij} y_j \qquad i = 1, \cdots, N \quad (2)$$

와 같이 정의한다. (1)식과 (2)식에서 A_i, B_i, C_i, D_i, E_{ij}는 상수의 값을 가지며 각각에 적당한 dimension을 가지는 행렬이라고 한다. 각 부시스템은 자기 자신의 국부 입력에 의하여 제어 가능하다고 가정한다. 이 논문에서는

$$u_i = K_i x_i + w_i \qquad i = 1, \cdots, N \qquad (3)$$

로 주어지는 국부 입력에 의해서 전체 시스템이 안정화되기 위한 충분 조건을 고려하기로 한다. (3)식에서 $w_i \in R^{m_i}$는 국부 reference 입력이고 K_i는 적당한 dimension을 가진 궤환 행렬이다. (3)식에 의하여 (1)식으로 주어진 시스템을 보상하면

$$\varphi_{ci} : \dot{x}_i = (A_i + B_i K_i) x_i + D_i v_i + B_i w_i$$
$$y_i = C_i x_i \qquad i = 1, \cdots, N \qquad (4)$$

로 표시되는 N개의 부시스템으로 구성되는 보상된 시스템(φ_c)을 얻는다.

$$\varphi_c : \dot{x} = (A + BK + DEC) x + Bw$$
$$y = Cx \qquad (5)$$

여기서

$$x = [x_1^T, \cdots, x_N^T]^T \quad w = [w_1^T, \cdots, w_N^T]^T$$
$$y = [y_1^T, \cdots, y_N^T]^T \quad A = \text{diag.}[A_1, \cdots, A_N]$$
$$B = \text{diag.}[B_1, \cdots, B_N] \quad C = \text{diag.}[C_1, \cdots, C_N]$$
$$D = \text{diag.}[D_1, \cdots, D_N] \quad K = \text{diag.}[K_1, \cdots, K_N]$$

이고 $E = [E_{ij}]$이라고 정의한다.

Ⅲ. 主要 結果

식 (3)으로 주어진 궤환 입력은 i번째 부시스템 φ_{ci}의 eigenvalue가 $-\gamma \cdot \sigma_k^i$ ($k = 1, \cdots, n_i$)이 되도록 한다. 여기서 $\gamma \geq 1$, $\sigma_k^i > 0$ 이다. 그리고 각각의 σ_k^i는 서로 다른 값을 갖도록 한다. 이때 σ_k^i의 값은 같은 것이 있어도 같은 결과를 얻을 수 있다.[2] 상호 작용 입력 v_i에 대한 i번째 부시스템의 전달 함수를 $H_i(s)$라 하면 $H_i(s)$는

$$H_i(s) = C_i (sI - A_i - B_i K_i) D_i \qquad (6)$$

과 같이 쓸 수 있으며 $H_i(s)$는 γ와 s의 함수가 된다. 각 행렬 E_{ij}에 정수 m_{ij}를 다음과 같이 대응시키기로 한다.

$$\lim_{\gamma \to \infty} \| H_i(s) E_{ij} \| / \gamma^{m_{ij}} \to 0 \qquad (7)$$

이 만족되면(즉, $\| H_i(s) E_{ij} \| \in O(\gamma^{m_{ij}-1})$) 행렬 E_{ij}에 정수 m_{ij}를 대응시키고 E_{ij}가 0행렬이면 m_{ij}가 충분히 큰 음의 정수 값을 갖도록 한다. 이제 I_r을 $\{1, \cdots, r\}$인 정수의 index 집합이라고 하고 ($r \leq N$), J_r은 $\{j_1, \cdots, j_r\}$인 I_r의 원소들을 치환하여 얻는 r! 가지의 index 집합이라고 한다.

정리 1 :

모든 I_r과 J_r, $r = 1, \cdots, N_r$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{r} (m_{kj_k} - 1) < 0 \qquad (8)$$

이 성립하면 (1)로 주어진 시스템(φ)이 모든 $\gamma > \bar{\gamma}$에 대하여 안정 가능한 $\bar{\gamma}$가 존재한다.

증명 : 이하에서 $A_c \triangleq A + BK$로 정의한다.

$\det(sI - A_c - DEC) = \det[I - (sI - A_c)^{-1} DEC] \cdot \det(sI - A_c)$이고 $\det(sI - A_c)$는 모든 근을 복소 평면의 좌 평면상에 가지므로, γ가 충분히 클 때 $\det[I - (sI - A_c)^{-1} DEC]$가 모든 $s \in C^+$에 대하여 0이 아님을 보이면 정리의 증명이 된다. 여기서 C^+는 복소평면의 우평면을 나타내는 것으로 한다. 이제 어떤 $s_0 \in C^+$와 $\gamma > \bar{\gamma}$에 대하여 $\det[I - (s_0 I - A_c)^{-1} DEC]$

$$= \det[I - C(s_0 I - A_c)^{-1} DE]$$
$$= \det[I - H(s_0) E] = 0$$

이라고 하자. 여기서 $H(s) = \text{diag.}[H_1(s), \cdots, H_N(s)]$

이다. 따라서 $[I-H(s_0)E]\alpha=0$ 이 되기 위해 0이 아닌 vector $\alpha=[\alpha_1^T, \cdots, \alpha_N^T]^T$가 존재하며, 이때 $\alpha_i \in R^{n_i}$ 이다. 이것을 다시 쓰면

$$\alpha_i=\sum_{j=1}^{N} H_i(s_0)\, E_{ij}\, \alpha_j \tag{9}$$

이고 따라서

$$\| \alpha_i \| \geqq \sum_{j=1}^{N} \| H_i(s_0) E_{ij} \| \; \| \alpha_j \| \tag{10}$$

이 된다. 조건 (7)은 모든 $\gamma>\bar{\gamma}$에 대하여 $\| H_i(s_0)E_{ij} \| \leq \zeta_{ij}\, r^{m_{ij}-1}$이 만족되는 ζ_{ij}와 $\bar{\gamma}$가 존재함을 의미하므로 (10) 식으로부터

$$\| \alpha_i \| \leq \sum_{j=1}^{N} \zeta_{ij}\, r^{m_{ij}-1} \; \| \alpha_j \| \tag{11}$$

이 된다. 이것을 다시 쓰면

$$T\hat{\alpha} \leq 0 \tag{12}$$

이 되고 여기서 $\hat{\alpha}=[\, \| \alpha_1 \|, \cdots, \| \alpha_N \| \,]^T$ 이고 T는 아래와 같다.

$$T=\begin{vmatrix} 1-\zeta_{11}\gamma^{m_{11}-1} & \cdots & -\zeta_{1N}\gamma^{m_{1N}-1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ -\zeta_{N1}\gamma^{m_{N1}-1} & \cdots & 1-\zeta_{NN}\gamma^{m_{NN}-1} \end{vmatrix}$$

T의 r−th leading principal minor의 determinant는 정리 1의 조건 (8)에 의하여

$$1+\zeta_1\gamma^{-1}+\zeta_2\gamma^{-2}+\cdots \tag{13}$$

으로 표시된다. 여기서 ζ_i들은 유한한 값을 갖는 적당한 상수이다. 따라서 γ를 충분히 크게 해주면 이 determinant는 양의 값을 갖게 된다. 따라서 T^{-1}는 존재하고 각 원소가 nonnegative이다.[6] 따라서 $T^{-1}(T\hat{\alpha}) \leq 0$ 즉 $\hat{\alpha} \leq 0$ 이 되어 모순이므로 γ가 충분히 크면 모든 $s \in C^+$ 에 대하여 $\det[sI-A_c-DEC] \neq 0$ 이다. 증명 끝

정리 1을 이용하여 우리는 Sezer와 Hüseyin[2] 의 결과를 확장할 수 있다. (6)식의 $H_i(s)$는

$$H_i(s)=\sum_{k=1}^{n_i} N_{ik}(\gamma)s^{n_i-k} \Big/ \prod_{k=1}^{n_i}(s+\gamma\sigma_k^{\,i}) \tag{14}$$

와 같이 쓸 수 있으며 조건(7) 대신에 다음의 조건으로 행렬 E_{ij}에 정수 m_{ij}를 대응시키기로 한다.

$$\| N_{ik}(\gamma)E_{ij} \| \big/ \gamma^k \in 0\,(\gamma^{m_{ik}}) \quad k=1, \cdots, n_i \tag{15}$$

Lemma 1 : $H(s)=\sum_{i=1}^{n} N_i(\gamma)\, s^{n-i} \Big/ \prod_{k=1}^{n}(s+\gamma\sigma_k)$ (16)

로 주어지고($\gamma \geqq 1$, $\sigma_k>0$)

$$\| N_k(\gamma)E \| \,/\, \gamma^k \in 0\,(\gamma^m) \qquad k=1, \cdots, n \tag{17}$$

이라고 하자. 그러면 모든 $\gamma>\bar{\gamma}$, 모든 $s \in C^+$에 대하여 $\| H(s)E \| \leq \zeta\gamma^{m-1}$이 되도록 하는 $\bar{\gamma}$와 ζ가 존재한다.

증명 : $H(s)$를 부분 분수로 전개하면

$H(s)=\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\tilde{N}_k(\gamma)}{s+\gamma\sigma_k}$ 로 되고, (16)식으로부터

$\tilde{n}_k(r)=\sum_{i=1}^{n} N_i(\gamma)\,(-\gamma\sigma_k)^{n-i} \Big/ \prod_{\substack{j=1\\ \neq k}}^{n} \gamma(\sigma_j-\sigma_k)$ 이다.

따라서

$$\| H(s)E \| \leq \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{|\gamma\sigma_k|^{n-i}\, \| N_i(\gamma)E \|}{|s+\gamma\sigma_k| \; \left| \prod_{\substack{j=1\\ \neq k}}^{n} \gamma(\sigma_j-\sigma_k) \right|}$$

이다. 그런데 $s \in C^+$이므로 $|s+\gamma\sigma_k| > |\gamma\sigma_k|$이 성립하므로

$$\| H(s)E \| \leq \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \zeta_{ik} \frac{\| N_i(\gamma)E \|}{\gamma^i} \tag{18}$$

이 되며 $\zeta_{ik}=\sigma_k^{\,n-i-1} \Big/ \left| \prod_{\substack{j=1\\ \neq k}}^{n} (\sigma_j-\sigma_k) \right|$ 이다.

따라서 조건(17)로 부터 모든 $\gamma>\bar{\gamma}$, 모든 $s \in C^+$에 대하여 $\| H(s)E \| \leq \zeta\gamma^{m-1}$이 성립하는 γ와 ζ가 존재한다. 증명 끝

정리 2 : (15)식으로 m_{ij}를 정의할 때 모든 I_r과 J_r, $r=1, \cdots, N$ 에 대하여 조건 (8)이 만족되면 (1)식으로 주어진 시스템φ가 모든 $\gamma>\bar{\gamma}$ 에 대하여 안정 가능하게 되는 $\bar{\gamma}$가 존재한다.

증명 : Lemma 1을 이용하면 정리 1과 같은 방법으로 증명할 수 있다. 증명 끝

이제 위에서 얻은 결과를 connective stability로 확장시킬 수 있다. 이를 위해 복소 행렬 $P=[p_{ij}]_{m \times n}$에 대해 $|P|=[\,|p_{ij}|\,]_{m \times n}$ 이라고 정의한다. Nonnegative 행렬은 각각의 원소들이 nonnegative인 행렬을 의미하며 $P_1 \leq P_2$는 P_2-P_1이 nonnegative 행렬임을 의미한다. 그리고 행렬E_{ij}에 정수 m_{ij}를 대응시키는 조건 (7)을 임의의 bounded nonnegative 행렬 E^b_{ij} 를 사용하여

$$\lim_{\gamma \to \infty} \| \, |H_i(s)|\, E^b_{ij} \, \| \,/\, \gamma^{m_{ij}} \to 0 \tag{19}$$

으로 대치하면 아래의 결과를 얻는다.

Lemma 2 : Lemma 1에서 조건 (17)을 (20)

$$\| \, |N_k(\gamma)| \cdot E^b \, \| \,/\, \gamma^k \in 0\,(\gamma^m) \quad k=1, \cdots, n$$

으로 바꾸고 그 외의 모든 조건이 성립하면 Lemma 1의 결과는 $|E| \leqslant E^b$를 만족하는 모든 행렬 E에 대하여 성립한다.

증명 : $\| N_k(\gamma)E \| \leqslant \| \, |N_k(\gamma)| E^b \|$ 임을 고려하면 Lemma 1의 증명과 같다.　　　　증명 끝

정리 3 :(19)식으로 m_{ij}를 정의할 때 모든 I_r과 J_r, $r=1, \cdots, N$, 에 대하여 조건(8)이 성립하면 $|E_{ij}| \leq E^b_{ij}$를 만족하는 모든 E_{ij}에 대하여, $\gamma > \overline{\gamma}$인 모든 γ에 대해 시스템 φ는 안정 가능하도록 하는 $\overline{\gamma}$가 존재한다.

증명 : Lemma 2를 고려하면 정리 1과 같이 증명할 수 있다.　　　　증명 끝

마찬가지의 방법으로 정리 2의 결과를 connective stability에로 확장시킬 수 있다.[5] 특수한 경우로써 단일 입력이고 A_i와 b_i가 가제어 companion 형으로 주어졌다고 가정할 때 Ikeda와 Siljak[4]의 정리(2,9)를 본 논문의 증명 과정 과 유사한 방법으로 증명할 수 있는 것을 보이겠다. 이를 위하여 B_i를 b_i, K_i를 k_i^T로 나타내기로 하고 앞에서와 같이 궤환 행렬 k_i^T는 $A_i+b_ik_i^T$가 $-\gamma\sigma_k^i$, $k=1, \cdots, n_i$ 를 eigenvalue로서 가지도록 한다.

이제 $x_i=T_i\tilde{x}_i$에 의하여 시스템 φ_i를 변환시키면

$$\varphi_{ci} : \dot{\tilde{x}}_i = \wedge_i \tilde{x}_i + \tilde{D}_i v_i + \tilde{b}_i \omega_i$$
$$y_i = \tilde{C}_i \tilde{x}_i \qquad i=1, \cdots, N \tag{21}$$

와 같이 되고 여기서

$$\wedge_i = T_i^{-1}(A_i+b_ik_i^T)T_i = \mathrm{diag.}[-\gamma\sigma_1^i, \cdots, -\gamma\sigma_{n_i}^i]$$

$\tilde{D}_i=T_i^{-1}D_i$, $\tilde{b}_i=T_i^{-1}b_i$, $\tilde{C}_i=C_iT_i$ 이다.

이것을 다시 쓰면

$$\tilde{\varphi}_c : \dot{\tilde{x}} = (\wedge+\tilde{D}E\tilde{C})\tilde{x}+\tilde{b}w$$
$$y=\tilde{C}\tilde{x} \tag{22}$$

이고 여기서 $\wedge, \tilde{D}, E, \tilde{C}, \tilde{b}$는 앞에서와 같은 방법으로 정의한다.

변환 행렬 T_i는 $T_i=R_i\hat{T}_i$ 로서 표시할 수 있으며,[6] 여기서 $R_i=\mathrm{diag.}[1, \gamma, \cdots, \gamma^{n_i-1}]$ 이고 T_i는 Vandermonde 행렬이다.

$$\hat{T}_i = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -\sigma_1^i & -\sigma_2^i & \cdots & -\sigma_{n_i}^i \\ (-\sigma_1^i)^2 & (-\sigma_2^i)^2 & \cdots & (-\sigma_{n_i}^i)^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (-\sigma_1^i)^{n_i-1} & (-\sigma_2^i)^{n_i-1} & \cdots & (-\sigma_{n_i}^i)^{n_i-1} \end{bmatrix}$$

Ikeda와 Siljak[4]의 논문에서의 A_{ij}에 대응시키기 위해 $A_{ij}=D_iE_{ij}C_j$라고 정의하자. 그리고 행렬 A_{ij}에 정수 m_{ij}를 다음과 같이 대응시키기로 한다.[4]

$A_{ij} \neq 0$이면 $a^{ij}_{pq} \neq 0$ 모든 (p, q)에 대해 $m_{ij}=\max|q-p|$ 인 정수 m_{ij}를 행렬 E_{ij}에 대응시키고, $A_{ij}=0$이면 $m_{ij}=-n$이라고 한다. 여기서 $n=\sum_{i=1}^{N} n_i$이다. Ikeda와 Siljak[4]의 논문의 정리 (2. 9)는 m_{ij}의 정의만 제외하면 정리 1의 형태와 같게 된다. 이 증명을 본 논문의 정리의 증명과 유사한 방법으로 하자

정리 1의 증명에서와 같이 (22)식으로부터 $\det|sI-\wedge-\tilde{D}E\tilde{C}|$는 γ가 충분히 클 때 모든 $s \in C^+$에 대하여 0이 아님을 보이면 된다. $\tilde{H}_i(s)=sI-\wedge_i$라고 하고 같은 과정을 거치면

$$\| \alpha_i \| \leqslant \sum_{i=1}^{N} \| \tilde{H}_i(s_0)\tilde{D}_iE_{ij}\tilde{C}_j \| \; \| \alpha_j \| \tag{23}$$

를 얻는다. 그런데

$$\| \tilde{H}_i(s_0) \| \leq \sum_{k=1}^{n_i} \frac{\| E^k \|}{|s_0+\gamma\sigma_k^i|} \leq \sum_{k=1}^{n_i} \frac{1}{|\gamma\sigma_k^i|}$$
$$\leqslant \frac{\zeta_{ij}}{\gamma} \tag{24}$$

이고

$$\| \tilde{D}_iE_{ij}\tilde{C}_i \| \leq \zeta_{ij}\,\gamma^{m_{ij}} \tag{25}$$

이다.[4] 여기서 E_k는 e^k_{kk} 만 1이고 다른 원소들은 모두 0인 $n_i \times n_i$ 행렬이다. (24), (25)식으로 부터 $\| \tilde{H}_i(s_o)\tilde{D}_iE_{ij}\tilde{C}_j \| \leqslant \zeta_{ij}\gamma^{m_{ij}-1}$ 이고 여기서 $\zeta_{ij}=\zeta''_{ij}$ ζ''_{ij} 이다. 따라서 (23) 식은
식은

$$\| \alpha_i \| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \zeta''_{ij}\gamma^{m_{ij}-1} \; \| \alpha_j \|$$ 와 같이 쓸 수 있고 이것은 식(11)과 같이 되어 Ikeda와 Siljak[4]의 정리(2. 9)는 증명이 된다. 이상의 유사한 증명 과정에서와 같이 본 논문과 Ikeda와 Siljak[4]의 논문은 (11)식을 만족시키기 위한 서로 다른 충분 조건을 제시하며 어느 논문이 다른 논문을 포함한다고 말할 수는 없다. 이에 대해 예제 2에서 다시 언급하기로 한다.

Ⅳ. 例　　題

예제 1: 이 예제에서는 본 논문의 정리로는 안정 가능함을 판단할 수 있으나 Sezer와 Hűseyin[2]의 정리로는 안정 가능 여부를 판단할 수 없는 경우를 예제로 들었다.

(1)식으로 표현되는 3개의 부시스템으로 구성되어 있는 시스템에서

$A_1=0 \quad B_1=C_1=D_1=1$

$$A_i=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\quad B_i=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\quad C_i=D_i=I$$

$$i=2,\ 3$$

이라고 하자. 그리고 상호 연관 행렬은 다음과 같이 주어진다고 하자

$$E_{11}=-\beta_1\qquad E_{12}=[\,0\quad -1\,]\quad E_{13}=[\,0\quad 0\,]$$

$$E_{21}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\quad E_{22}=\begin{bmatrix} -\beta_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\quad E_{23}=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_{31}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\quad E_{32}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\quad E_{33}=\begin{bmatrix} -\beta_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

부시스템들이 eigenvalue를 $-\gamma$ 에 갖도록 K_i를 정하면

$$K_1=-\gamma,\ K_i=[\,-2\gamma,\ \gamma^2-1\,]\qquad i=2,\ 3$$

과 같이 된다. 따라서

$$H_1(s)=1/(s+\gamma)$$

$$H_i(s)=\frac{1}{(s+\gamma)^2}\begin{bmatrix} s & \gamma^2 \\ -1 & s+2\gamma \end{bmatrix}\qquad i=2,\ 3$$

이 된다. Sezer와 Hüseyin[2]의 논문을 적용하면

$$\bar{E}^*=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

과 같이 되어 안정 가능한지의 여부를 판정할 수 없으나 본 논문의 정리를 적용하면

$$M=[m_{ij}]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\infty \\ 1 & 0 & 1 \\ -\infty & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

이 되어 정리를 만족하므로 이 시스템은 안정 가능하다. 이것을 보이기 위해 $0\le\beta_i\le 1,\ i=1,\ 2,\ 3,$ 이라고 하면

$$[\,sI-(A+BK+DEC)\,]$$

$$=\begin{bmatrix} s+(\beta_1+\gamma) & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & s+(\beta_2+2\gamma)-\gamma^2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & s & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s+(\beta_3+2\gamma)-\gamma^2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & s \end{bmatrix}$$

과 같이 되어 γ를 크게 해주면 β_i의 값에 관계없이 모든 eigenvalue는 음의 실수부를 가지게 된다.

예제 2 : 이 예제에서는 본 논문의 정리와 Ikeda와 Siljak[4]의 논문의 정리(2. 9)중 어느 하나로는 안정 가능 여부의 판정이 불가능하나 다른 방법으로는 안정 가능을 판단할 수 있는 경우를 예제로 들었다.

$$A_i=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\quad b_i=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_i=D_i=I\qquad\qquad i=1,\ 2,\ 3$$

이라고 하고

$$E_{11}=\begin{bmatrix} 1&1&1 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{bmatrix}\quad E_{12}=\begin{bmatrix} 1&0&0 \\ 1&1&1 \\ 0&0&0 \end{bmatrix}\quad E_{13}=\begin{bmatrix} 1&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{bmatrix}$$

$$E_{21}=\begin{bmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{bmatrix}\quad E_{22}=\begin{bmatrix} 1&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{bmatrix}\quad E_{23}=\begin{bmatrix} 0&1&0 \\ 1&1&0 \\ 0&1&1 \end{bmatrix}$$

$$E_{31}=\begin{bmatrix} 1&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{bmatrix}\quad E_{32}=\begin{bmatrix} 1&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{bmatrix}\quad E_{33}=\begin{bmatrix} 0&1&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{bmatrix}$$

과 같이 주어진 경우, 각 부시스템의 eigenvalue가 $-\gamma$가 되도록 K_i를 정하면

$$K_i=[\,1-\gamma^3,\ \ 1-3\gamma^2,\ \ 1-3\gamma\,]\qquad i=1,\ 2,\ 3$$

과 같이 된다. 따라서

$$H_i(s)=\frac{1}{(s+\gamma)^3}\begin{bmatrix} s^2+3\gamma s+3\gamma^2 & -\gamma^3 & -s\gamma^3 \\ -s-3\gamma & s^2+3\gamma s & -3\gamma^2 s-\gamma^3 \\ 1 & s & s^2 \end{bmatrix}$$

$$i=1,\ 2,\ 3$$

과 같이 되어 본 논문의 정리 1을 적용하면

$$M=[m_{ij}]=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\infty & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

과 같이 되어 이 시스템이 안정 가능함을 알 수 있으나 Ikeda와 Siljak[4]의 정리(2. 9)을 적용하면

$$M=[m_{ij}]=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -9 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

과 같이 되어 이 시스템의 안정 가능 여부를 판정할 수 없게 된다.

이제 앞에서의 E_{11}과 E_{33}를 다음의 행렬로 바꾸고 다른 것들은 모두 동일한 경우를 고려하기로 한다.

$$E_{11}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E_{33}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

이 경우 K_i와 H_i, $i=1,2,3$,은 앞에서 구한 것과 동일하며 m_{ij}의 값중 m_{11}과 m_{33}의 값만이 바뀌게 된다.

본 논문의 정리 1을 적용하면

$$M=[m_{ij}]=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\infty & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

과 같이 되어 이 시스템의 안정 가능 여부를 판단할 수 없으나 Ikeda와 Siljak[4]의 정리(2. 9)를 적용하면

$$M=[m_{ij}]=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -9 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

과 같이 되어 이 시스템은 안정 가능함을 알 수 있다.

V. 結 論

이 논문에서는 Sezer와 Hüseyin[2]이 제시한 상호 연결된 대형 시스템을 분산 제어에 의하여 안정 가능하게 할 수 있는 충분 조건을 확장시키었다.

또한 Ikeda와 Siljak[4] 이 제시한 충분 조건을 이 논문의 정리를 증명하는데 사용한 것과 유사한 방법으로 증명할 수 있는 것을 보였다.

Ikeda와 Siljak의 경우는 다 입력 부시스템인 경우 이를 단일 입력의 가제어 형태로 변환시켜 주어야 하며 또한 변환 방법이 유일하지 않으므로 변환 방법에 따라 안정 가능하다는 결론을 얻을 수도 있고 아무런 결론을 얻지 못할 경우도 있다. 그러나 본 논문에서 제시한 방법을 사용하면 다 입력 부시스템의 형태를 그대로 사용하면 된다는 장점이 있다. 이 논문의 정리 1의 적용에 있어서 어려운 점은 조건 (7)의 판별에 있다. γ는 계산 과정을 통하여 계속 따라 다니며 또한 K 의 형태가 일반적으로 꼭 한 가지만 결정되지 않는다.

이 논문이 제시한 충분조건과 Ikeda와 Siljak이 제시한 충분조건은 서로 상대방 조건을 완전히는 포함하지 못하며 상호 보완하는 역할을 한다. 이러한 경우를 예를 통하여 보였다.

參 考 文 献

[1] "Special issue on large scale systems and decentralized control," *IEEE, Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-23, April 1978.

[2] M. E. Sezer and O. Hüseyin, "On decentralized stablization of interconnected systems," *Automatica*, vol. 16, no. 2, pp. 205-209, 1980.

[3] F. M. Callier, W. S. Chan and C. A. Desoer, "Input-output stability of interconnected systems," *IEEE, Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-23, pp. 150-163, April 1978.

[4] M. Ikeda and D. D. Siljak, "On decentrally stabilizable large scale systems," *Automatica*, vol. 16, no. 3, pp. 331-334, 1980.

[5] 이종수, *On Decentrally Stabilizable Interconnected Systems*, 석사학위 논문, 서울대 공과대학원, 1982.

[6] D. D. Siljak, *Large Scale Dynamic Systems*, North-Holland, 1978.