

四角形斷面을 가진 半徑핀에서의 熱傳達에 關한 研究

(A Study on the Heat Transfer in Radial Fin of Rectangular Profile)

金光洙* · 任將淳** · 徐庭一***
(Kim, Kwang Soo) (Yim, Jang Soon) (Seoh, Jeong Il)

ABSTRACT

In this paper, temperature distributions in radial fin of rectangular profile for steady-state with no heat generation are obtained by one-dimensional analytical method, finite difference method and experiment respectively.

Heat flow rate and fin efficiency from the fin model are obtained by analytical method.

Consequently, temperature distributions in radial fin can certify that are similar to exact solution.

From theoretical analysis, the effects according to heat flow rate and fin efficiency are related to variation of parameters which are fin thickness δ_o , fin base temperature T_o , thermal conductivity K with same basic dimensions and the effects are studied and compared.

記號說明

- | | |
|---|---|
| C_1, C_2 ; A constant | $K_n()$; Modified Bessel function of the second kind and order n , dimensionless |
| h ; Convection heat transfer coefficient, $W/m^2\text{ }^\circ\text{C}$ | K ; Thermal conductivity, $W/m\text{ }^\circ\text{C}$ |
| h_e ; Convection heat transfer coefficient at fin edge, $W/m^2\text{ }^\circ\text{C}$ | $\Delta\ell$; Distance between adjacent nodes at regular boundary, m |
| $I_n()$; Modified Bessel function of the first kind and order n , dimensionless | m ; Fin performance factor $(\frac{2h}{K\delta_o})^{\frac{1}{2}}$, m^{-1} |
| | q ; Heat flow rate, W |
| | q_{id} ; Ideal heat flow rate, W |

* : 漢陽大學校 大學院
 ** : 仁荷大學校 工科學
 *** : 漢陽大學校 工科學

- q_0 ; Heat flow rate at fin base, W
- q_i, q_{i+1}, etc ; Heat flow rate for unit area, defined where used, W/m^2
- R ; Diameter in the cylinder, m
- R_i ; Inner diameter in the cylinder, m
- R_o ; Outer diameter in the cylinder, m
- r ; Fin radius, distance in the cylindrical coordinate, m
- r_e ; Radius at fin edge, m
- r_0 ; Radius at fin base, m
- ρ ; Ratio of radial fin radius at fin base to fin edge, dimensionless
- T ; Temperature, $^{\circ}C$
- $T_{i,j}$; Temperature at nodal point (i, j), $^{\circ}C$
- T_{∞} ; Ambient temperature, $^{\circ}C$
- δ ; Fin thickness, m
- δ_e ; Thickness at fin edge, m
- δ_0 ; Thickness at fin base, m
- η_R ; Fin efficiency, dimensionless
- θ ; Temperature excess $\theta = T - T_{\infty}$, $^{\circ}C$
- θ_e ; Temperature excess at fin edge, $\theta_e = T_e - T_{\infty}$, $^{\circ}C$
- θ_0 ; Temperature excess at fin base, $\theta_0 = T_0 - T_{\infty}$, $^{\circ}C$

I. 序 論

熱傳達到는 工學의 많은 分野에서 重要한 比重을 차지하고 있으며 그 例의 하나로써 周圍流體와의 接觸面積을 增大시켜 주는 핀이 많이 利用되어 진다. 半徑핀에 대하여 1968年 R.K. IREY,⁽¹⁾ 1973年 WAH LAU와 C.W.TAN⁽²⁾이 各各 一次元 핀 解析에서의 誤差, 直線핀과 半徑핀에 있어서 一次元 熱傳達到에서의 誤差에 關한 研究를 發表하였다. 이들의 結果 半徑핀에 있어서는 Biot 數가 적은 경우 혹은 핀두께에 대한 핀높이의 比가 10 또는 그 以上の 경우에 대하여 一次元 解析方法에 依한 結果와 二次元 解析方法과의 相對誤差가 거의 無視할 程度로 差異가 없는 것으로 나타났다. 따라서 本 研究에서는 一次元 解析方法으로 輻射熱傳達到와 內部熱源이 없는 定常狀態인 경우 四角形 斷面의 半徑핀에 대하여 핀 外周面에서 傳熱量을 考慮하는 경우와 考慮하지 않는 경우에 대하여 各 各 解析하였으며 理論解析에서 구한 핀 表面溫度와 서로 比較하기 위하여 二次元 解析方法에 依한 差分法을 使用하였다. 그리고 同一條件에서 세가지 因子를 變數로 擇하여 이 變數들의 變化에 따른 傳熱量 및 이에 따른 핀效率을 比較檢討 하고자 한다.

II. 理論解析

II-I. 四角形 斷面을 가진 半徑핀에 대한 熱傳導方程式의 正確解

(A) 핀 外周面에서 傳熱量을 考慮하지 않는 경우

Gardner⁽³⁾가 考案한 任意의 半徑핀에 대한 一般 傳熱微分方程式을 使用하여 Fig. 1 에서와 같은 半徑핀에 대한 熱傳導方程式을 구하면

$$r^2 \frac{d^2\theta}{dr^2} + r \frac{d\theta}{dr} - m^2 r^2 \theta = 0 \dots\dots\dots (1)$$

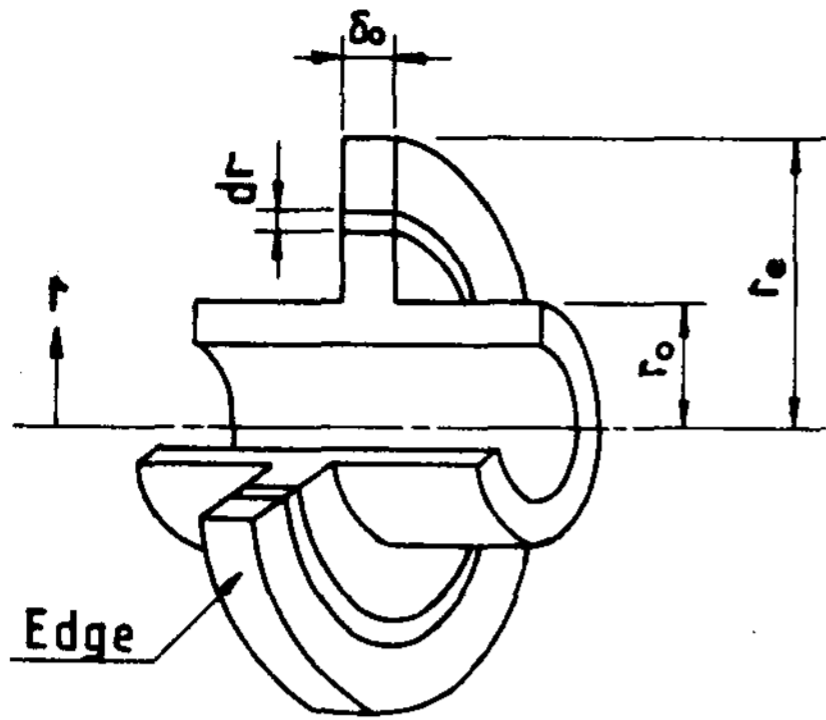


Fig.1 Radial fin of rectangular profile without edge heat loss

단, $m = \left(\frac{2h}{K\delta_o}\right)^{\frac{1}{2}}$

이와같은 식(1)의 一般解는

$$\theta = C_1 I_0(mr) + C_2 K_0(mr) \dots\dots\dots (2)$$

이때 境界條件은

$$\left. \begin{aligned} r = r_o, \theta = \theta_o \\ r = r_e, \frac{d\theta}{dr} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

境界條件 式(3)를 式(2)에 代入하면 溫度分布 式을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\theta = \theta_o \frac{[K_1(mr_e)I_0(mr) + I_1(mr_e)K_0(mr)]}{I_0(mr_o)K_1(mr_e) + I_1(mr_e)K_0(mr_o)} \dots\dots\dots (4)$$

이때 핀 베이스를 통한 實際의 傳熱量 q_o 는

$$q_o = -K 2\pi r_o \delta_o \left. \frac{d\theta}{dr} \right|_{r=r_o} \dots\dots\dots (5)$$

式(4)를 式(5)에 代入하면

$$q_o = 2\pi r_o \delta_o K m \theta_o \left[\frac{I_1(mr_e)K_1(mr_o)}{I_0(mr_o)K_1(mr_e)} \frac{-K_1(mr_e)I_1(mr_o)}{+I_1(mr_e)K_0(mr_o)} \right] \dots\dots\dots (6)$$

그리고 理想的인 傳熱量 q_ideal 은 全體핀面 積이 베이스 溫度일 경우의 傳熱量이므로

$$q_{ideal} = 2\pi h \theta_o (r_e^2 - r_o^2) \dots\dots\dots (7)$$

핀效率 η_R 은

$\eta_R = \frac{q_o}{q_{ideal}}$ 이므로 半徑핀에 대한 핀效率 은 다음과 같이 表示된다.

$$\eta_R = \frac{2r_o}{m(r_e^2 - r_o^2)} \left\{ \frac{I_1(mr_e)K_1(mr_o)}{I_0(mr_o)K_1(mr_e)} \frac{-K_1(mr_e)I_1(mr_o)}{+I_1(mr_e)K_0(mr_o)} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

(B) 핀 外周面에서 傳熱量을 考慮하는 경우

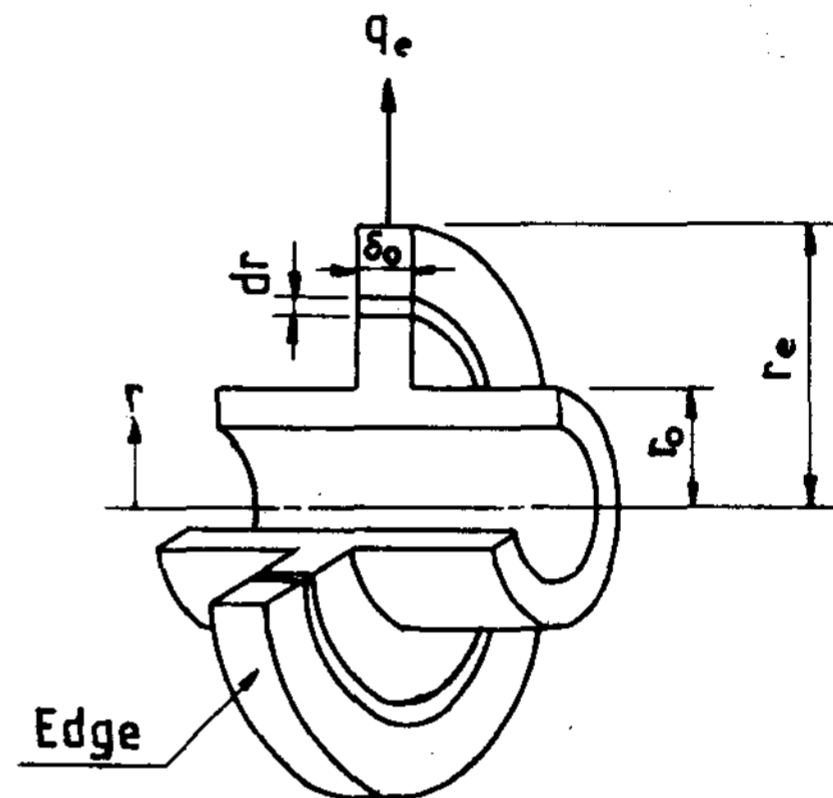


Fig.2 Radial fin of rectangular profile with edge heat loss

Fig.2와 같은 경우에도 熱傳導方程式과 이에 대한 一般解는 式(1), 式(2)와 同一하다. 이때 境界條件은

$$\left. \begin{aligned} r = r_o, \theta = \theta_o \\ \left. \frac{d\theta}{dr} \right|_{r=r_e} = -\frac{h_e}{K} \theta_e \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

境界條件 式(9)를 式(2)에 代入하면

$$\theta = \theta_o \left[\frac{I_0(mr) + \gamma k_o(mr)}{I_0(mr_o) + \gamma k_o(mr_o)} \right] \dots\dots\dots (10)$$

$$\text{但, } \gamma = \frac{I_1(mr_e) + \frac{h_e}{mK} I_0(mr_e)}{K_1(mr_e) - \frac{h_e}{mK} K_0(mr_e)}$$

이때 핀 베이스를 통한 實際의 傳熱量 q_o 는

式 (10) 를 式(5)에 代入하면

$$q_o = 2\pi r_o \delta_o K m \theta_o \frac{\gamma K_1(m r_o) - I_1(m r_o)}{I_o(m r_o) + \gamma K_o(m r_o)} \dots (11)$$

이 경우에도 理想的인 傳熱量 q_{ideal} 은 式 (7)과 同一하므로 傳效率 η_R 은 다음과 같이 된다.

$$\eta_R = \frac{2 r_o}{m(r_o^2 e - r_o^2)} \left\{ \frac{\gamma K_1(m r_o) - I_1(m r_o)}{I_o(m r_o) + \gamma K_o(m r_o)} \right\} \dots (12)$$

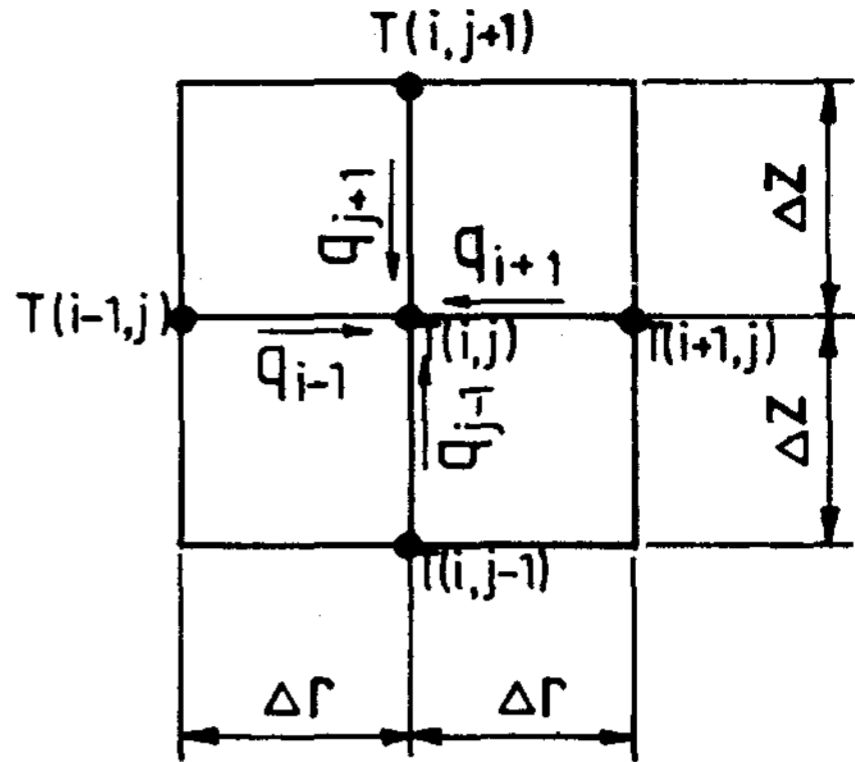


Fig.3 Regular element

II - II. 差分法

差分法^{(4),(5),(6)}에 있어서 傳 表面의 溫度를 얻기 위하여 Fig.3 과 같은 任意의 微少길이 Δr , Δz 의 길이를 갖는 하나의 要素를 考慮한 二次元 定常狀態인 경우의 熱傳導方程式은

$$K \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + K \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \dots (13)$$

이때 計算의 便易를 위하여 微少길이 Δr 과 Δz 을 Δl 로 表記하고 單位面積當 傳熱量을 q_{i-1} , q_{i+1} 등으로 表示하면

$$\left. \begin{aligned} q_{i-1} &= K \frac{T_{i-1,j} - T_{i,j}}{\Delta l} \\ q_{i+1} &= K \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta l} \\ q_{j-1} &= K \frac{T_{i,j-1} - T_{i,j}}{\Delta l} \\ q_{j+1} &= K \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta l} \end{aligned} \right\} \dots (14)$$

(A) 節點 (i, j) 가 領域内部에 있는 경우

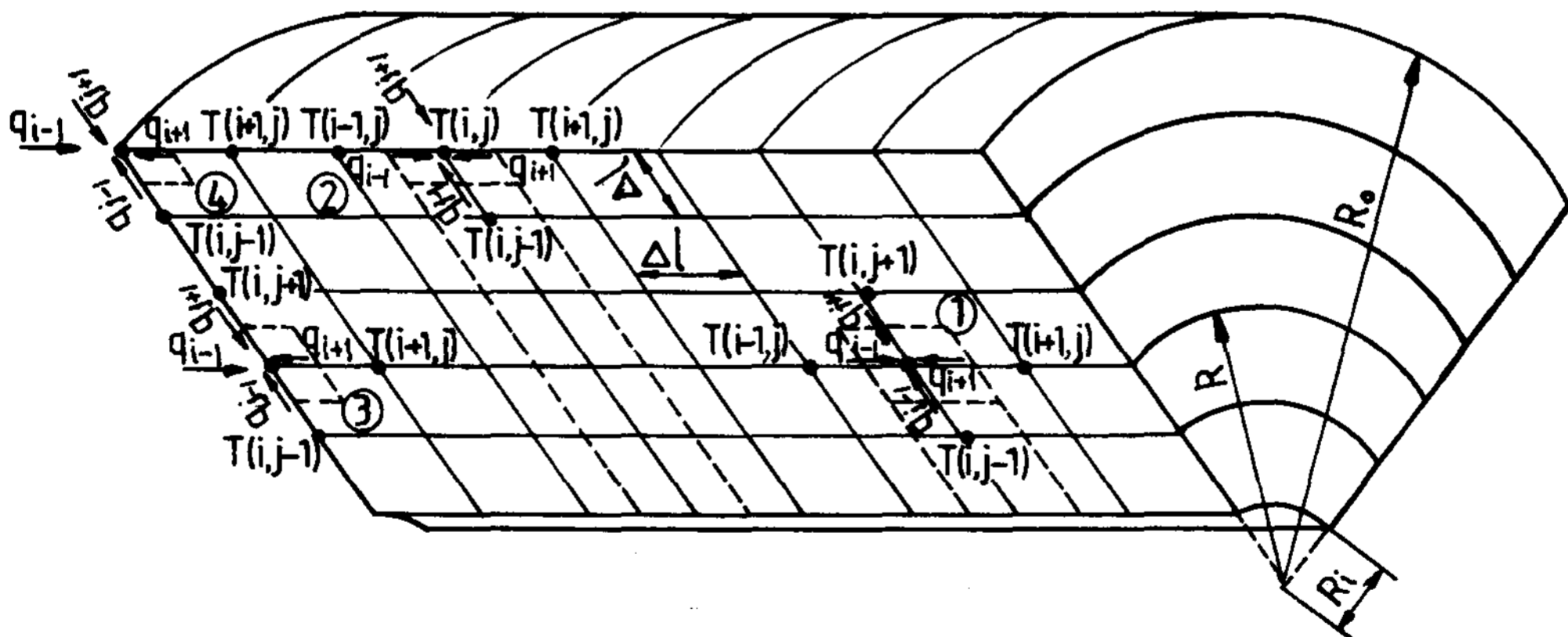


Fig.4 Regular mesh plotted in cylinder

Fig.4의 ①과 같은 경우 熱平衡을 考慮하면

$$q_{j-1} 2\pi \left(R - \frac{\Delta l}{2}\right) \Delta l + q_{i+1} 2\pi R \Delta l$$

$$+ q_{j+1} 2\pi \left(R + \frac{\Delta l}{2}\right) \Delta l + q_{i-1} 2\pi$$

$$R \Delta l = 0 \dots (15)$$

式 (14) 를 式 (15) 에 代入하고 整理하면

$$T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + \left(1 - \frac{\Delta l}{2R}\right) T_{i,j-1} + \left(1 + \frac{\Delta l}{2R}\right) T_{i,j+1} - 4T_{i,j} = 0 \dots\dots (16)$$

(B) 節點 (i, j) 가 外徑과 對流境界에 있는 경우

우 Fig.4의 ②와 같은 경우

$$q_{j-1} \cdot 2\pi \left(R_o - \frac{\Delta l}{2}\right) \Delta l + q_{i+1} 2\pi R_o \frac{\Delta l}{2} + q_{j+1} 2\pi R_o \Delta l + q_{i-1} \cdot 2\pi R_o \frac{\Delta l}{2} = 0 \dots\dots (17)$$

이때 $q_{j+1} = h_e (T_\infty - T_{i,j})$

整理하면

$$T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + 2\left(1 - \frac{\Delta l}{2R_o}\right) T_{i,j-1} - 2\left(2 - \frac{\Delta l}{2R_o} + \frac{h_e \Delta l}{K}\right) T_{i,j} + \frac{2h_e \Delta l}{K} T_\infty = 0 \dots\dots (18)$$

(C) 節點 (i, j) 가 側面의 對流境界에 있는 경우
Fig.4의 ③과 같은 경우

$$q_{j-1} 2\pi \left(R - \frac{\Delta l}{2}\right) \frac{\Delta l}{2} + q_{i+1} 2\pi R \Delta l + q_{j+1} 2\pi \left(R + \frac{\Delta l}{2}\right) \frac{\Delta l}{2} + q_{i-1} 2\pi R \Delta l = 0 \dots\dots (19)$$

$$2\pi R \Delta l = 0 \dots\dots (19)$$

이때 $q_{i-1} = h (T_\infty - T_{i,j})$

整理하면

$$2T_{i+1,j} + \left(1 - \frac{\Delta l}{2R}\right) T_{i,j-1} + \left(1 + \frac{\Delta l}{2R}\right) T_{i,j+1} - 2\left(2 + \frac{h \Delta l}{K}\right) T_{i,j} + \frac{2h \Delta l}{K} T_\infty = 0 \dots\dots (20)$$

(D) 節點 (i, j) 가 側面과 外徑의 對流境界의 交點上에 있는 경우

Fig.4의 ④와 같은 경우

$$q_{j-1} 2\pi \left(R_o - \frac{\Delta l}{2}\right) \frac{\Delta l}{2} + q_{i+1} 2\pi R_o \frac{\Delta l}{2} + q_{j+1} 2\pi R_o \frac{\Delta l}{2} + q_{i-1} 2\pi R_o \frac{\Delta l}{2} = 0 \dots\dots (21)$$

이때 $q_{j+1}, q_{i-1} = h_e (T_\infty - T_{i,j})$

整理하면

$$T_{i+1,j} + \left(1 - \frac{\Delta l}{2R_o}\right) T_{i,j-1} - 2\left(1 - \frac{\Delta l}{4R_o} + \frac{h_e \Delta l}{K}\right) T_{i,j} + \frac{2h_e \Delta l}{K} T_\infty = 0 \dots\dots (22)$$

(E) 節點 (i, j) 가 領域内部的 內徑에 接하여 있는 경우

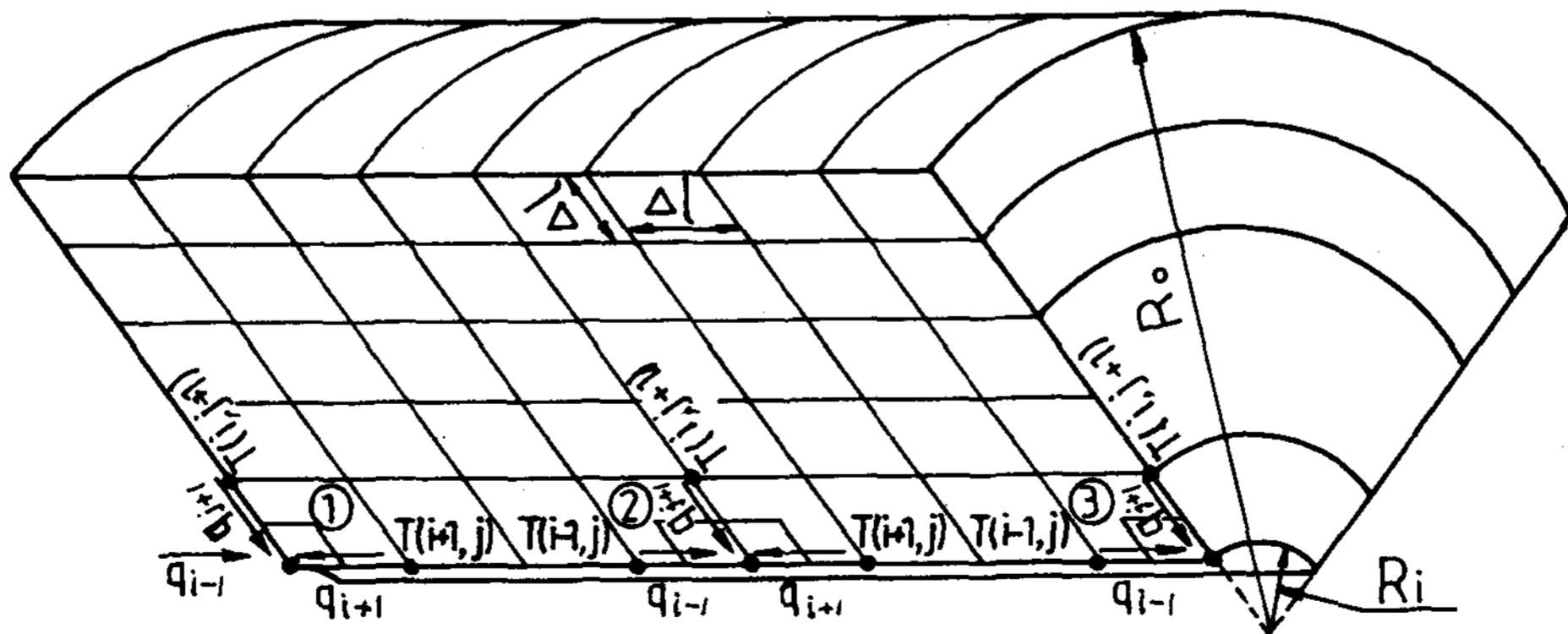


Fig.5 Regular mesh plotted in cylinder

Fig.5의 ①과 같은 경우

$$q_{i+1} 2\pi R_i \frac{\Delta l}{2} + q_{j+1} 2\pi(R_i + \frac{\Delta l}{2})\Delta l + q_{i-1} 2\pi R_i \frac{\Delta l}{2} = 0$$

整理하면

$$T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + 2(1 + \frac{\Delta l}{2R_i}) T_{i,j+1} - 2(2 + \frac{\Delta l}{2R_i}) T_{i,j} = 0 \dots\dots\dots (23)$$

(F) 節點 (i, j) 가 內徑과 側面의 對流境界에 接하여 있는 경우

Fig.5의 ②와 같은 경우

$$q_{i+1} 2\pi R_i \frac{\Delta l}{2} + q_{j+1} 2\pi(R_i + \frac{\Delta l}{2})\frac{\Delta l}{2} + q_{i-1} 2\pi R_i \frac{\Delta l}{2} = 0$$

이때 $q_{i-1} = h(T_\infty - T_{i,j})$

整理하면

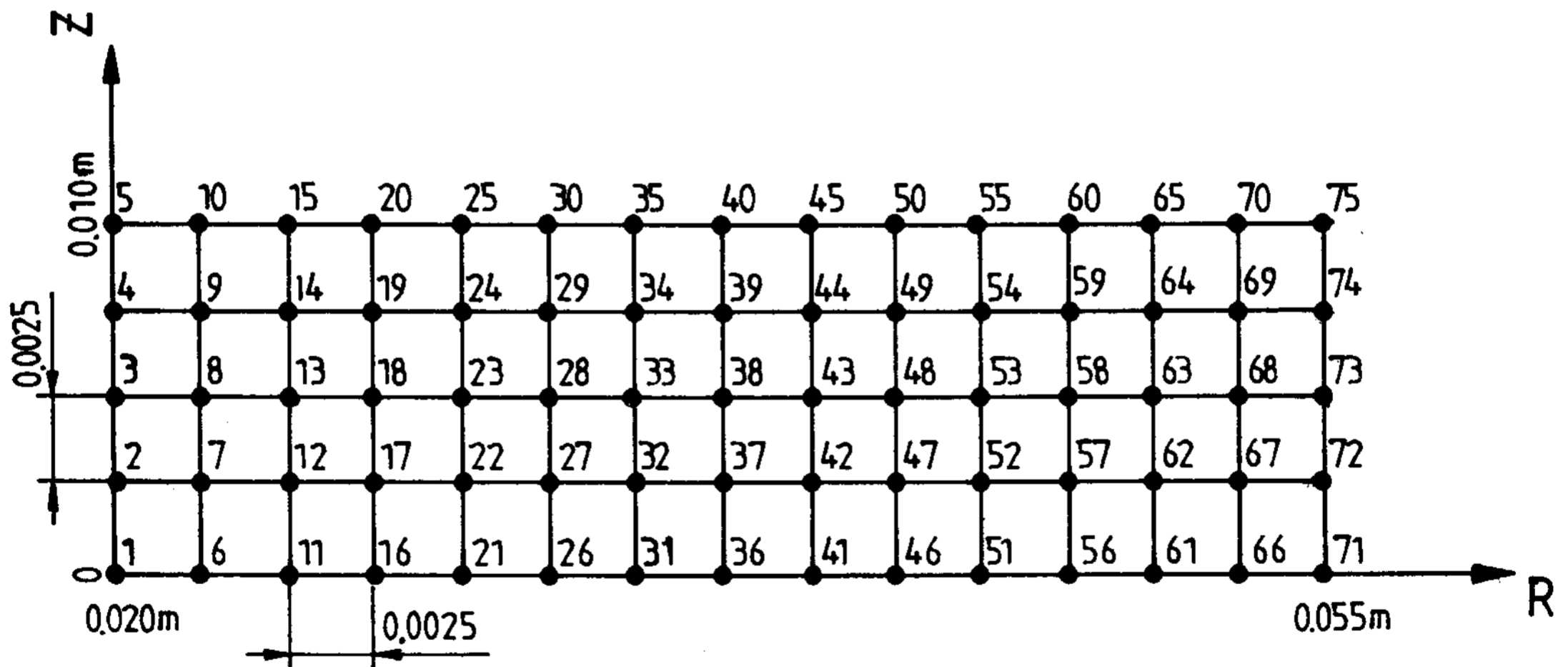


Fig.6 Finite difference model of the radial fin

$$T_{i+1,j} + (1 + \frac{\Delta l}{2R_i}) T_{i,j+1} - 2(1 + \frac{\Delta l}{4R_i} + \frac{h\Delta l}{2K}) T_{i,j} + \frac{h\Delta l}{K} T_\infty = 0 \dots\dots\dots (24)$$

(G) 節點 (i, j) 가 內徑과 斷熱境界에 接하여 있는 경우

Fig.5의 ③과 같은 경우

$$q_{j+1} 2\pi(R_i + \frac{\Delta l}{2})\frac{\Delta l}{2} + 2q_{i-1} 2\pi R_i \frac{\Delta l}{2} = 0$$

整理하면

$$(1 + \frac{\Delta l}{2R_i}) T_{i,j+1} + 2T_{i-1,j} - (3 + \frac{\Delta l}{2R_i}) T_{i,j} = 0 \dots\dots\dots (25)$$

以上에서 구한 差分法을 適用하여 理論値와 서로 比較하기 위하여 半徑핀 軸에 對한 한쪽 上端部만 같은 크기로 分割하여 75個의 節點으로 나누었으며 이에 대한 핀 모델은 Fig.6과 같다.

Ⅲ. 實驗方法 및 實驗結果

試片으로는 直徑 110mm의 炭素鋼을 使用 하 였으며 이에 대한 諸元은 Table1과 같다.

Table1. Specification of radial fin

Spec. Profile	Metal	K (W/m°C)	δ _o (m)	r _i (m)	r _o (m)	r _e (m)
Rectangular Profile	Carbon Steel (c=1.5%)	36.34	0.02	0.017	0.02	0.055

實驗室內의 溫度는 28℃로 거의 一定하였으
며 室內의 條件은 自然對流만을 考慮하였다.
핀 베이스 表面溫度가 120℃가 되었을때 0.5
cm간격으로 8個所의 핀 表面溫度를 디지털 溫
度計로 測定하였으며 自然對流의 影響은 對流熱
傳達係數에 관한 實驗式⁽⁷⁾

$$h = 1.32 \left(\frac{\Delta T}{d} \right)^{1/4} \text{ (W/m}^2\text{C)}$$

을 使用하여 計算하였다.

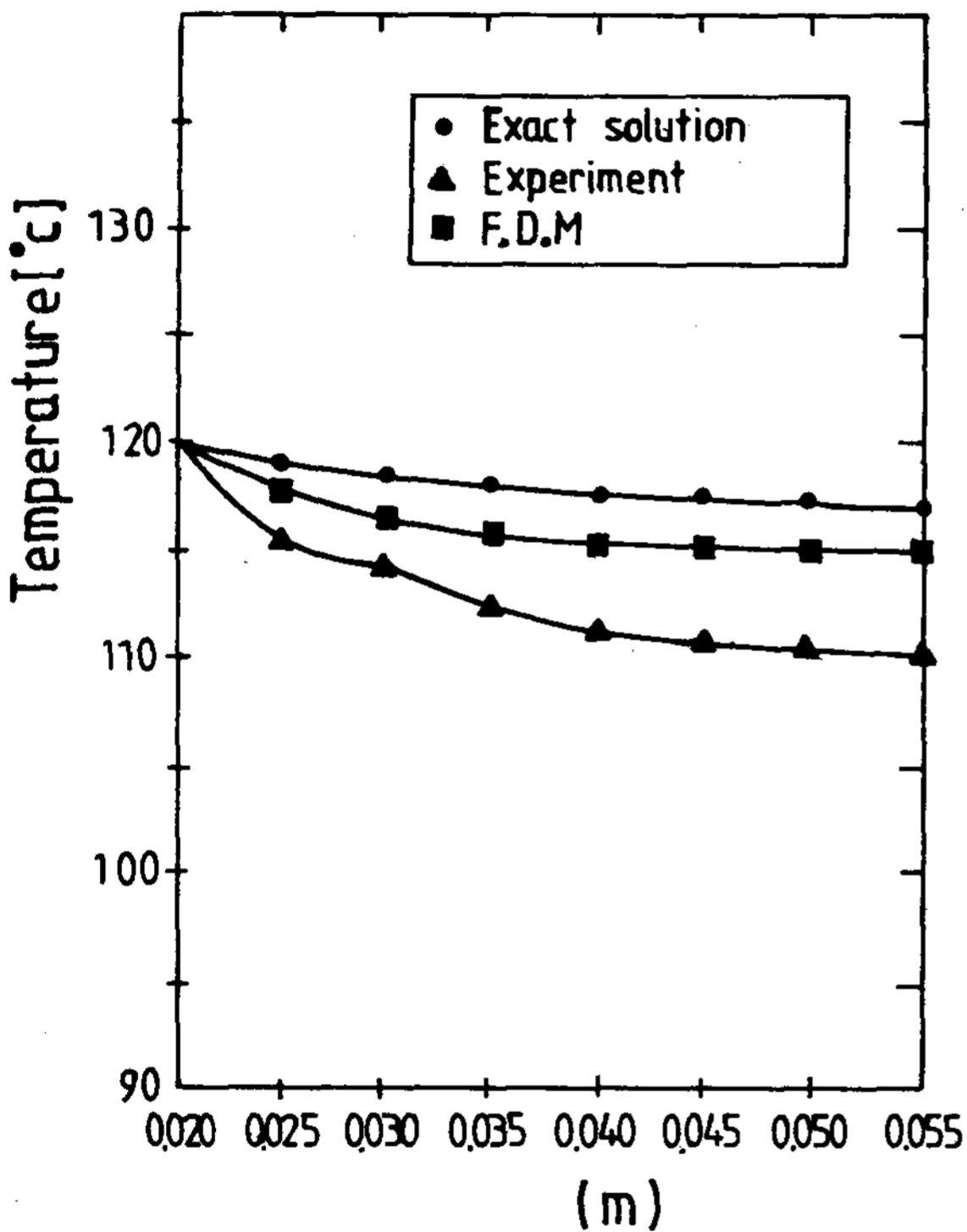


Fig.7 Comparison of surface temperature distribution at rectangular profile

Fig.7은 핀 表面溫度에 대한 實驗値와 理論
解析에서 구한 理論値와의 結果를 比較한 것이
다. 이 그래프에 依하면 實驗値는 理論値보다
아래로 약간 偏差하고 있으며 半徑이 0.035 m
以上에서는 實驗値와 差分法에 의한 溫度勾配가
거의 一定하게 持續됨을 알 수 있으며 實驗値와
理論値와의 相對誤差가 5% 以內로 比較的 理
論値에 接近함을 알 수 있었다.

IV. 比較 및 討論

핀 表面溫度에 대한 理論解析과 差分法을 比
較檢討하면 差分法과 理論値와의 相對誤差가 平
均 1.76% 實驗値와는 平均 5% 以內로 거의
一致함을 알 수 있었다. 그리고 理論解析으로
부터 핀 두께를 除外한 Table 1과 같은 半徑
핀에 대하여 다음 各 경우의 變化에 따른 핀効
率과의 關係를 比較하기로 한다.

① 핀두께 δ_0 에 따른 變化

δ_0 가 0.5, 1, 1.5, 2mm인 경우에 대한
핀効率을 Fig.8에 圖示하였다. 이 그래프에
서 핀두께가 增加 할수록 핀効率이 높아짐을 알
수 있고 이것은 핀두께가 增加하면 핀 外周面에
서의 핀두께 δ_0 가 커짐으로 이에 따른 傳熱量
이 增加하기 때문이다. 특히 핀두께가 2mm인

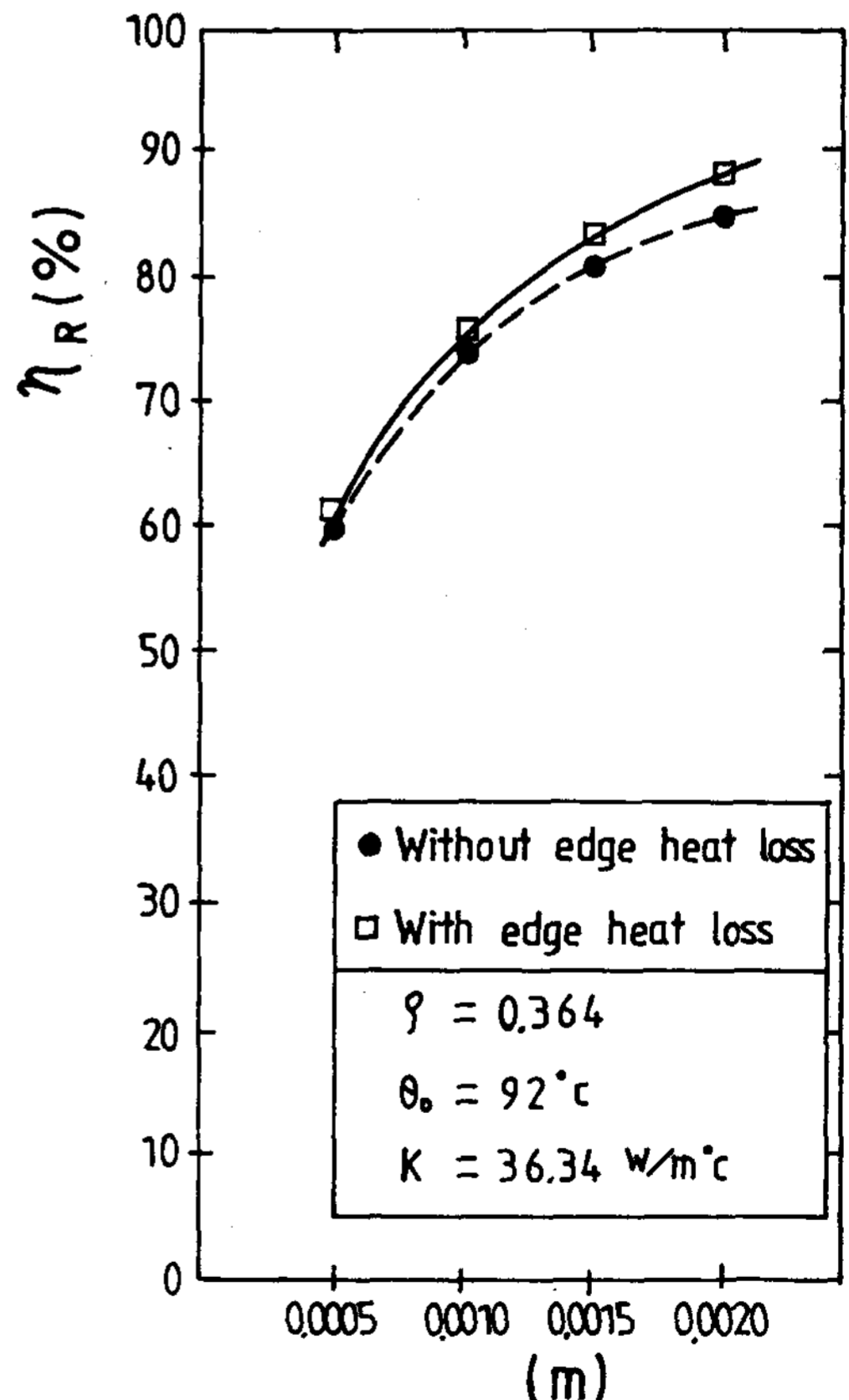


Fig.8 effect of δ_0 on η_R at rectangular profile

경우 핀 外周面에서 傳熱量을 考慮하는 경우가 핀 效率이 2% 增加함을 알 수 있다.

② 핀 베이스溫度 T_0 에 따른 變化

T_0 가 80, 100, 120 °C인 경우에 대하여 Fig.9에 圖示하였으며 그 結果 핀 베이스溫度가 增加하면 핀 效率도 거의 直線的으로 增加함

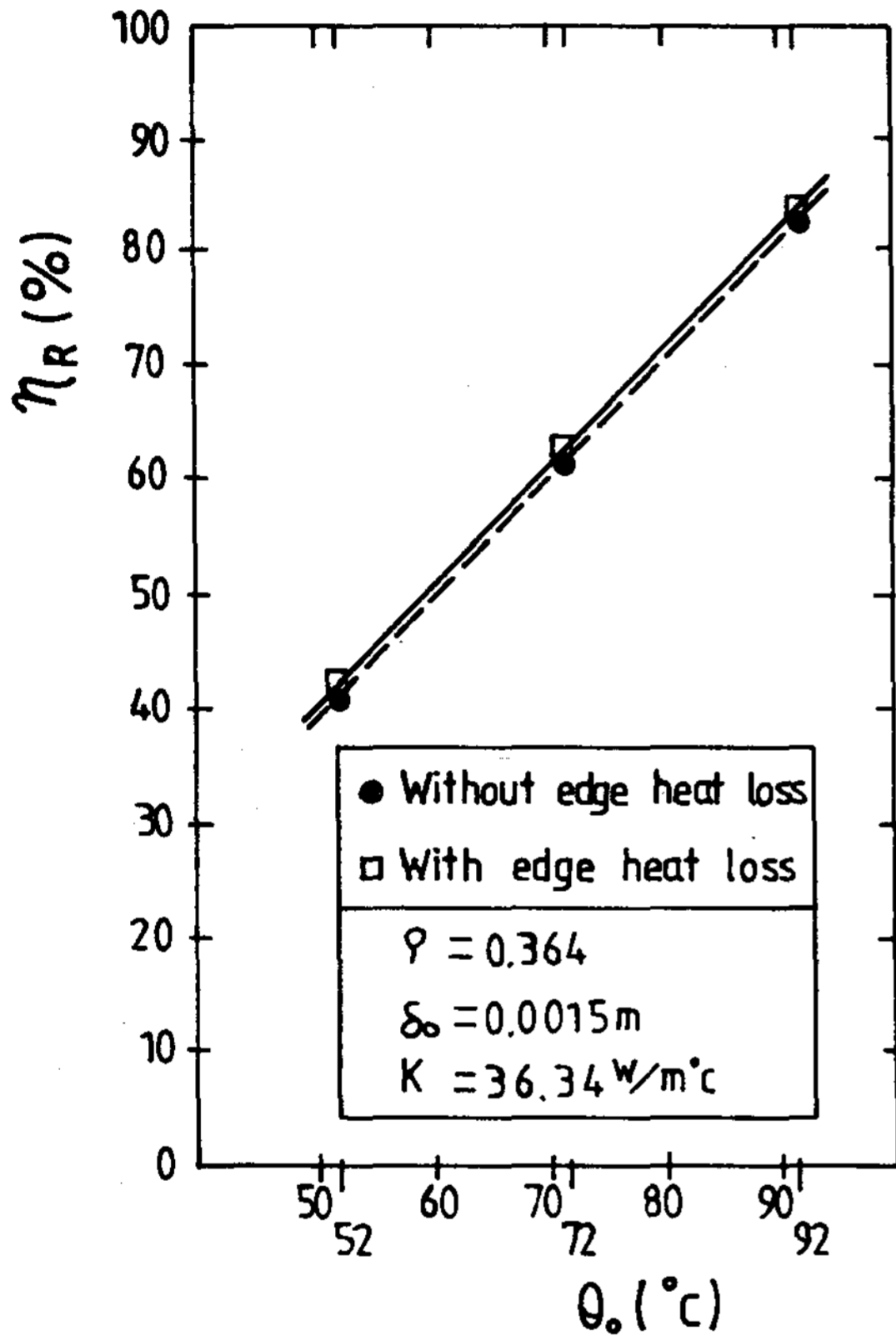


Fig.9 effect of θ_0 on η_R at rectangular profile

을 알 수 있다. 이것은 K 와 h 는 溫度에 대한 函數이므로 핀 베이스溫度가 높아지면 k 와 h 가 增加되어 이에따른 傳熱量이 增大되어 핀 效率이 上昇되는 것으로 考慮되어 진다.

③ 熱傳導係數 K 에 따른 變化

材料를 炭素鋼, 鑄鐵, 알루미늄, 구리로 하여 이에 따른 K 를 變化시킨 그래프를 Fig.10에 나타냈다. 이 그래프에서 K 가 增加할수록 핀 效率도 높아짐을 알 수 있으나 K 가 210W/

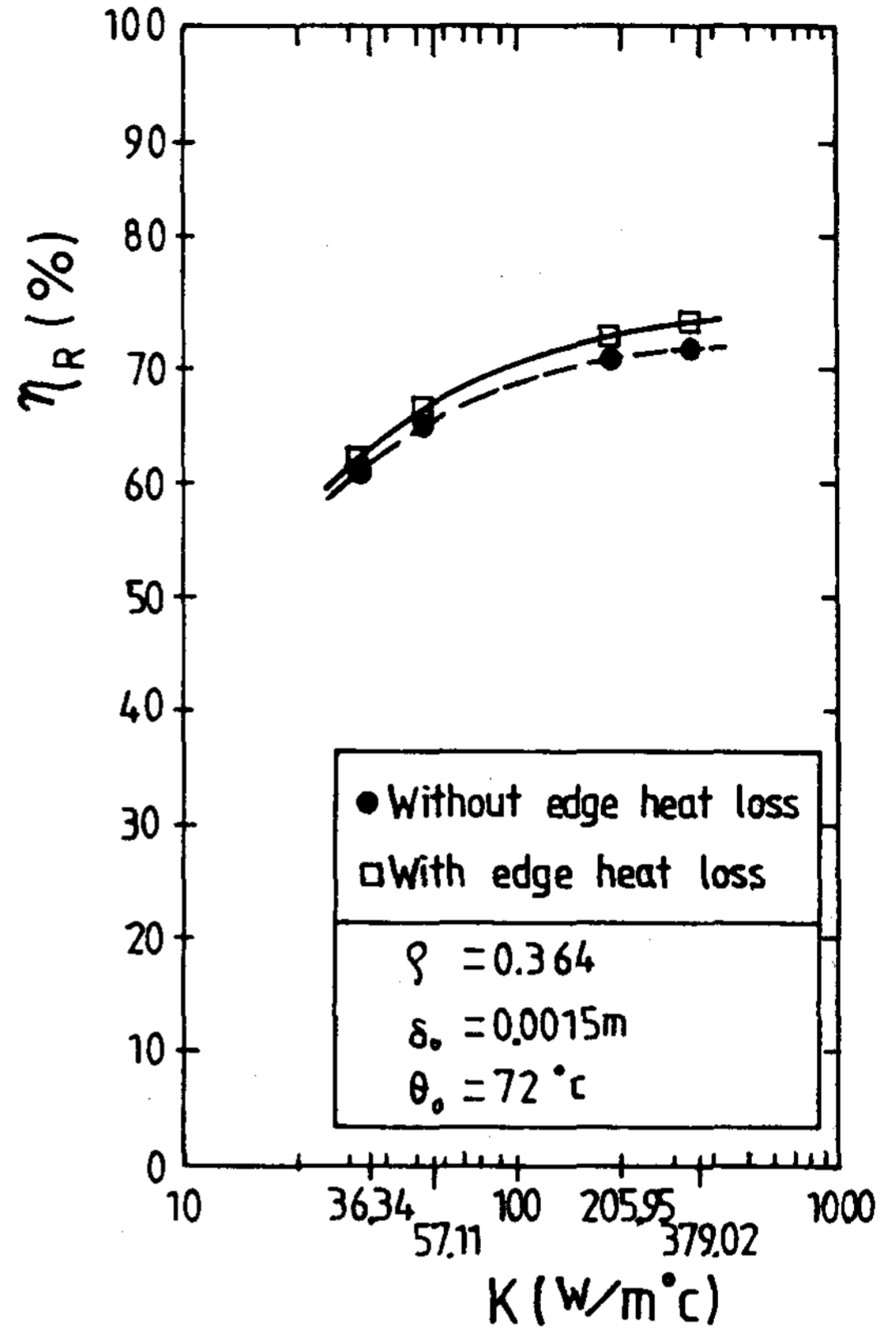


Fig.10 effect of K on η_R at rectangular profile

m°C 以上の 材質에 대하여는 핀 效率이 그다지 큰 影響을 미치지 못하는 것으로 나타났으며 핀 外周面에서 傳熱量을 考慮하는 경우 약 2% 핀 效率의 增加를 나타냈다.

V. 結 論

四角形 斷面을 가진 半徑핀에서의 熱傳達에 關한 本 研究로 부터 얻은 結論은 다음과 같다.

1. 半徑핀에 있어서 핀 두께가 增加하면 핀 效率이 높아지며 핀 外周面에서 傳熱量을 考慮하는 경우가 핀 效率이 약간 增加함을 알 수 있다.
2. 핀 베이스溫度를 上昇시키면 핀 效率이 높아짐을 알 수 있다.

3. 熱傳導係數가 서로 다른 材料로 된 半徑
핀의 핀效率은 K 가 클수록 增加하나 K 가 210
 $W/m^{\circ}C$ 以上の 材質에 대하여는 핀效率에 대
한 影響이 크게 作用하지 않는 것으로 나타났
다.

參 考 文 獻

1. R. K. IREY: "Errors in the one-Dimensional Fin solution", Jour. of Heat Transfer, Trans. ASME, Vol.90, No.1, pp.175~176, Feb. 1968.
2. WAH LAU & C. W. TAN: "Errors in one-Dimensional Heat transfer analysis in Straight and Annular Fins", Trans. ASME, Series C, Vol.95, No. 3, pp.549~551, NoV. 1973.
3. K. A. Gardner: "Efficiency of Extended Surface", Trans. ASME, 67:621~631, 1945.
4. M. N. ÖZISIK: Basic Heat Transfer, McGraw-Hill, Inc., pp.128~138, 1977.
5. V. S. Arpaci: Conduction Heat Transfer, Addison-Wesley, pp.483~493, 1966.
6. F. Kreith: Principles of Heat Transfer, Index Press, Inc., pp. 104~112, 1973.(3rd Edition)
7. McAdams, W. H.: Heat Transmission, McGraw-Hill, Inc., 1954. (3rd Edition)
8. D. Q. KERN & A. D. KRAUS: Extended surface Heat Transfer McGraw-Hill, Inc., pp.102~111, 645~647, 1972.