

計數選別型 二回 샘플링 檢査方式의 決定에 관한 研究

(On Designing Double Sampling Inspection Plans with Screening)

金 炳 在*

Abstract

On designing the rectifying inspection plans of double sampling, the relations of the sample sizes n_1, n_2 and the acceptance numbers c_1, c_2 are obtained by using the Chi-square distribution.

As the average number of pieces inspected per lot is a function of c_1 and c_2 , the optimal solution is the values of c_1^* and c_2^* for which the average amount of inspection is a minimum.

Then the values of n_1^* and n_2^* are easily obtained from the equations given by (n_1, n_2) and (c_1, c_2) .

適解를 求하는 問題를 研究하고자 한다.

1. 序 論

選別型 샘플링 檢査는 檢査로트에서 뽑은 샘플을 檢査하여 로트의 合格・不合格을 判定하며, 不合格된 로트는 全數檢査하는 샘플링 檢査方法이다.

H. F. Dodge 와 H. G. Romig 에 의해서 만들어진 計數選別型 샘플링 檢査는 消費者 危險率을 10%로 保證하면서 로트의 平均 檢査量을 最少化할 수 있도록 하는 샘플의 크기와 合格判定갯수를 決定하였는데, 消費者 危險率의 計算에는 二項分布를 適用하였다.¹⁾ 그런데, 二項分布는 不良率이 10% 이하이고 샘플의 크기가 클 때는 Poisson 分布를 使用할 수 있다. 그리고, Poisson 分布의 分布函數는 χ^2 分布를 利用해서 求할 수 있다.²⁾

따라서 本 研究에서는 二回 샘플링 檢査의 方式을 決定할 때 Poisson 分布와 χ^2 分布를 適用해서 最

2. 샘플링 檢査 方式의 決定

2.1 最少檢査量 샘플링 檢査模型

不良率이 P 인 로트에서 뽑은 n 개의 샘플 가운데서 m 개의 不良品이 나올 確率을 $P_{m,n,p}$ 라고 表示할 때 $\frac{n}{N} \leq 0.10$, $P < 0.10$ 인 경우에는 $P_{m,n,p}$ 의 값은 다음과 같이 計算된다. (N : 로트의 크기)

$$P_{m,n,p} = \binom{n}{m} (1-P)^{n-m} P^m \dots\dots\dots (1)$$

그런데, n 이 비교적 클 때는 (1)은 Poisson 分布를 使用하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$P_{m,n,p} \approx P_{m,np} = \frac{e^{-np} (np)^m}{m!} \dots\dots\dots (2)$$

(2)를 利用하면 二回 샘플링 檢査의 로트 合格確率 $L(P)$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$L(P) = \sum_{m=0}^{c_1} P_{m,n_1,p} + P_{c_1+1,n_1,p} \sum_{m=0}^{c_2-c_1-1} P_{m,n_2,p} + P_{c_1+2,n_1,p} \sum_{m=0}^{c_2-c_1-2} P_{m,n_2,p} + \dots\dots + P_{c_2,n_1,p} P_{0,n_2,p}$$

* 明知大學 工業經營學科 專任講師

- 1) H. F. Dodge, and H. G. Romig, Sampling Inspection Tables, 2nd Edition (John Wiley & Sons, Inc., 1959), pp. 33 ~ 43.
- 2) P. Peach, and S. B. Littauer, A Note on Sampling Inspection, Ann. Math. Statist., 17, 1946. pp. 81 ~ 84.

$$= \sum_{m=0}^{c_1} P_{m, n_1 p} + \sum_{m_1=c_1+1}^{c_2} \sum_{m_2=0}^{c_2-m_1} P_{m_1, n_1 p} \times P_{m_2, n_2 p} \dots (3)$$

단, n_1 : 第一回 檢査의 샘플의 크기

n_2 : 第二回 檢査의 샘플의 크기

c_1 : 第一回 檢査의 合格判定갯수

c_2 : 第一回 및 第二回의 累計 合格判定갯수

그리고 P_t = 로트許容不良率(LTPD)일 때 消費者 危險率을 10%로써 保證하므로 (3)을 利用해서 표시하면

$$L(P_t) = 0.10 \dots (4)$$

의 관계식을 얻게 된다.

不良率이 P 인 로트의 平均檢査量 I 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} I &= n_1 + n_2 \left\{ 1 - \sum_{m=0}^{c_1} P_{m, n_1 p} \right\} + (N - n_1 - n_2) \{ 1 - L(P) \} \\ &= N - (N - n_1) \sum_{m=0}^{c_1} P_{m, n_1 p} - (N - n_1 - n_2) \\ &\quad \times \sum_{m_1=c_1+1}^{c_2} \sum_{m_2=0}^{c_2-m_1} P_{m_1, n_1 p} \times P_{m_2, n_2 p} \dots (5) \end{aligned}$$

最適샘플링檢査方式을 決定하기 위해서는 (4)를 만족하는 샘플링方式中에서, $P=\bar{P}$ 일 때 (5)를 最少로 만드는 c_1, c_2, n_1, n_2 의 값을 구하면 된다.

따라서, 最少檢査量 샘플링檢査의 目的函數는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} 0.10 &= \sum_{m=0}^{c_1} P_{m, n_1 p_t} + \sum_{m_1=c_1+1}^{c_2} \sum_{m_2=0}^{c_2-m_1} P_{m_1, n_1 p_t} \times P_{m_2, n_2 p_t} \dots (6) \\ \text{Min } \bar{I} &= \text{Min}_{c_1, c_2, n_1, n_2} \left\{ N - (N - n_1) \sum_{m=0}^{c_1} P_{m, n_1 \bar{p}} \right. \\ &\quad \left. - (N - n_1 - n_2) \times \sum_{m_1=c_1+1}^{c_2} \sum_{m_2=0}^{c_2-m_1} P_{m_1, n_1 \bar{p}} \times P_{m_2, n_2 \bar{p}} \right\} \dots (7) \end{aligned}$$

2.2 c 와 n 의 關係式

二回 샘플링檢査인 까닭에 (6)과 (7)을 同時に 만족시키는 最適解를 決定하는 문제는 대단히 어려운 일이다. 따라서 첫回的 檢査에서 合格되는 比率을 60% 정도로 假定하면 (6)의 式은 다음과 같이 比較적 簡單한 形態로 주어진다.

$$\begin{aligned} L(P_t) &= \sum_{m=0}^{c_1} P_{m, n_1 p_t} + \sum_{m=0}^{c_2} P_{m, (n_1+n_2) p_t} \\ &\quad - \sum_{m_1=0}^{c_1} \sum_{m_2=0}^{c_2-m_1} P_{m_1, n_1 p_t} \times P_{m_2, n_2 p_t} \end{aligned}$$

여기서,

$$\left. \begin{aligned} \sum_{m=0}^{c_1} P_{m, n_1 p_t} &= 0.06, \\ \sum_{m=0}^{c_2} P_{m, (n_1+n_2) p_t} &= 0.06 \end{aligned} \right\} \dots (8)$$

일 때, $\sum_{m_1=0}^{c_1} \sum_{m_2=0}^{c_2-m_1} P_{m_1, n_1 p_t} \times P_{m_2, n_2 p_t} \cong 0.02$ 가 되어서, $L(P_t) \cong 0.10$ 을 만족시킬 수 있다.³⁾

이제 (6)式은 (8)式에 (2)式을 適用하여 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\left. \begin{aligned} \sum_{m=0}^{c_1} \frac{e^{-n_1 p_t} (n_1 p_t)^m}{m!} &= 0.06, \\ \sum_{m=0}^{c_2} \frac{e^{-(n_1+n_2) p_t} \{ (n_1+n_2) p_t \}^m}{m!} &= 0.06 \end{aligned} \right\} \dots (9)$$

이제 p_t 가 주어질 때 (9)를 만족시키는 (c_1, n_1) 과 (c_2, n_1+n_2) 의 關係式을 구하기 위해서 χ^2 分布를 適用해 보자. Poisson 累積分布는 χ^2 分布를 利用해서 計算될 수 있다.⁴⁾

$$\left. \begin{aligned} \sum_{m=0}^c \frac{e^{-\lambda} \lambda^m}{m!} &= P \\ \chi_{2c+2, 1-P}^2 &= 2\lambda \end{aligned} \right\} \dots (10)$$

$\lambda = np$ 이므로 (9), (10)에서

$$n_1 p_t = \frac{1}{2} \chi_{2c_1+2, 1-0.06}^2,$$

$$(n_1 + n_2) p_t = \frac{1}{2} \chi_{2c_2+2, 1-0.06}^2 \dots (11)$$

을 구할 수 있게 된다. 그런데, χ^2 分布는 自由度와 確率(P)에 依해서 決定되므로 n_1 과 (n_1+n_2) 의 값은 각각 c_1 과 c_2 의 函數가 된다. 따라서 $f(c_1) = n_1 p_t$, $f(c_2) = (n_1+n_2) p_t$ 로 놓으면 (11)에서 n_1 과 n_2 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\left. \begin{aligned} f(c_1) &= \frac{1}{2} \chi_{2c_1+2, 0.94}^2, \\ f(c_2) &= \frac{1}{2} \chi_{2c_2+2, 0.94}^2 \end{aligned} \right\} \dots (12)$$

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= \frac{1}{p_t} f(c_1), \\ n_2 &= \frac{1}{p_t} \{ f(c_2) - f(c_1) \} \end{aligned} \right\} \dots (13)$$

2.3 最適샘플링 方式의 決定

(13)에서 n_1 과 n_2 는 c_1 과 c_2 의 函數로써 주어지므로 (7)式 또한 c_1 과 c_2 의 函數가 된다.

3) Dodge, and Romig, lot. cit.

4) 金永輝, 公업통계학, 서울: 淸文閣, 1982, pp. 339 ~ 340.

$$\bar{I} = N - (N - n_1) \sum_{m=0}^{c_1} p_{m, n_1} \bar{p} - (N - n_1 - n_2) \sum_{m_1=c_1+1}^{c_2} \sum_{m_2=0}^{c_2-m_1} P_{m_1, n_1} \bar{p} \times P_{m_2, n_2} \bar{p}$$

윗식의 양변에 p_t 를 곱하고, $z(c_1, c_2) = p_t \bar{I}$, $M = p_t N$, $k = \frac{\bar{p}}{p_t}$ 라고 놓으면, (13)에서 $f(c_1) = n_1 p_t$, $f(c_2) = (n_1 + n_2) p_t$ 이므로 $n_1 \bar{p} = k f(c_1)$, $(n_1 + n_2) \bar{p} = k f(c_2)$ 가 되므로 $z(c_1, c_2)$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$z(c_1, c_2) = M - \left\{ M - f(c_1) \right\} \sum_{m=0}^{c_1} P_{m, k f(c_1)} - \left\{ M - f(c_2) \right\} \sum_{m_1=c_1+1}^{c_2} \sum_{m_2=0}^{c_2-m_1} P_{m_1, k f(c_1)} \times P_{m_2, k f(c_2) - k f(c_1)} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

여기서,

$$\left. \begin{aligned} g(c_1) &= \sum_{m=0}^{c_1} P_{m, k f(c_1)} \\ &= \sum_{m=0}^{c_1} \frac{e^{-k f(c_1)} \{k f(c_1)\}^m}{m!}, \\ h(c_1, c_2) &= \sum_{m_1=c_1+1}^{c_2} \sum_{m_2=0}^{c_2-m_1} P_{m_1, k f(c_1)} \times P_{m_2, k f(c_2) - k f(c_1)} \\ &= \sum_{m_1=c_1+1}^{c_2} \sum_{m_2=0}^{c_2-m_1} \frac{e^{-k f(c_1)} \{k f(c_1)\}^{m_1}}{m_1!} \times \frac{e^{-\{k f(c_2) - k f(c_1)\}} \{k f(c_2) - k f(c_1)\}^{m_2}}{m_2!} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

이라 놓으면 (14)식은 다음과 같이 M 에 관한 一次式으로 간단하게 주어진다.

$$z(c_1, c_2) = M \{1 - g(c_1) - h(c_1, c_2)\} + f(c_1) g(c_1) + f(c_2) h(c_1, c_2) \dots \dots \dots (16)$$

이제 (16)식을 使用해서 (7)을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{Min } \bar{I} &= \text{Min}_{c_1, c_2} \{z(c_1, c_2)\} \\ &= \text{Min}_{c_1, c_2} [M \{1 - g(c_1) - h(c_1, c_2)\} + f(c_1) g(c_1) + f(c_2) h(c_1, c_2)] \dots \dots \dots (17) \end{aligned}$$

$M = P_t N$ 이므로, 주어진 M 에 대한 (c_1, c_2) 의 最適値를 (17)에서 구하여 보자.

$c_1^* = a$, $c_2^* = b$ 일 때 $z(a, b)$ 가 最小値를 갖는 경우에는 다음과 같은 不等式을 만족하게 된다.

$$\left. \begin{aligned} \text{i) } a=0, b=1; & z(0, 1) < z(0, 2) \\ \text{ii) } a \geq 1, b=a+1; & z(a-1, b) > z(a, b), z(a, b) < z(a, b+1) \\ \text{iii) } a=0, b \geq 2; & z(0, b-1) > z(0, b), z(0, b) < z(0, b+1), z(0, b) < z(1, b) \\ \text{iv) } a \geq 1, b \geq a+2; & z(a-1, b) > z(a, b), z(a, b) < z(a+1, b), \\ & z(a, b-1) > z(a, b), z(a, b) < z(a, b+1) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (18)$$

그런데, $f(c)$ 와 $g(c_1)$ 는 각각 c, c_1 에 대하여 增加函數이고, $h(c_1, c_2)$ 는 c_2 에 대해서는 增加函數이지만, c_1 에 대해서는 減少函數이다. 이러한 特性을 利用하여, (17)과 (18)을 M 에 관하여 풀이하면 M 의 값은 a 와 b 의 값에 따라 다음과 같은 범위를 가진다.

$$\text{i) } a=0, b=1; 0 \leq M < \frac{f(2) \cdot h(0, 2) - f(1) \cdot h(0, 1)}{h(0, 2) - h(0, 1)} \dots \dots \dots (19-1)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ii) } a \geq 1, b=a+1; & M < \frac{f(b+1) \cdot h(a, b+1) - f(b) \cdot h(a, b)}{h(a, b+1) - h(a, b)}, \\ & M \{g(a) - g(a-1) + h(a, b) - h(a-1, b)\} \geq f(a) g(a) \\ & - f(a-1) g(a-1) + f(b) \{h(a, b) - h(a-1, b)\} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (19-2)$$

$$\begin{aligned} \text{iii) } a=0, b \geq 2; \\ \frac{f(b) \cdot h(0, b) - f(b-1) \cdot h(0, b-1)}{h(0, b) - h(0, b-1)} \leq M < \frac{f(b+1) \cdot h(0, b+1) - f(b) \cdot h(0, b)}{h(0, b+1) - h(0, b)}, \end{aligned} \quad \left. \dots \dots \dots (19-3) \right\}$$

$$M\{g(1)-g(0)+h(1,b)-h(0,b)\} < f(1)g(1)-f(0)g(0)+f(b)\{h(1,b)-h(0,b)\}$$

iv) $a \geq 1, b \geq a+2$;

$$\left. \begin{aligned} \frac{f(b) \cdot h(a,b) - f(b-1) \cdot h(a,b-1)}{h(a,b) - h(a,b-1)} &\leq M < \frac{f(b+1)h(a,b+1) - f(b) \cdot h(a,b)}{h(a,b+1) - h(a,b)}, \\ M\{g(a)-g(a-1)+h(a,b)-h(a-1,b)\} &\geq f(a)g(a)-f(a-1)g(a-1)+f(b) \\ &\times \{h(a,b)-h(a-1,b)\}, \\ M\{g(a+1)-g(a)+h(a+1,b)-h(a,b)\} &< f(a+1)g(a+1)-f(a)g(a)+f(b) \\ &\times \{h(a+1,b)-h(a,b)\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)-4$$

(19)-1, (19)-2, (19)-3, (19)-4에서, $M = P_t N$ 값을 포함하는 $c_1^* = a$, $c_2^* = b$ 를 구할 수 있고, (13)식에서 n_1^* , n_2^* 의 값을 결정할 수 있다.

임을 구할 수 있다. 따라서 最適 샘플링 方式은 $n_1 = 90$, $c_1 = 1$, $n_2 = 190$, $n_1 + n_2 = 280$, $c_2 = 8$ 이 된다.

2. 4 例 示

例로써, $N = 5000$, $P_t = 0.05$, $\bar{P} = 0.01$ 인 境遇에 대한 二回 샘플링 檢査 方式을 求해 보기로 한다. (12)에서 $f(c)$, $c = 0, 1, 2, \dots$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f(0) &= 2.81, f(1) = 4.52, f(2) = 6.04, \\ f(3) &= 7.48, f(4) = 8.86, f(5) = 10.20, \\ f(6) &= 11.51, f(7) = 12.80, f(8) = 14.07, \\ f(9) &= 15.32, f(10) = 16.57, \dots \end{aligned}$$

$$k = \frac{\bar{p}}{p_t} = 0.20 \text{ 이므로 (15)에서 } g(c_1) \text{과 } h(c_1, c_2)$$

를 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} g(0) &= 0.57, g(1) = 0.77, g(2) = 0.88, \\ g(3) &= 0.93, g(4) = 0.97, g(5) = 0.98, \\ g(6) &= 0.99, g(7) = 1.0, g(8) = 1.0, \dots \\ h(0,1) &= 0.23, h(0,2) = 0.32, h(0,3) = 0.37, \\ h(0,4) &= 0.40, h(0,5) = 0.41, \dots \\ h(1,2) &= 0.12, h(1,3) = 0.17, h(1,4) = 0.20, \\ h(1,5) &= 0.21, h(1,6) = 0.22, h(1,7) = 0.23, \\ h(1,8) &= 0.23, \dots \\ h(2,3) &= 0.07, h(2,4) = 0.09, h(2,5) = 0.11, \\ &\dots \end{aligned}$$

여기서, (19)의 관계식을 이용하여 c_1^* , c_2^* 의 크기에 대한 M 의 存在範圍를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} c_1^* &= 0, c_2^* = 1; 0 \leq M < 9.6 \\ c_1^* &= 0, c_2^* = 2; 9.6 \leq M < 16.8 \\ c_1^* &= 0, c_2^* = 3; 16.8 \leq M < 28.3 \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_1^* &= 1, c_2^* = 7; 87.9 \leq M < 157.0 \\ c_1^* &= 1, c_2^* = 8; 157.0 \leq M < 299.0 \end{aligned}$$

여기서, $M = N \times P_t = 5000(0.05) = 250.0$ 이므로 $c_1^* = 1$, $c_2^* = 8$ 이 된다. 그리고, (13)에서 $n_1 = \frac{f(1)}{p_t} \cong 90$, $n_2 = \frac{1}{p_t} \{f(8) - f(1)\} \cong 190$

3. 結 論

本 研究에서는 $p < 0.10$, $n \rightarrow \infty$ 인 境遇에 있어서의 選別型 二回 샘플링 檢査 方式을 決定하는 問題를 檢討하였다. Poisson 分布 函數에 대하여 χ^2 分布를 利用함으로써 로트 平均 檢査量의 式을 c_1 과 c_2 의 函數로써 나타낼 수 있었으며, 平均 檢査量을 最少로 하는 c_1^* 과 c_2^* 를 求함으로써 n_1^* 과 n_2^* 의 값을 決定할 수 있었다.

本 研究에서는 計算을 간단히 하기 위해서 二項 分布 代身에 Poisson 分布를 使用해서 샘플링 方式을 求했으므로, 로트의 크기가 비교적 큰 境遇에 限하여 使用함이 옳을 것이다.

參 考 文 獻

- 1) 金永輝, 公업통제학, 서울: 淸文閣, 1982.
- 2) Dodge, H. F., and Romig, H. G., Sampling Inspection Tables, 2nd ed., John Wiley & Sons, Inc., 1959.
- 3) Duncan, Quality Control and Industrial Statistics, 4th ed., Richard D. Irwin, Inc., 1974.
- 4) Hald, A., "The Determination of Single Sampling Attribute Plans with Given Producer's and Consumer's Risk", Technometrics, Vol. 9, 401-415, 1967.
- 5) IBM System/360 Scientific Subroutine Package, 5th ed., IBM, 1968.
- 6) Peach, P. and Littauer, "A Note on Sampling Inspection", Ann. Math. Statist., 17, 81-84, 1946.