

一定加速도의 移動荷重과 軸荷重이 作用하는 有限보의 動特性

Dynamic Characteristics of a Finite Beam Subjected to an Axial Force and Moving Loads with Constant Acceleration

洪 桐 杓*
Hong, Dong Pyo

Abstract

The dynamic behaviour of an elastically supported finite beam subjected to an axial force and moving loads with acceleration is investigated.

Within the Euler beam theory the solutions are obtained by using finite Fourier and Laplace transformation methods with respect to space and time variable. Integrations involved in the theoretical results are carried out by Simpson's rule.

From the results of the theoretical analysis, it is evident that dynamic behaviour of the beam are affected remarkably by acceleration and axial force.

要 旨

一定加速도의 移動荷重과 軸荷重이 作用하는 彈性基礎위에 支持된 有限보의 動特性을 研究하였다.

Euler보 理論을 利用하여서 空間座標에 關하여는 Fourier 變換을 하고 時間에 關하여는 Laplace 變換을 하여 解를 求하였다.

理論解析 結果에 包含된 積分은 Simpson's Rule에 의하여 求하였다.

理論解析 結果로부터 보의 動特性은 加速度와 軸荷重에 의하여 크게 影響을 받는다는 것을 밝혔다.

1. 序 論

高度의 産業化와 더불어 빠른 運送方法이 繼續的으로 開發되고 있으며 앞으로 到來할 宇宙 航空時代에 즈음하여 超高速으로 移動荷重이 作用하는 로켓트 發射臺等の 設計에서 移動荷重으로 인한 影響을 無視할 수 없게 되었다.

一定速度의 移動荷重을 받는 보의 動特性은 L. Fryb⁽¹⁾가 Winkler의 假定에 의하여 求하였고, A.L. Florence⁽²⁾ C.R. Steele^(3,4)은 剪斷力과 回

轉慣性力의 效果를 考慮하였으며 J.J. Kenny⁽⁵⁾와 J.D. Achenbach와 C.T. Sun⁽⁶⁾은 粘性減衰 效果를 研究하였고, A.D. Kerr⁽⁷⁾과 S. Chonan⁽⁸⁾은 軸荷重의 影響을 研究하였다. 그後 S.I. Suzuki⁽⁹⁾는 單純보가 一定加速도의 移動荷重을 받는 境遇 그 應答을 에너지法으로 求하였고 그 結果보의 動特性이 加速度로 인하여 큰 影響을 받는다는 것을 알게 되었다.

本 研究는 A.D. Kerr의 論文과 最近 發行된 S.I. Suzuki의 論文에서 動起를 찾게되어 軸荷重을 받는 보에서 荷重이 加速度를 가지고 通過할

* 漢陽大學校 大學院

때 보의 動特性을 研究하였다.

實際로 橋梁, 構造物의 乾燥 過程에서 軸荷重을 받는 보가 利用되고 있으며 移動荷重의 加速度 問題는 定常速度로 運行하기 까지 增速되는 過程, 停止하고자 할 때 減速되는 過程, 變速時 반드시 나타나므로 이와같은 動荷重이 加해지고 軸荷重을 받는 보에 대한 動物性의 糾明은 重要하며 設計時 充分히 考慮되어야 할 것이다.

보의 運動方程式의 解는 Euler보의 理論을 利用하여서 空間座標에 대하여는 Fourier 變換을 하고, 時間에 대하여는 Laplace 變換을 하여 求하였고, 解에 包含된 積分은 Simpson's rule 에 의하여 數值積分하였다.

初期速度, 加速度, 軸荷重, 彈性係數가 보의 처짐에 미치는 影響을 仔細하게 研究하였다.

2. 理論解析

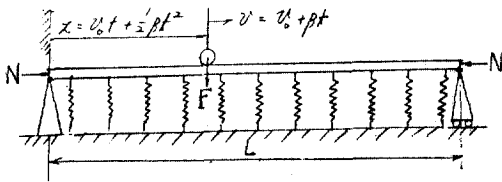


그림 a

本論文의 次元과 座標는 그림 a와 같다. 荷重 F 는 $x=0$ 에서 速度 $v_0 + \beta t$ 로 出發하고, v_0 와 β 는 各各 初期速度와 加速度를 나타낸다. 다음과 같이 假定하여 一定加速度의 荷重을 받고 軸荷重이 作用하는 彈性基礎위에 支持된 有限보의 運動方程式을 求하면 다음과 같다.

1. 보의 材料는 等方性과 均質性을 가지고 應力과 變形率關係는 線型的이다.

2. Bernoulli-Euler보로서 剪斷力과 回轉慣性은 無視한다.

3. 荷重이 移動할 때 보에 發生하는 摩擦과 減衰는 無視한다.

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + kw = F \delta \left\{ x - \left(v_0 t + \frac{1}{2} \beta t^2 \right) \right\} \quad (1)$$

여기서 EI 는 보의 굽힘 剛性係數 N 은 軸荷重 ρA 는 單位 길이當의 보의 質量 k 는 基礎의 單位

길이當의 彈性係數이며, 集中荷重으로 간주한 移動荷重 F 는 Dirac's delta function으로 表示되고, 初期速度 v_0 와 加速度 β 로 보 위를 移動한다.

式(1)은 無次元 變數 $\xi = \frac{x}{L}$ 와 $T = (t/L^2)$

$\sqrt{EI/\rho A}$ 를 導入하여 無次元化 하면

$$\frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + \pi \alpha \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial T^2} + \pi^4 k^* w = \frac{FL^4}{EI} \delta \left\{ L\xi - L \left(\lambda T + \frac{1}{2} \eta T^2 \right) \right\} \quad (2)$$

여기서 變數는 다음과 같다.

$$\alpha = \frac{N}{N_{cr}}, \quad N_{cr} = \frac{EI\pi^2}{L^2}, \quad k^* = \frac{kL^4}{EI\pi^4},$$

$$\lambda = v_0 L (\rho A / EI)^{1/2}, \quad \eta = \beta L^3 \rho A / EI$$

式(1)은 ξ 에 관한 finite Fourier sine變換을 하며 다음과 같이 定義한다.

$$\bar{w}(n, T) = \int_0^1 w(\xi, T) \sin n\pi\xi \cdot d\xi \quad (3)$$

$$w(\xi, T) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \bar{w}(n, T) \sin n\pi\xi \quad (4)$$

偏微分方程式 (2)를 變換하여 整理하면

$$\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial T^2} + \pi^4 (n^4 - \alpha n^2 + k^*) \bar{w} = \left[n\pi \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} w(\xi, T) \cos n\pi\xi + n\pi^3 \alpha w(\xi, T) \cos n\pi - (n\pi)^3 w(\xi, T) \cos n\pi\xi \right]_0^1 + \frac{FL^3}{EI} \cdot \sin n\pi \left(\lambda T + \frac{1}{2} \eta T^2 \right) \quad (5)$$

이式에서 兩端 單純支持된 境遇를 考慮하면 境界條件은 다음과 같다.

$$w(\xi, T) \Big|_{\xi=0} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} (\xi, T) \Big|_{\xi=0} = 0, \quad w(\xi, T) \Big|_{\xi=1} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} (\xi, T) \Big|_{\xi=1} = 0 \quad (6)$$

위 境界條件式 (6)을 式(5)에 代入하면

$$\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial T^2} (n, T) + \pi^4 (n^4 - \alpha n^2 + k^*) \bar{w}(n, T) = \bar{q}(n, T) \quad \bar{q}(n, T) = \frac{FL^3}{EI} \cdot \sin n\pi \left(\lambda T + \frac{1}{2} \eta T^2 \right) \quad (7)$$

式(7)을 T 에 관한 Laplace 變換을 하고 다음과 같이 定義한다.

$$\bar{W}(n, S) = \int_0^{\infty} \bar{w}(n, T) e^{-ST} dT \quad (8)$$

$$\bar{w}(n, T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \bar{W}(n, S) \cdot e^{ST} \cdot dS \quad (9)$$

위 定義에 依하여 式(7)을 變換하면

$$S^2 \bar{W}(n, S) - S \cdot \bar{w}(n, 0) - \frac{\partial \bar{w}}{\partial T} (n, 0) + \pi^4 (n^4 - \alpha n^2 + k^*) \bar{W} = \bar{Q}(n, S) \quad (10)$$

$$\bar{Q}(n, S) = \mathcal{L} \{ \bar{q}(n, T) \}$$

初期條件은 $\bar{w}(n, 0) = 0$, $\frac{\partial \bar{w}}{\partial t}(n, 0) = 0$ 이며 위
式에 代入하여 整理하면

$$\bar{W}(n, S) = \frac{1}{S^2 + \pi^4(n^4 - \alpha n^2 + k^*)} \bar{Q}(n, S) \quad (11)$$

convolution theorem을 利用하여 逆變換하면

$$\bar{w}(n, T) = \frac{FL^3}{EI\pi^2(n^4 - \alpha n^2 + k^*)^{\frac{1}{2}}} \left[\sin \pi^2(n^4 - \alpha n^2 + k^*)^{\frac{1}{2}} T \int_0^T \{ \cos \pi^2(n^4 - \alpha n^2 + k^*)^{\frac{1}{2}} \tau \sin \pi \pi (\lambda \tau + \frac{\eta}{2} \tau^2) \} d\tau - \cos \pi^2(n^4 - \alpha n^2 + k^*)^{\frac{1}{2}} T \int_0^T \{ \sin \pi^2(n^4 - \alpha n^2 + k^*)^{\frac{1}{2}} \tau \cdot \sin \pi \pi (\lambda T + \frac{\eta}{2} \tau^2) \} d\tau \right] \quad (12)$$

式(4)로부터 $w(\xi, T)$ 를 求하면

$$w(\xi, T) / \frac{2FL^3}{\pi^4 EI} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2 \cdot \sin \pi \xi}{(n^4 - \alpha n^2 + k^*)^{\frac{1}{2}}} \left[\sin \pi^2(n^4 - \alpha n^2 + k^*)^{\frac{1}{2}} T \int_0^T \{ \cos \pi^2(n^4 - \alpha n^2 + k^*)^{\frac{1}{2}} \tau \cdot \sin \pi \pi (\lambda \tau + \frac{\eta}{2} \tau^2) \} d\tau - \cos \pi^2(n^4 - \alpha n^2 + k^*)^{\frac{1}{2}} T \int_0^T \{ \sin \pi^2(n^4 - \alpha n^2 + k^*)^{\frac{1}{2}} \tau \cdot \sin \pi \pi (\lambda T + \frac{\eta}{2} \tau^2) \} d\tau \right] \quad (13)$$

荷重이 一定速度로 움직일 때 ($\eta=0$) 式(13)
의 右式을 T 에 關해 積分하고 整理하면

$$w(\xi, T) / \frac{2FL^3}{\pi^4 EI} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi \cdot \sin \pi \xi}{(n^4 - \alpha n^2 + k^*)^{\frac{1}{2}} \{ n^2 \lambda^2 - \pi^2(n^4 - \alpha n^2 + k^*) \}} \times \left[n \lambda \cdot \sin \pi^2(n^4 - \alpha n^2 + k^*)^{\frac{1}{2}} T - \pi(n^4 - \alpha n^2 + k^*)^{\frac{1}{2}} \cdot \sin \pi \lambda T \right] \quad (14)$$

$\lambda = \frac{\pi}{n}(n^4 - \alpha n^2 + k^*)$ 인 境遇에는

$$w(\xi, T) / \frac{2FL^3}{\pi^4 EI} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi \xi}{2(n^4 - \alpha n^2 + k^*)} \times \left[\sin \pi^2(n^4 - \alpha n^2 + k^*)^{\frac{1}{2}} T - \pi^2(n^4 - \alpha n^2 + k^*)^{\frac{1}{2}} T \cos \pi^2(n^4 - \alpha n^2 + k^*)^{\frac{1}{2}} T \right] \quad (15)$$

3. 數値解析에 의한 結果 및 考察

本 研究에서는 設計時 가장 重要한 보의 最大
처짐에 關해 다음 4가지 境遇를 考察하였다.

- I) $k^*=0$, $\alpha=0$ 이고 荷重이 一定速度로 移動할
때
- II) $k^*=0$, $\alpha=0$ 이고 荷重이 一定加速度로 移動
할 때
- III) $\alpha=0$, k^* 가 一定하고 荷重이 一定速度로 移
動할 때
- IV) $k^*=0$, α 가 一定하고 荷重이 一定速度로 移
動할 때

上記에서 얻어진 結果들을 綜合하여 $\lambda, \eta, \alpha, k^*$
에 따른 最大처짐 結果를 圖表로 나타내었다.

數値解析은 Simpson's rule에 의하여 프로그램
하여 얻었고 各 數値는 無次元 變數를 利用하였
으며 電子計算機는 IBM 370을 使用하였다.

보의 길이는 有限하기 때문에 T 의 範圍는 $0 \leq T \leq T_c$ 이며 T_c 는 荷重이 $\xi=0$ 에서 1까지 到達하
는데 必要한 時間이다.

T_c 와 $T=T_c$ 에서의 速度 v_c 는 다음과 같다.

$$T_c = \{-\lambda + (\lambda^2 + 2\eta)^{1/2}\} / \eta$$

$$v_c L(EI/\rho A)^{-1/2} = (\lambda^2 + 2\eta)^{1/2}$$

加速度가 (-)인 境遇는 $(-2\eta)^{1/2}$ 보다 커야
하며, $\eta=0$ 인 境遇에 대하여 T_c 는 $\frac{1}{\lambda}$ 이다.

(1) $k^*=0$, $\alpha=0$ 이고 荷重이 一定速度로 移動할
때

$\eta=0$, $k^*=0$, $\alpha=0$, $\lambda=0.8, 1, 1.5, 2, 3, 4$
로 移動할 때 처짐과 時間과의 關係를 圖表로 나
타내면 그림 1과 같다.

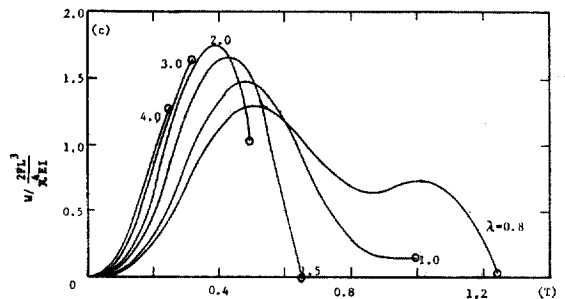


그림 1. Relationships between T and W at $\xi=0.5$
for $\eta=0$, $k^*=0$ and $\alpha=0.0$

"0"는 荷重이 $\xi=1$ 에 到達하는데 걸리는 時間
에 대한 처짐을 나타낸다.

移動速度와 最大처짐과의 關係를 表로 나타내
면 다음과 같다.

λ	0.8	1	1.5	2	3	4
$W_{max} / \frac{2FL^3}{\pi^4 EI}$	1.29	1.47	1.70	1.75	1.60	1.28

速度가 增加하면 最大처짐도 增加하는 어떤 速度를 넘어서면 減少하기 始作한다. 이때의 速度를 여기서 臨界速度 v_{cr} (critical velocity)라고 定義한다. 이 境遇에는 $\lambda_{cr} \approx 2$ 가 됨을 알 수 있다.

(2) $k^*=0, \alpha=0$ 이고 荷重이 一定加速度로 移動할 때

$k^*=0, \alpha=0, \lambda=1$. 荷重이 一定加速度 $\eta=0, 2, 4$ 로 移動할 때 時間과 처짐과의 關係를 圖表로 나타내면 그림 2와 같다. “○”, “●”는 各各 荷重이 $\xi=1$ 과 $\xi=0.5$ 에 到達할 때 時間에 대한 처짐을 나타낸다.

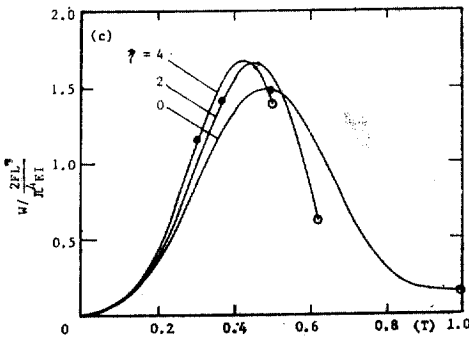


그림 2. Relationships between T and W at $\xi=0.5$ for $\lambda=1, k^*=0$ and $\alpha=0.0$

加速度와 最大처짐과의 關係를 表로 나타내면 다음과 같다.

η	0	2	4
$W_{max} / \frac{2FL^3}{\pi^4 EI}$	1.47	1.64	1.67

보의 動特性은 加速度의 影響을 크게 받는 것을 알 수 있다.

(3) $\alpha=0, k^*$ 가 一定하고 荷重이 一定速度로 移動할 때

$\alpha=0, \lambda=1, \eta=0, k^*=0, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 1.0$ 일 때 時間과 처짐과의 關係를 圖表로 나타내면 그림 3과 같다.

無次元 彈性係數 k^* 와 最大처짐과의 關係를 表로 나타내면 다음과 같다.

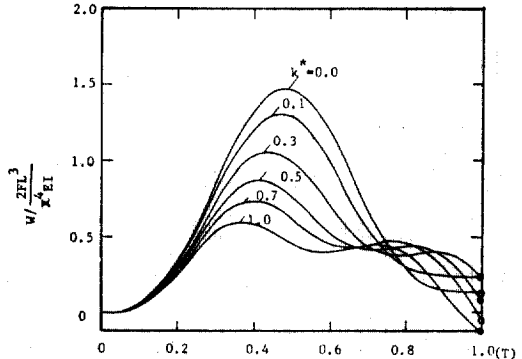


그림 3. Relationships between T and W at $\xi=0.5$ for $\lambda=1, \eta=0, \alpha=0$ and Various k^*

k^*	0	0.1	0.3	0.5	0.7	1.0
$W_{max} / \frac{2FL^3}{\pi^4 EI}$	1.47	1.31	1.06	0.87	0.74	0.59

k^* 가 增加하면 最大처짐은 漸次 減少함을 알 수 있다.

(4) $k^*=0, \alpha$ 가 一定하고 荷重이 一定速度로 移動할 때

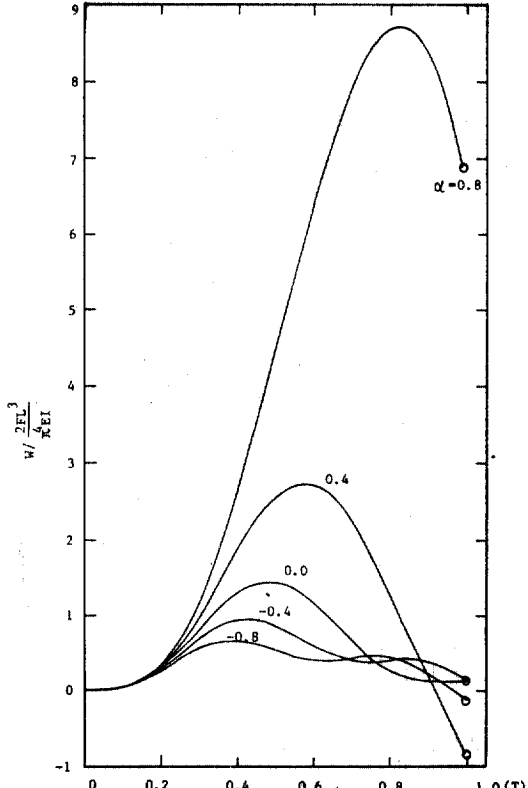


그림 4. Relationships between T and W at $\xi=0.5$ for $\lambda=1, \eta=0, k^*=0$ and Various α .

$k^*=0, \lambda=1, \eta=0, \alpha=-0.8, -0.4, 0, 0.4, 0.8$ 일 때 시간과 처짐과의 관계를 圖表로 나타내면 그림 4와 같다.

軸荷重係數 α 와 最大처짐과의 관계를 表로 나타내면 다음과 같다.

α	-0.8	-0.4	0	0.4	0.8
$W_{max} / \frac{2FL^3}{\pi^4 EI}$	0.68	0.95	1.47	2.73	8.72

軸壓縮力 (+)를 增加함에 따라 처짐은 크게 增加하며 反對로 軸引張力(-)을 增加하면 反對效果가 나타난다.

k^* 와 最大처짐과의 관계를 $\eta=0, \lambda=1, 2, 3, 4, 5$ 에 대하여 圖表로 나타내면 그림 5와 같다.

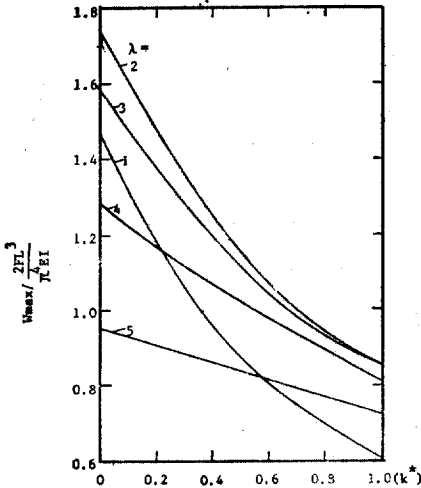


그림 5. Relationships between k^* and W_{max} at $\xi=0.5$ for $\eta=0, \alpha=0$ and Various λ .

작은 λ 에 대하여는 k^* 가 增加하면 급격하게 減少되며 큰 λ 에서는 완만하게 減少한다.

α 와 最大처짐과의 관계를 $\eta=0, k^*=0, \lambda=1, 2, 3, 4, 5$ 에 대하여 圖表로 나타내면 그림 6과 같다.

작은 λ 에 대하여는 α 가 增加하면 급격하게 增加하며 큰 λ 에서는 완만하게 增加함을 알 수 있다.

따라서 比較的 느린 速度에서 軸壓縮力(+)의 影響을 크게 받음을 알 수 있다.

無次元 移動速度 λ 와 最大처짐과의 관계가 $\eta=4, 2, 0, -2, -4$ 에 대하여 $k^*=0, \alpha=-0.8$,

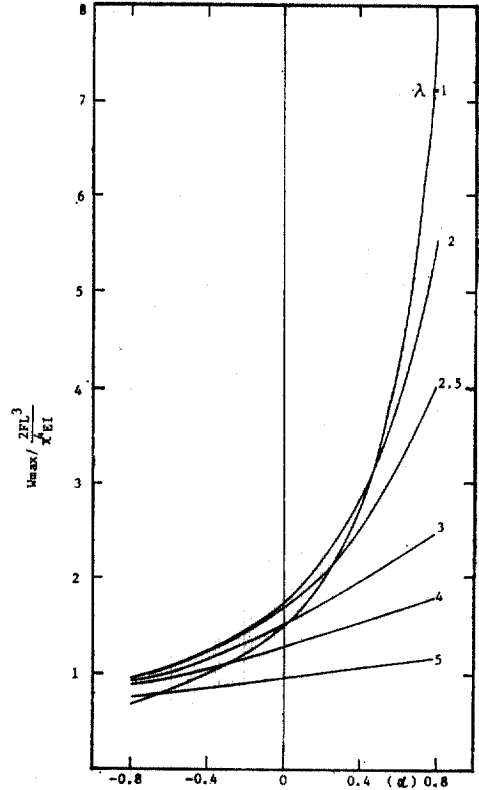


그림 6. Relationships between α and W_{max} at $\xi=0.5$ for $k^*=0, \eta=0$ and Various λ .

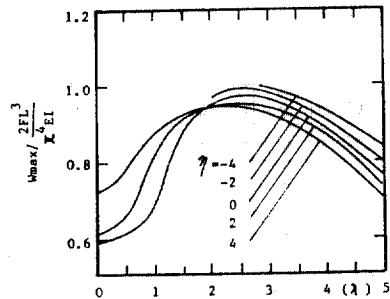


그림 7. Relationships between λ and W_{max} at $\xi=0.5$ for $k^*=0, \alpha=-0.8$ and Various η .

-0.4, 0, 0.4, 0.8. 各各의 境遇에 對하여 圖表로 나타내면 그림 7~11이 된다.

λ 의 값이 커지면 最大처짐은 增加하다가 最大值에 到達한 다음에 減少하는 것을 알 수 있다.

처짐이 最大가 되는 臨界速度 λ_{cr} 은 현저하게 加速度(η)와 軸荷重係數(α)의 影響을 받는 것을 알 수 있으며 λ_{cr} 은 α 와 η 가 增加하면 작아지는 것을 알 수 있다.

$\eta=0$ 인 境遇 各 α 에 따른 λ_{cr} 과 그때의 最大처

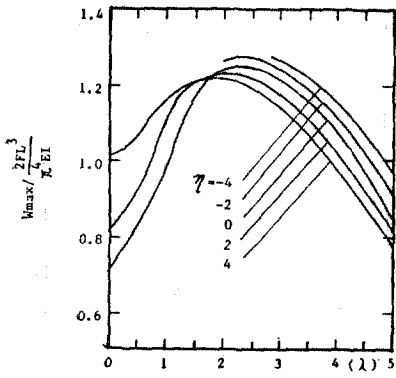


그림 8. Relationships between λ and W_{max} at $\xi=0.5$ for $k^*=0$, $\alpha=-0.4$ and Various η .

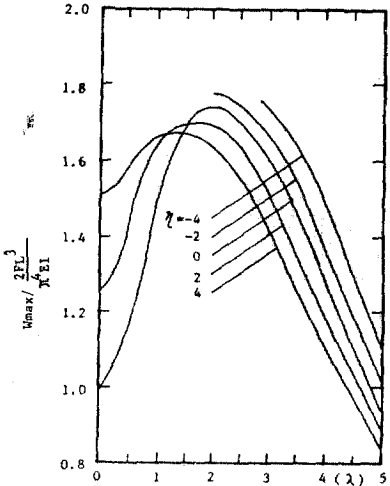


그림 9. Relationships between λ and W_{max} at $\xi=0.5$ for $k^*=0$, $\alpha=0$ and Various η .

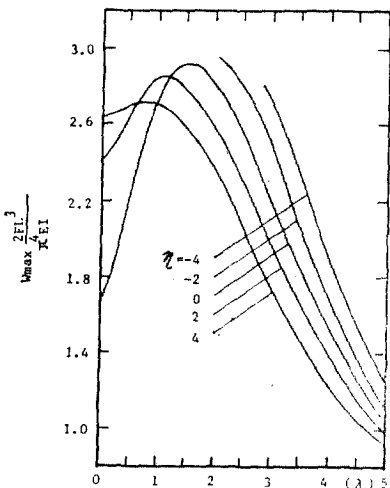


그림 10. Relationships between λ and W_{max} at $\xi=0.5$ for $k^*=0$, $\alpha=0.4$ and Various η .

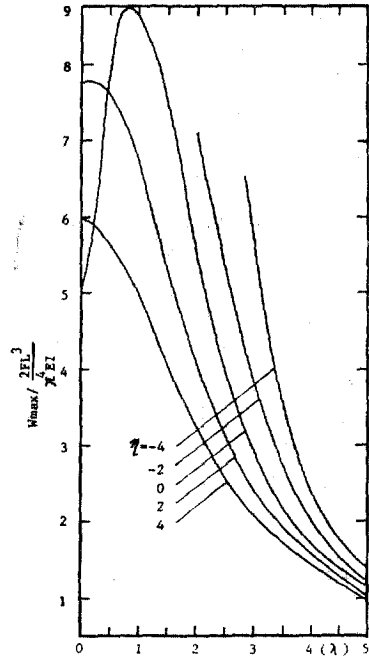


그림 11. Relationships between λ and W_{max} at $\xi=0.5$ for $k^*=0$, $\alpha=0.8$ and Various η .

짐을 表로 나타내면 다음과 같다.

α	-0.8	-0.4	0	0.4	0.8
λ_{cr}	2.5	2.2	2.0	1.5	0.8
$W_{max} / \frac{2FL^3}{\pi^4 EI}$	0.97	1.25	1.75	2.9	9.0

臨界速度 (λ_{cr})에서의 처짐은 α 가 增加함에 따라 현저하게 增加하는 것을 알 수 있다.

無次元 加速度 η 와 最大처짐과의 關係가 $\lambda=0, 1, 1.5, 2, 3, 4, 5$ 에 대하여 $k^*=0, \alpha=-0.8, -0.4, 0, 0.4, 0.8$ 各各의 境遇에 대하여 圖表로 나타내면 그림 12~16이 된다.

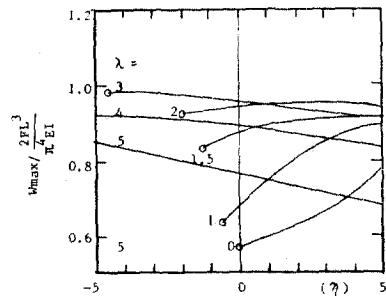


그림 12. Relationships between η and W_{max} at $\xi=0.5$ for $k^*=0$, $\alpha=-0.8$ and Various λ .

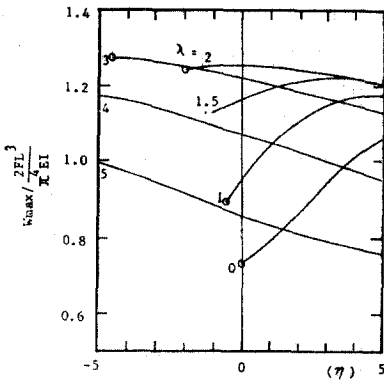


그림 13. Relationships between η and W_{max} at $\xi=0.5$ for $k^*=0$, $\alpha=-0.4$ and Various λ .

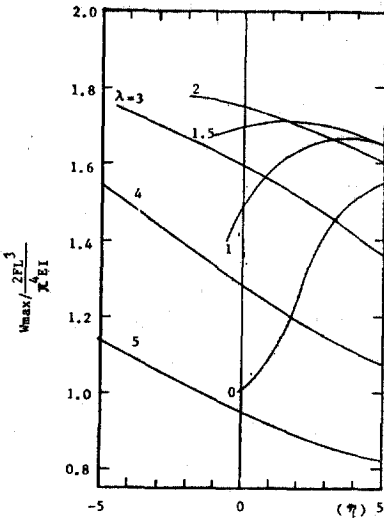


그림 14. Relationships between η and W_{max} at $\xi=0.5$ for $k^*=0$, $\alpha=0$ and Various λ .

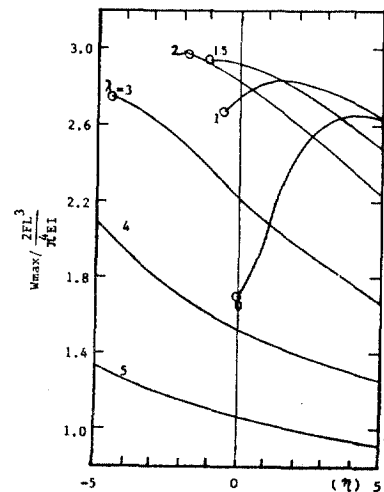


그림 15. Relationships between η and W_{max} at $\xi=0.5$ for $k^*=0$, $\alpha=0.4$ and Various λ .

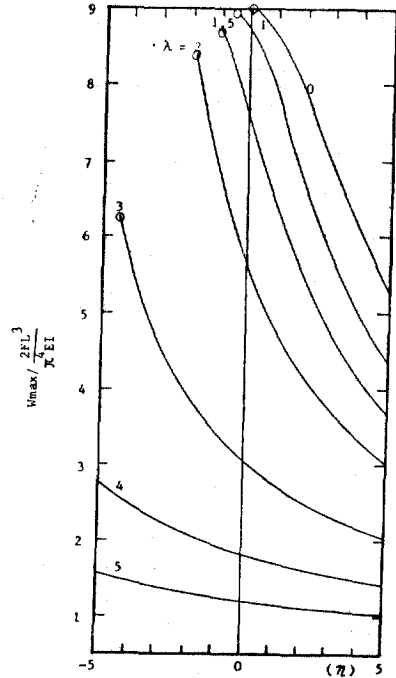


그림 16. Relationships between η and W_{max} at $\xi=0.5$ for $k^*=0$, $\alpha=0.8$ and Various λ .

“○”는 v 값이 0 이 되는境遇를 나타낸다. $\alpha=0.4, 0, -0.4, -0.8$ 인境遇 最大처짐은 η 의 값이增加하면 작은 λ 에 대해서는增加하나 큰 λ 에 대해서는減少함을알 수 있다.

$\alpha=0.8$ 인境遇 最大처짐은 η 의 값이增加하면 작은 λ 에서는 급격하게減少하며 큰 λ 에서는 완만하게減少함을알 수 있다.

全 λ 와 η 에 대하여 各各의軸荷重係數 α 에 따른 最大처짐은 다음 表의 값 以下이다.

α	-0.8	-0.4	0	0.4	0.8
$W_{max} \frac{2FL^3}{\pi^4 EI}$	0.99	1.28	1.78	3.00	9.00

4. 結 論

理論解析에 의한 有限보의 처짐의 解를 求하고 數値解析하여 다음과 같은 結論을 얻었다.

1) 軸荷重을 받는 보에서 荷重이 動的으로 作用하는境遇 臨界速度 以內에서는 速度가 增加함에 따라 最大처짐이 增加하나 臨界速度를 넘어서는 速度의 增加에 따라 오히려 처짐을 減少

한다.

2) 臨界速度(λ_{cr})는 加速度(η), 軸壓縮力(α)이 增加하면 減少한다.

3) 比較的 작은 軸壓縮力 또는 引張力を 받을 때 처짐은 加速度(η)가 增加하면 빠른 速度에서는 減少하나 느린 速度에서는 增加한다.

4) 比較的 큰 壓縮력을 받으면 처짐은 加速度(η)가 增加하면 빠른 速度에서는 완만하게 減少하나 느린 速度에서는 급격하게 減少한다.

5) 처짐은 移動速度가 작을 때 軸壓縮력의 影響을 크게 받는다.

6) 처짐은 軸引張力 $\alpha = -0.8$ 以上이면 全速度區間에서 靜的인 처짐을 넘지 않는다.

參 考 文 獻

1. Fryl "Vibrations of Solids and Structures under Moving Loads", Gromingen: Noordhoff 1972.
2. A.L. Florence "Traveling Force on a Timoshenko Beam", *Journal of Applied Mechanics*, TRANS. ASME, June 1965.
3. C.R. Steele. "The Finite Beam with a Moving Load", *Journal of Applied Mechanics*, TRANS. ASME, Vol. 89, Series E. Mar. 1967.
4. C.R. Steele, "The Timoshenko Beam with a Moving Load", *Journal of Applied Mechanics*, TRANS. ASME, Vol. 90, Series E. Sep. 1968.
5. J.T. Kenney, Jr., "Steady-State Vibrations of Beam on Elastic Foundation for Moving Load", *Journal of Applied Mechanics*, TRANS. ASME,

Dec. 1954.

6. J.D. Achenbach and C.T. Sun, "Moving Load of a Flexibly supported Timoshenko Beam". *Int. J. of Solids and Structures*, Vol. 1, 1965.
7. A.D. Kerr. "The continuously supported rail subjected to an axial force and a moving load", *Int. J. of Mechanical Science*, Vol. 14, 1972.
8. S. Chonan, "The Elastically supported Timoshenko Beam subjected to an Axial Force and a Moving Load", *Int. J. of Mechanical science*, Vol. 17, 1975.
9. S.I. Suzuki, "Dynamical Behaviour of a Finite Beam subjected to Travelling Load with Acceleration", *Journal of sound and Vibration*, Vol. 55, 1977.
10. N. Sridharan and A.K. Mallik, "Numerical Analysis of Vibration of Beams subjected to Moving Loads", *Journal of sound and Vibration*, Vol. 65, 1979.
11. H. Saito and S. Chonan, "Response of an Elastically Supported PlateStrip to a Moving Load", *Journal of sound and Vibration* Vol. 71, 1980.
12. S. Timoshenko, D.H. Young and W. Weaver Jr, "Vibration Problems in Engineering", 4th Edition, pp.363~502, 1974.
13. L. Meirovitch, "Analytical Methods in Vibration" 3rd. Printing pp.126~166, 1971.
14. K.F. Graff "Wave motion in elastic Solids" Oxford university press, pp.140~211, 1975.

(接受: 1982. 8. 4.)