Technical Note

大韓造船學會誌
第9卷 第2號 1982年 6月
Journal of the Society of
Naval Architects of Korea
Vol. 19, No. 2, June 1982

均一斷面 Timoshenko보의 振動數方程式 및 基準函數에 관하여

金 極 天*·金 永 中**

A Note on the Frequency and Normal Mode Equations of Uniform Timoshenko Beams

by

K.C. Kim* · Y.J. Kim**

Abstract

The practical utilization of the frequency and normal mode equations of uniform Timoshenko beams such as those presented by Huang is not simple due to their highly trancendental nature.

In this note largely simplified equations obtained for the fixed-fixed and the free-free boundary conditions, the modes of which are separable into symmetric modes and antisymmetric ones, are given.

Numerical results obtained for six common-type boundary conditions show that the quantitative measure of the effect of rotary inertia and shear deformation on the natural frequency is greatly dependent upon the boundary conditions as well as the order number.

1. 緖 言

보의 橫振動에 대한 Bernoulli-Euler의 古典的 理論이 高次振動型 또는 大型斷面보의 振動計算에는 不適當하기 때문에 Rayleigh[1]***, Timoshenko[2, 3]이후 많은 사람들이 回轉慣性과 剪斷처짐 效果를 고려한 소위 Timoshenko보 理論에 입각하여 振動解析方法을 연구하여 왔다. 비교적 최근의 연구로서는 Huang[4], Grant[5]등이 境界條件이 固定, 單純支持, 自由의 여러 組合으로 이루어지는 경우에 대하여 振動數方程式과 基準函數를 提示한 바 있다.

보의 基準函數들은 보 및 보 類推構造體, 板類推構造體등의 振動計算에 많이 활용될 수 있다. 例를 들어 Young & Fegler[6]의 Euler보에 관한 資料는 이와같은 目的에 많은 寄與를 하고 있다. Timoshenko보의 경우에는 system parameter로서 回轉慣性과 剪斷剛性이 추가되기 때문에 Euler보에 대한 表에 準하는 精度높은 資料를 일괄적으로 마련하기는 어렵고, 그때 그때 方程式을 풀어서 활용하는 편이 현명하다고 믿어진다. 그런데 이 方程式들이 매우 복잡한 超越函數로 주어진다는데 數値計算上의 어려움이 있다.

이 報文에서는 振動型을 對稱型과 逆對稱型으로 區分할 수 있는 境界條件 즉, 固定—固定 및 自由—自由인 경우에 대하여 固有値問題를 처음부터 위와같이 區分하여 定式化함으로써 振動數方程式과 基準函數들을 보다 간단한 꼴로 귀착시켰다. 아울러 境界條件이 單純支持, 固定 및 自由의 組合으로 이루어지는 여섯가

接受年月日：1982年 5月 11日

* 正會員, 서울大工大

** 正會員, (前)서울大大學院生, (現)韓國機硏·大德船舶分所

*** [ ]內 數字는 本文末尾에 紹介한 參考文獻의 番號임.

지 基本型에 대하여 일련의 數値計算을 수행하여, 回轉慣性과 剪斷처짐效果가 固有振動數에 미치는 영향의 크기가 境界條件이나 振動次數에 따라 그 性向을 어떻게 달리하는가를 比較考察하였다.

2. 基本方程式, 境界條件 및 一般解

길이 L인 均一斷面 Timoshenko보에 대하여, 單位길이當質量과 回轉慣性을 m, J, 굽힘剛性係數와 剪斷剛性係數를 EI, kAG로 표기할 때, 固有振動에 있어서의 橫變位 $y(x,t)$ 및 굽힘기울기 $\phi(x,t)$에 관한 聯立微分方程式은 다음과 같이 주어진다[7].

$$EI\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+kAG\left(\frac{\partial y}{\partial x}-\phi\right)-J\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=0 \qquad (1)$$

$$kAG\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)-m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0 \qquad (2)$$

(1), (2)에서 y 또는 ϕ를 消去하고, 圓振動數 ω인 基準振動型에 대하여

$$y=Ye^{j\omega t},\quad \phi=\Psi e^{j\omega t},\quad (j=\sqrt{-1})$$

$$\xi=\frac{x}{L}\ ;\ (\text{無次元길이座標}) \qquad (3)$$

을 代入하면, 基準函數 $Y(\xi)$, $\Psi(\xi)$에 관한 다음과 같은 微分方程式을 얻을 수 있다.

$$Y''''+b^2(r^2+s^2)Y''-b^2(1-b^2r^2s^2)Y=0 \qquad (4)$$

$$\Psi''''+b^2(r^2+s^2)\Psi''-b^2(1-b^2r^2s^2)\Psi=0 \qquad (5)$$

여기서

$$b^2=\frac{m}{EI}L^4\omega^2 \qquad (6)$$

$$r^2=\frac{J}{m}L^{-2}\ ;\ (\text{慣性比}) \qquad (7)$$

$$s^2=\frac{EI}{kAG}L^{-2}\ ;\ (\text{剛性比}) \qquad (8)$$

이고, $'$은 ξ에 관한 微分을 뜻한다. 한편, 境界條件式들은 다음과 같다.

單純支持端에서 $Y=0,\ \Psi'=0$ (9)

固定端에서 $Y=0,\ \Psi=0$ (10)

自由端에서 $\Psi'=0,\ \dfrac{Y'}{L}-\Psi=0$ (11)

(4) 및 (5)의 一般解는

$$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\}=\sqrt{\frac{\mp(r^2+s^2)+[(r^2-s^2)+4/b^2]^{1/2}}{2}} \qquad (12)$$

로 정의되는 α가 實數일때와 α가 虛數일때를 구분하여 두개의 解를 취할 필요가 있다. 즉, 하나는

$$\sqrt{(r^2-s^2)+\frac{4}{b^2}}>(r^2+s^2)\quad \text{즉,}\ b^2r^2s^2<1 \qquad (13)$$

일때의

$$Y=C_1\cosh b\alpha\xi+C_2\sinh b\alpha\xi+C_3\cos b\beta\xi+C_4\sin b\beta\xi \qquad (14)$$

$$\Psi=C_1'\sinh b\alpha\xi+C_2'\cosh b\alpha\xi+C_3'\sin b\beta\xi+C_4'\cos b\beta\xi \qquad (15)$$

이고, 다른 하나는

$$\sqrt{(r^2-s^2)+\frac{4}{b^2}}<(r^2+s^2)\quad \text{즉,}\ b^2r^2s^2>1 \qquad (16)$$

일때의

$$Y=C_1\cos b\alpha'\xi+jC_2\sin b\alpha'\xi+C_3\cos b\beta\xi+C_4\sin b\beta\xi \qquad (17)$$

$$\Psi=jC_1'\sin b\alpha'\xi+C_2\cos b\alpha'\xi+C_3'\sin b\beta\xi+C_4'\cos b\beta\xi \qquad (18)$$

이다. (14), (15), (17), (18)에서

$$\alpha'=-j\alpha,\quad j=\sqrt{-1} \qquad (19)$$

$$\left.\begin{matrix}C_1'\\ C_2'\end{matrix}\right\}=\frac{b(\alpha^2+s^2)}{L\alpha}\left\{\begin{matrix}C_1\\ C_2\end{matrix}\right. \qquad (20)$$

$$\left.\begin{matrix}C_3'\\ C_4'\end{matrix}\right\}=\frac{b(\beta^2-s^2)}{L\beta}\left\{\begin{matrix}-C_3\\ C_4\end{matrix}\right. \qquad (21)$$

3. 振動數方程式 및 基準函數

이제 (14), (15) 또는 (17), (18)과 境界條件 (9), (10), (11)로부터 振動數方程式과 基準函數들이 결정될 수 있다. 模型의 基本型은 單純—單純支持(S−S), 固定—固定(C−C), 自由—自由(F−F), 單純—固定(S−C), 固定—自由(C−F), 自由—單純支持(F−S)의 여섯가지인데, 이들 중 S−S, C−C, F−F인 경우에는 振動型이 보의 中央點에 대하여 對稱型과 逆對稱型으로 區分된다. 그러나 S−S인 경우는 方程式들이 워낙 간단함으로 여기서는 C−C 및 F−F인 두 경우만을 다루기로 한다.

(1) 固定—固定 境界條件

振動數方程式:

$b^2r^2s^2<1$ 일 때

對稱型 $\tanh\dfrac{b\alpha}{2}=-\lambda\zeta\tan\dfrac{b\beta}{2}$ (22)

逆對稱型 $\tan\dfrac{b\beta}{2}=\lambda\zeta\tanh\dfrac{b\alpha}{2}$ (23)

$b^2r^2s^2>1$ 일 때

對稱型 $\tan\dfrac{b\alpha'}{2}=-\lambda'\zeta\tan\dfrac{b\beta}{2}$ (24)

逆對稱型 $\tan\dfrac{b\beta}{2}=-\lambda'\zeta\tan\dfrac{b\alpha'}{2}$ (25)

여기서

$$\lambda=\frac{\alpha}{\beta},\quad \lambda'=\frac{\alpha'}{\beta}\quad (\text{以下同}) \qquad (26)$$

$$\zeta=(\alpha^2+r^2)/(\alpha^2+s^2)=(\beta^2-s^2)/(\beta^2-r^2)$$
$$=(\alpha^2+r^2)/(\beta^2-r^2)=(\beta^2-s^2)/(\alpha^2+s^2) \quad (27)$$

基準函數$\left(-\frac{1}{2}\leq\xi\leq\frac{1}{2}\right)$:

$b^2r^2s^2<1$ 일 때

對稱型 $Y=D[\delta \cosh b\alpha\xi+\cos b\beta\xi]$

$\Psi=H[\theta\sinh b\alpha\xi+\sin b\beta\xi]$

逆對稱型 $Y=D[\mu\sinh b\alpha\xi+\sin b\beta\xi]$

$\Psi=H[\eta \cosh b\alpha\xi+\cos b\beta\xi]$ (29)

여기서

$$\delta=-\frac{\cos\frac{b\beta}{2}}{\cosh\frac{b\alpha}{2}}=\lambda\zeta\frac{\sin\frac{b\beta}{2}}{\sinh\frac{b\alpha}{2}}$$

$$\theta=-\frac{1}{\lambda\zeta}\delta$$

$$\mu=-\frac{\sin\frac{b\beta}{2}}{\sinh\frac{b\alpha}{2}}=-\lambda\zeta\frac{\cos\frac{b\beta}{2}}{\cosh\frac{b\alpha}{2}}$$

$$\eta=\frac{1}{\lambda\zeta}\mu$$

D, H: C_i, C_i' $(i=1,2,3,4)$에 의하여 결정되는 比例常數 (以下同)

$b^2r^2s^2>1$ 일 때

對稱型 $Y=D[\delta \cos b\alpha'\xi+\cos b\beta\xi]$

$\Psi=H[\theta\sin b\alpha'\xi+\sin b\beta\xi]$ (30)

逆對稱型 $Y=D[\mu \sin b\alpha'\xi+\sin b\beta\xi]$

$\Psi=H[\eta \cos b\alpha'\xi+\cos b\beta\xi]$ (31)

여기서

$$\delta=-\frac{\cos\frac{b\beta}{2}}{\cos\frac{b\alpha'}{2}}=\lambda'\zeta\frac{\sin\frac{b\beta}{2}}{\sin\frac{b\alpha'}{2}}$$

$$\theta=-\frac{1}{\lambda'\zeta}\delta$$

$$\mu=\frac{\sin\frac{b\beta}{2}}{\sin\frac{b\alpha'}{2}}=-\lambda'\zeta\frac{\cos\frac{b\beta}{2}}{\cos\frac{b\alpha'}{2}}$$

$$\eta=-\frac{1}{\lambda'\zeta}\mu$$

(2) **自由—自由境界條件**

振動數方程式:

$b^2r^2s^2<1$ 일 때

對稱型 $\lambda \tan\frac{b\beta}{2}=-\zeta \tanh\frac{b\alpha}{2}$ (32)

逆對稱型 $\lambda \tanh\frac{b\alpha}{2}=\zeta \tan\frac{b\beta}{2}$ (33)

$b^2r^2s^2>1$ 일 때

對稱型 $\lambda' \tan\frac{b\beta}{2}=-\zeta \tan\frac{b\alpha'}{2}$ (34)

逆對稱型 $\lambda' \tan\frac{b\alpha'}{2}=-\zeta \tan\frac{b\beta}{2}$ (35)

基準函數$\left(-\frac{1}{2}\leq\xi\leq\frac{1}{2}\right)$:

$b^2r^2s^2<1$일 때

對稱型 $Y=D[\delta \cosh b\alpha\xi+\cos b\beta\xi]$

$\Psi=H[\theta\sinh b\alpha\xi+\sin b\beta\xi]$ (36)

逆對稱型 $Y=D[\mu \sinh b\alpha\xi+\sin b\beta\xi]$

$\Psi=H[\eta \cosh b\alpha\xi+\cos b\beta\xi]$ (37)

여기서

$$\delta=\zeta\frac{\cos\frac{b\beta}{2}}{\cosh\frac{b\alpha}{2}}=-\lambda\frac{\sin\frac{b\beta}{2}}{\sinh\frac{b\alpha}{2}}$$

$$\theta=-\frac{1}{\lambda\zeta}\delta$$

$$\mu=\zeta\frac{\sin\frac{b\beta}{2}}{\sinh\frac{b\alpha}{2}}=\lambda\frac{\cos\frac{b\beta}{2}}{\cosh\frac{b\alpha}{2}}$$

$$\eta=\frac{1}{\lambda\zeta}\mu$$

$b^2r^2s^2>1$ 일때

對稱型 $Y=D[\delta \cos b\alpha'\xi+\cos b\beta\xi]$

$\Psi=H[\theta \sin b\alpha'\xi+\sin b\beta\xi]$ (38)

逆對稱型 $Y=D[\mu\sin b\alpha'\xi+\sin b\beta\xi]$

$\Psi=H[\eta \cos b\alpha'\xi+\cos b\beta\xi]$ (89)

여기서

$$\delta=\zeta\frac{\cos\frac{b\beta}{2}}{\cos\frac{b\alpha'}{2}}=-\lambda'\frac{\sin\frac{b\beta}{2}}{\sin\frac{b\alpha'}{2}}$$

$$\theta=-\frac{1}{\lambda'\zeta}\delta$$

$$\mu=\zeta\frac{\sin\frac{b\beta}{2}}{\sin\frac{b\alpha'}{2}}=-\lambda'\frac{\cos\frac{b\beta}{2}}{\cos\frac{b\alpha'}{2}}$$

$$\eta=-\frac{1}{\lambda'\zeta}\mu$$

振動數方程式으로 부터 b값이 결정되면 (6)으로부터 固有圓振動數 ω는

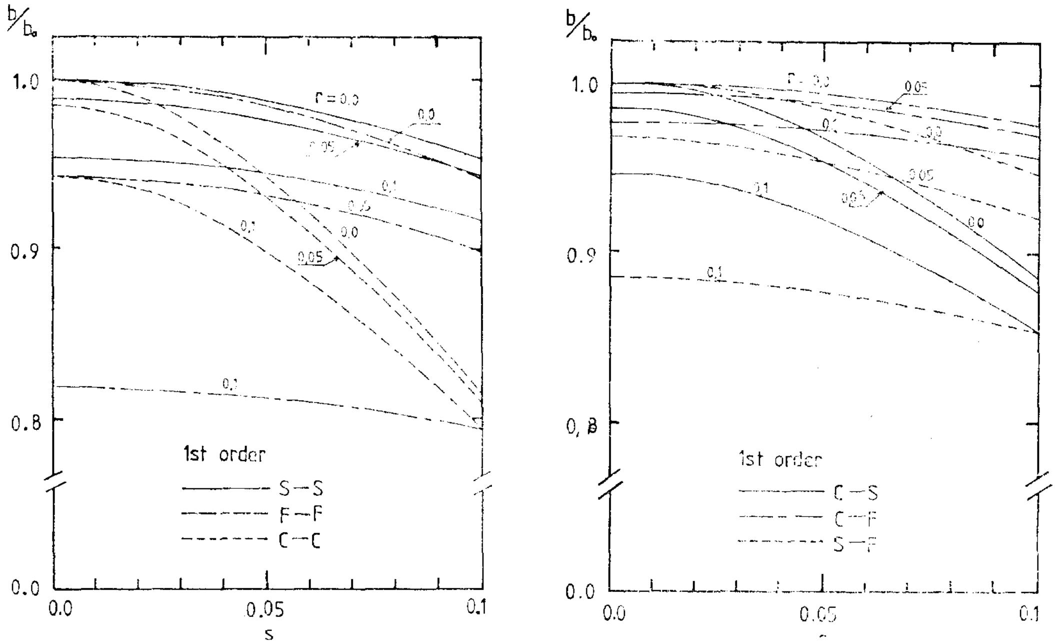
$$\omega=\frac{b}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (6')$$

에 의하여 산정되며, 아울러 해당 振動型에 대한 基準函數 Y, Ψ가 산정된다. Y'에 대한 剪斷처짐의 寄與分 Γ는

$$\Gamma=Y'-\Psi \quad (40)$$

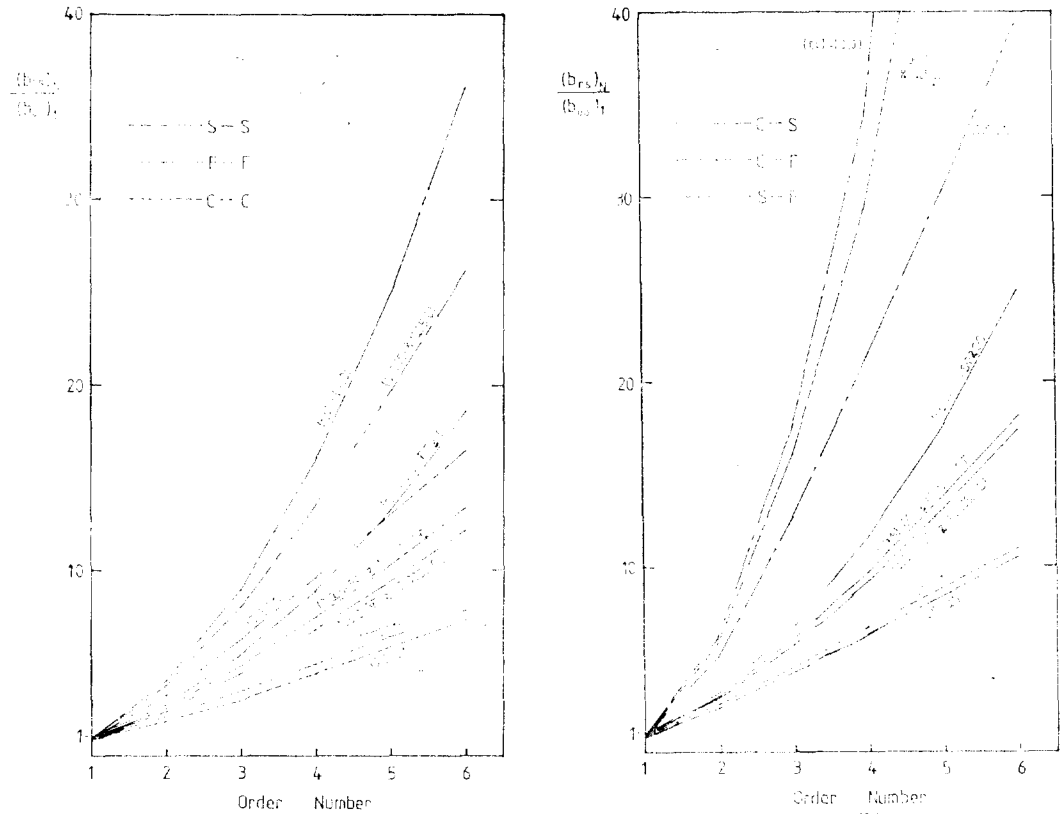
이다. 따라서 modal mass M_i 및 modal stiffeness K_i는 基準振動型의 直交性으로부터

$$\int_0^L\left(mY_i^2+J\Psi_i^2\right)dx=M_i \quad (41)$$



(a) (b)

Fig. 1. The effect of shear deformation and rotary inertia on the natural frequency.



(a) (b)

Fig. 2. The amplification degree of the effect of shear deformation and rotary inertia on natural frequencies in higher modes.

$$\int_0^L \left(EI\Psi_i^{2\prime} + kAG\ \Gamma_i^2 \right) dx = K_i = \omega^2_i M_i \qquad (42)$$

에 의하여 산정할 수 있다.

4. 數値計算例 및 考察

$r=s=0$ 때 즉, Euler보 理論에 입각한 b값을 b_0로 표기하면, 回轉慣性 및 剪斷처짐이 固有振動數에 미치는 영향을 b/b_0 値에 의하여 쉽게 파악할 수 있다.

解로서 $b^2r^2s^2>1$인 경우는 내용에 있어서 $\omega^2 > kAG/J$에 해당하며, 이는 매우 高次振動型에 해당한다. 例로서 直徑 d cm인 鋼製圓斷面보에 대하여 짚어보면 固有振動數가 大略 185,500/d Hz 以上인 振動型인 셈이다. 따라서 $b^2r^2s^2>1$인 경우는 그 實用的 有用性이 퍽 희박하다.

本文에서 다룬 C—C, F—F인 경우와 〔4〕에 주어진 S—S, C—S, C—F, S—F인 경우 즉, 여섯가지 基本境界條件에 대하여 $r, s=0$, 0.01, ……, 0.10 때의 b값을 6次振動型까지 計算한결과로부터 Fig. 1 및 Fig. 2를 마련하였다. 즉, Fig. 1은 基本振動型에 대한 境界條件別 r, s 對 b/b_0 曲線이고, Fig. 2는 r, s를 徑數로 한 境界條件別 振動次數 對 b/b_0 曲線이다. 이로부터 回轉慣性 및 剪斷처짐이 固有振動數에 미치는 영향이 境界條件이나 振動型의 次數에 따라 그 性向을 어떻게 달리하는가를 概觀할 수 있다.

어느 境界條件에서나 s 또는 r의 增加에 따른 固有振動數低下가 현저한데, s의 영향은 C—C 및 C—S에서 특히 두드러지고 r의 영향은 F—F 및 S—F에서 특히 두드러진다. 振動型의 次數와 관련하여서는 次數가 增加함에 따라 r, s의 영향이 급격히 增幅되는데 그 정도는 C—F 및 S—S에서 특히 두드러진다.

5. 結　　言

여기에 提示한 固定—固定 및 自由—自由境界條件에 대한 보다 간결한 꼴의 振動數方程式과 基準函數들이 보 또는 보 理論類推構造體의 振動解析에 있어서 計算運用上 많은 도움을 줄 것으로 믿어지며, 아울러 Fig. 1 및 Fig. 2는 回轉慣性 및 剪斷처짐效果가 固有圓振動數에 미치는 영향을 境界條件 및 振動次數別로 比較的觀點에서 定量的으로 파악하는데 도움을 줄 것으로 믿는다.

이 報文은 韓國科學財團의 硏究支援事業(1981)의 하나인 「基準振動型合成法에 의한 Timoshenko보 類推構造體의 强制橫振動解析에 관한 硏究」(未發表)의 일부이다. 同財團의 硏究費支援에 대하여 심심한 謝意를 표한다.

參考文獻

〔1〕 Lord Rayleigh, *Theory of Sound, Vol. 1* Second Edition, *Vol. 1*, Dover Publications, Inc., New York.

〔2〕 Timoshenko, S.P., "On the Correction for Shear of the Differential Equation for Transverse Vibrations of Prismatic Bars", *Phylosophical Magazine, Series 6, Vol. 41*, 1921.

〔3〕 Timoshenko, S.P., "On the Transverse Vibrations of Bars of Uniform Cross Sections," *Phylosophical Magazine, Series 6, Vol. 43*, 1922.

〔4〕 Huang, T.C., "The Effect of Rotary Inertia and of Shear Deformation on the Frequency and Normal Mode Equations of Uniform Beams with Simple End Conditions", *Journal of Applied Mechanics, Vol. 28, No. 4*, ASME, 1961.

〔5〕 Grant, D.A., "The Effect of Rotary Inertia and Shear Deformation on the Frequency and Normal Mode Equations of Uniform Beams Carraying a Concentrated Mass," *Journal of Sound and Vibration, Vol. 57(3)*, Academic Press Inc., Ltd., 1978.

〔6〕 Young, D. and Felgar, R.P., "Tables of Characteristic Functions Representing Normal Modes of Vibration of a Beam", *The Univ. of Texas Publication No. 4913*, 1949.

〔7〕 Meirovitch, L., *Analytical Methods in Vibrations*, The Macmillan Co., New York, 1967.