최 적 설 계 (I)

郭 柄 晩
<韓國科學技術院 機械工學科・工博>

1. 서 론

최적설계(optimal design)는 말 그대로 응용수학에서의 최적화(optimization) 이론을 공학설계(engineering design)에 이용하는 분야로 정의할 수 있겠다. 최적화라는 말은 주어진 상황하에서 가장 좋은 결과, 또는 최소값이나 최대값을 달성하기 위한 조건을 찾아내는 과정을 의미한다. 그러므로 최적화는 설계자나 기술자이면 항상 생각해야 되는 그들의 임무로도 생각할 수 있다. 때때로 최적화하는 노력이 보상될 수 없는 사소한 공학 문제도 있겠지만, 공학의 제문제는 궁극적으로 최적화의 문제로 볼 수 있다. 자연에서 일어나는 현상도 에너지 최소화의 정리등에 의하여 기술되는 것은 신에 의하여 최적화된 결과로 보여지는 것으로 흥미 있다.

최적화는 비교적 긴 역사를 가지고 과학 전반에 걸쳐 그 응용이 나타나고 있으나, 수학적으로 또는 기술적 용어로서의 최적(optimum)은 18세기 초부터 쓰여 졌다하며[(1)] 금세기에 와서야 선형계획법(linear programming)과 operations research 등의 발전과 함께 현대적 최적화 이론이 시작되었고[(2)] 지금은 어느 공학분야에서나 필요하지만 산업공학은 말할 것도 없이 특히 기계, 화공, 전기전자, 조선, 토목공학등에서 연구되고 응용되고 있다. 지난글[(3)]에서도 언급한 바와같이 종래의 공학설계의 개념은 공식에 의한 각각의 설계 기술을 주로 다루어 왔기 때문에 그 응용도가 낮았으며 60년대에는 역학등 기초 공학의 강조로 공학 설계는 사실상 무시된 상태이기도 하였다. 이러한 것이 문제화 됨에 따라 각 공과 대학에서는 설계교과에 대한 최소한의 범위를 정하게 되었으며, 최근에 와서는 기술에서 떠나서 전문 분야에 관계없이 기술자이면 알아야 할 공통적인 부분을 다루도록 되는 추세이다. 이러한 부분의 하나가 최적 설계이다.

본 강좌에서는 최적설계를 일반적인 설계 과정의 일부로 그 개념을 소개하고, 기계공학 시스템에서 최적설계 분야의 개괄과 구체적인 최적화에 대한 이론을 간략하게 수회에 걸쳐 소개하며 분야별 적용 예제를 보이고자 한다.

한가지 주의할 것은 최적화의 좋은 점만 생각하다 보면 설계의 응용에 있어서 문제의 정립이 잘못 되거나, 컴퓨터와 인력에 대한 과다한 노력이 타당화 될 수 없는 문제등에, 충분한 검토없이 무작정 응용하는 것은 때때로 그 결과의 無用함은 물론이고 여러가지 역효과를 남기게 될 것이다.

1.1. 설계의 단계

제품의 설계 단계로는 필요성 또는 요구에 따라서, 이에 해당하는 문제의 정의, 목표의 선정 개념의 창출 및 선정, 해석 그리고 최적화를 거쳐서 도면을 얻기까지의 기본설계와 생산을 위한 생산설계 단계로 나눌 수 있겠다. 지난호[(4)]에서 지적한 바와 같이 최적설계는 합리적인 설계를 위한 가장 중요한 개념으로, 기본설계 단계에서 더욱 필수적이다.

최적 설계가 합리적이기 위해서는 수식화가 필요하며, 이 단계가 가장 중요하면서도 어렵다. 항공기나 인공 위성등에서는 무게를 최소화하는 것이 "최적"일 수 있고, 자동차등에서는 승차감을 "가장 좋게"하는 것일 수 있다. 아마 가장 보편타당한 것은 비용을 최소화한다거나 또는 성능을 최대화하는 것으로 생각할 수 있겠으나, 이들을 구체적으로 구하기 위하여 모든 인자를 고려한다거나 양적으로 나타내는 것은 실로 어려운 경우가 많으므로 설계자는 이 "최적"을 정의하는데 가장 신중을 기해야 할 것이다[(4)].

1.2. 최적설계의 수식화

합리적인 최적설계의 과정으로 우선 수학적으로 문제를 정립해야 한다. 표준적인 최적설계의 수식화는

(1) 목적함수를 정의하여 설계자의 최적에 대한 기준을 정량적으로 표시해 주게되고, 비용, 이윤, 성능등이 된다.

(2) 설계변수를 정의해야 하며 이는 설계하고자하는 시스템을 표현하는 변수로 설계자가 정하고자 하는 것이다.

(3) 상태변수와 상태 방정식이 있게되는데 이는 시스템의 설계변수가 정해졌을 때 시스템의 상태나 응답을 계산하게 해주는 시스템 방정식이고 모든 해석 방법은 곧 이 시스템 방정식의 풀이에 그 주목적이 있다.

(4) 제한조건식, 모든 실제의 시스템에서는 그 대상과 설계 변수에 제한이 있게 마련이다. 물리적 크기, 무게의 제한, 재료가 견딜 수 있는 힘의 제한등이다. 이들을 수식으로 표현하면 보통 부등식으로 나타내어지게 된다.

그러므로 최적설계 문제는 (4)의 여러가지 제한조건을 모두 만족시키면서 (1)의 목적함수를 최적으로하는 설계변수를 결정하는 문제로 된다.

설계 변수들을 벡터로 동의하여 $b\equiv(b_1, b_2, \cdots b_n)$, 상태 변수를 $z\equiv(z_1, z_2, \cdots z_m)$, 그리고 목적함수를 J로 표시하면 표준적인 최적설계 문제는

$$\min\ J \tag{1}$$

$$\text{subject to}\ K_i(b, z)=0,\ i=1, \cdots, m \tag{2}$$

$$\text{and}\quad \psi_j(b, z)\begin{cases}=0 & (3)\\ \leq 0,\ j=1, \cdots, p & (4)\end{cases}$$

여기서 목적함수는 $J\equiv\psi_0(b, z)$로 표시될 수 있고 설계변수와 상태 변수의 함수이다. 두번째 식은 상태 방정식을 표시하는 것으로 설계 변수 b를 알면 이 식에서 상태 변수 z를 一意的으로 얻을 수 있는 것으로 가정한다. 이들 상태 방정식을 등식 제한 조건식과 같이 취급하고 z를 b에 포함시켜 설계 변수의 일부로 보면 소위 말하는 비선형 계획법(nonlinear programming)문제로 되지만 위와 같이 상태 변수를 구분하고 상태 공간을 이용하므로 매우 효과적인 풀이 방법을 생각할 수 있다. 이와 같이 상태 변수를 분리하여 취급하는 또 다른 이유는 기계공학 시스템의 대부분의 문제에서는 물리적으로 설계변수와 달리 상태 변수가 자연스럽게 정의되여 상태 변수를 구하는 시스템의 해석법이 많이 알려져 있기 때문이다[(1)]. 참고문헌(3)에서 예로든 정적 구조물의 최적설계에서, 시스템 방정식은 유한요소법에서 얻은 방정식이 될 것이다. 요소의 수에 따라 상태변수의 수가 결정될 것이며, 만약 이를 설계 변수에 포함하여 취급하면 전통적인 비선형문제로 되지만, 변수 및 제한조건등의 과대함으로 매우 비효율적일 뿐 아니라 부수적인 어려움이 많게 된다. 이와 같은 구조물 최적 설계는 상태 변수를 분리하여 위의 (1)~(4)까지와 같이 수식화하여 취급하면 해법의 효율이 크게 나타나는 대표적인 문제라 할 수 있다. 구체적인 예는 다음에 소개하기로 한다. 여기서는 기계요소 설계의 한예로 인장이나 비틀림을 받을 코일스프링을 생각한다[(5)]. 우선기호로,

d=스프링선의 직경

D=코일의 평균직경

N=스프링역할을 하는 코일의 감긴 회수

Q=스프링역할을 못하는 부분의 감긴회수

E=영의계수

G=전단계수

P=가해진 힘

K=스프링상수

δ=스프링축에 따른 변위

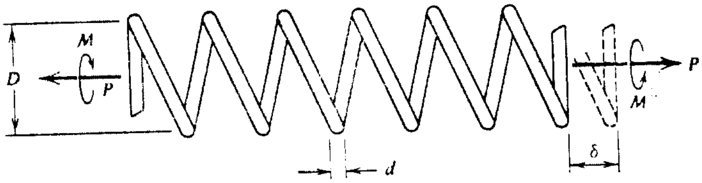

그림 1 코일스프링의 설계

k=Wahl의 응력 집중계수
k_1=비틀림에 대한 응력집중계수
τ=전단응력
$\tau_{\max}$=허용 전단응력
σ=굽힘응력
$\sigma_{\max}$=허용 굽힘 응력
M=가해진 비틀림 모우멘트
θ=비틀림각
f=서어징 진동의 고유진동수
ρ=스프링재의 밀도
g=중력가속도
$c=D/d$

인장—압축의 경우 Shigley의 기계공학설계[6]로부터

$$P=K\delta \tag{5}$$

$$K=\frac{d^4G}{8D^3N} \tag{6}$$

$$k=\frac{4c-1}{4c-4}+\frac{0.615}{c} \tag{7}$$

$$\tau=\frac{8kPD}{\pi d^3} \tag{8}$$

$$f=\frac{d}{2\pi D^2N}\sqrt{\frac{G}{2\rho}} \tag{9}$$

가 얻어지고 k는 실험에서 얻어진 것이다. 스프링의 무게는

$$\phi_0=\frac{(N+Q)\pi^2Dd^2\rho g}{4} \tag{10}$$

가 되며 이를 최소화하는 문제를 생각한다. 제한조건으로는 우선 부하 P에 대하여 적어도 Δ보다 커야 된다는것이 스프링설계에서 통상요구되므로, 이는 수식으로

$$\phi_1=\Delta-\frac{8PD^3N}{d^4G}\leq 0 \tag{11}$$

또한 재료의 파단등이 없어야 하므로, 허용전단응력을 이용하면 전단응력이 이를 넘지 않는 조건으로

$$\phi_2=\frac{8PD}{\pi d^3}\left[\frac{4D-d}{4D-4d}+\frac{0.615d}{D}\right]-\tau_{\max}\leq 0 \tag{12}$$

동적상황하에서는 공진이 일어나지 않아야 하므로, 서어징주파수는 적어도 ω가 되어야할 것이다. 즉

$$\phi_3=\omega-\frac{d}{2\pi D^2N}\sqrt{\frac{G}{2\rho}}\leq 0 \tag{13}$$

끝으로 때때로 스프링의 외경이 어떤직경 $\overline{D}$를 넘지않아야 한다. 즉

$$\phi_4=D+d-\overline{D}\leq 0 \tag{14}$$

뿐만아니라 이들 외에도 실제적인 스프링을 얻기 위하여 스프링선의 직경, 코일의 직경, 코일의 감긴수등이 음수가 되어서는 안 될 것이다. 즉,

$$\phi_5=-d\leq 0 \tag{15}$$

$$\phi_6=-D\leq 0 \tag{16}$$

$$\phi_7=-N\leq 0 \tag{17}$$

그러므로 최소무게의 스프링설계 문제는 설계변수 d, D, N을 잘선정하여 조건식 (11)~(17)을 만족시키면서 식 (10)의 ϕ_0를 최소화하는 것이다. 물론 설계자에 따라서는 설계변수에 크기의 제한을 더두거나 할 수 있을 것이다. 이때 주의할점은 자칫하면 해답이 나올 수 없는 문제로 수식화할 수도 있다는 것이다. 비틀림스프링으로 쓰일경우는,

$$\sigma=\frac{10.2Mk_1}{d^3} \tag{18}$$

$$k_1=1.425\left(\frac{d}{D}\right)^{0.115} \tag{19}$$

$$\theta=\frac{3670NDM}{Ed^4} \tag{20}$$

으로되고 여기서 θ는 도로잰 각도이다. 간단화한 문제로 θ가 주어진 자료로 보면 식 (20)에서

N을 구하여 식 (10)에 대입하면 무게는

$$\phi_0=\frac{\pi^2\rho gQ}{4}Dd^2+\frac{\pi^2\rho gE\,\theta}{14680\,M}d^6 \qquad (21)$$

이 되며, 응력제한조건과 비음수일 조건등을 적으면

$$\phi_1=\frac{14.5\,M}{d^{2.885}D^{0.115}}-\sigma_{\max}\leq 0 \qquad (22)$$

$$\phi_2=-d\leq 0 \qquad (23)$$

$$\phi_3=-D\leq 0 \qquad (24)$$

이 될 것이다.

1.3. 분 류

최적 설계 문제는 편의상 여러 관점에서 분류할 수 있다. 설계 변수나 상태 변수가 유한 차원(finite dimensional)벡터로 나타나느냐, 또는 어떤 시간이나 공간 변수에 대한 함수인 무한 차원(infinite dimensional) 벡터로 표시되느냐에 따라 표 1과 같이 분류할 수 있겠다. 이러한 관점에서는 크게 유한 차원 최적 설계 문제와 무한 차원 최적 설계 문제로 크게 분류 할 수 있으며 무한 차원 문제는 편이상 연속계 최적설계와 분포계(分布系) 최적설계로 대별할 수 있다. 이 표에서 R^n등은 n차원 벡터 공간을 나타내며 $u(x)$등은 공간 변수 x의 함수 u를 나타낸다. 급강하 방법(steepest descent) 또는 句配投影法(gradient projection)등 개념상으로 이 두 종류의 문제에 같이 적용될 수 있는 통일된 방법이 있으나[5] 본 강좌에서는 주로 유한 차원 문제에 대해서 논하고 무한차원 문제에 대해서는 다른 강좌에서 간략히 소개하고자 한다.

또 다른 분류 방법은 여러가지 해법의 개발에 따른, 또는 취급상의 단계에 따라 분류할 수 있겠으며, 크게 제한 조건식이 없는 경우와 제한 조건식이 있는 경우로 나눌 수 있다. 또한 이들을 유한 차원 문제중에서 1차원 문제와 2차 이상 多變數 문제로 나눌 수 있다. 제한 조건식이 있는 경우도 크게 선형 문제와 비선형으로 나눌 수 있다. 유한 차원 문제를 이 방법에 따라 분류하고 몇가지 해법들을 소개하면,

(1) 제한조건이 없는 경우

가) 1차원문제 : 이차보간법 (qnadratic interpolation), 황금 분할법(golden section search) 등

나) 多變數 문제 : 급강하방법(steepest deseent)

표 1 표준 최적설계 문제의 분류

목적함수	제한조건식	상태방정식	설계변수	분류
함수	함수	대수방정식	$b\in R^n$	유한차원최적설계
범함수	범함수 또는 Pointwise	상미분방정식	$b\in R^n$ $u(t)\in R^p$	연속계 최적설계
		편미분방정식	$b\in R^n$ $u(x)\in R^p$ $v(x)\in R^q$	분포계 최적설계

참고 : b=설계변수, u=설계변수(함수), v=경계관련설계변수(함수)

뉴톤의 방법(Newton's method) 共軛方向法(conjugate direction), Fletcher-Powell 방법등.

이들 문제와 해법에 관해서는 참고문헌(11~17)을 참조하기 바라며 본 강좌에서는 취급하지 않는다.

(2) 제한조건이 있는 경우

가) 선형계획법 문제(linear programming: LP)는 목적함수와 제한 조건에 들어가는 함수가 모두 선형 함수인 경우이며 표준형은 다음과 같다.

$$\min\ B^T x \qquad (25)$$

$$\text{subject to } Ax\geq C \qquad (26)$$

$$x\geq 0 \qquad (27)$$

여기서 B, A, C는 문제에 따라 정해질 행렬이고 x는 찾고자 하는 변수이다. 산업공학적 문제, 경제 활동과 관련된 문제에서 주로 이러한 부류로 다루어지고, 인적, 물적 자원, 기계 토지등의 최적 분배, 생산계획, 재고관리, 교통, 수송, 파이프 배열 기타 network 문제등 매우 다양하게 응용되고 있다. LP 문제의 풀이 방법은 소위 Simplex method[7]에 기초를 두고 있으며 거의 대부분의 전산기 센터에서는 이에 관한 프로그램을 보유하고 있다.

나) 2次計劃法(QP: quadratic programming)은 제한 조건식은 선형이지만 목적함수가 2차항까지 포함된 문제로 그 표준형은 다음과

같다.

$$\min\ B^Tx+\frac{1}{2}x^TQx \tag{28}$$

$$\text{subject to }Ax=C \tag{29}$$

$$x\geq 0 \tag{30}$$

여기서 A, B, Q는 문제에 따라 정해진 행렬이고 x가 찾고자 하는 변수 벡터이다. 이러한 형식의 문제는 특수분야의 공학해석과 배치안 문제등이 있고 복잡한 비선형 문제를 2차 계획법 문제로 근사화 시킬때 등이 있다. 해법으로는 필요조건식에 근거를 둔 Wolfe's 방법, 수정된 Simplex 방법[8] 등이 있으며 이에 대한 프로그램도 비교적 쉽게 구할 수 있다. 위에 든 선형 계획법과 2차 계획법은 소위 선형 complementary 문제로 취급하여 Lemke의 방법등을 쓸 수도 있다[9].

다) 기하학적 계획법(GP: geometric programming)은 목적함수와 제한 조건식이 소위 "양의 다항식"(posynomical)으로 구성되어 있는 경우이다. 양의 다항식은 $u_i=c_it_1^{a_{i1}}t_2^{a_{i2}}\ t_n^{a_{in}}$에서 $c_i>0$, a_{ij}는 실수이고 모든 $t_i>0$인 경우의 형태의 합 즉 $g\equiv u_1+\cdots+u_m$과 같은 형을 의미한다. 이와 같은 형의 문제는 기계의 요소 설계라든지 기타 복잡한 지수적 관계를 가진 시스템에서 흔히 나타나는 문제로 주된 해법은 duality의 원리를 이용한 것이다[10].

위에 제시한 문제들 외에도 정수 계획법(integer programming), 0~1 정수 계획법등으로 불려지는 것이 있으나 여기서는 생략한다. 위에서 LP 문제를 뺀 나머지 종류의 문제를 통틀어 비선형 계획법(NLP: nonlinear programming)에 넣을 수 있다. 어느 해법도 모든 비선형 계획의 문제에 가장 효율적으로 답을 줄 수는 없다. 그러므로 이론의 개발과 풀이에 대한 방법 개발등이 분야연구는 매우 다양하다하겠다[13~19].

지금까지 또한 다양한 방법이 제시되고 있지만 대별한다면, 소위 답에서 만족해야할 조건 즉 필요조건을 이용하고 이의 답을 모색하는 최적점 조건(optimality criterion method) 방법은 간접적 방법으로 비교적 변수가 적을 때 응용할 수 있으며, 보다 직접적인 방법은 최소화하고 싶은 목적함수의 값이 줄어들도록 초기의 설계점에서부터 축차적으로 해답에 접근하는 것으로 컴퓨터의 발전과 함께 크게 이용되는 방법이다. 이 부류의 방법으로는 기울기(句配)에 근거를 둔 수정된 급강하 방법[5], 可用方向방법(feasible direction method)[11], 제한조건이 없는 문제의 풀이의 연속으로 제한 조건식이 자동적으로 만족하도록 하는 소위 벌칙함수 방법(penalty function method)[10]등 다양하다. 이들 방법을 다시 함수의 미분을 구하고 이를 사용하는 방법과 수치적으로 증분을 이용하여 미분값을 구하거나 아예 미분을 구하지 않는 방법으로 대별할 수 있다. 이들에 대해서는 본 강좌에서 더 논의하지 않겠다.

2. 필요 조건

본절에서는 최적화의 문제에서 해답이면 만족해야 할 조건 즉 필요조건을 간략히 소개하여 변수가 작고 제한 조건식이 작을 경우에 적용할 수 있도록 하고자 하며 또한 이 조건에 바탕을 둔 수치적 방법 이해에 도움을 주고자 한다. 최적화의 이론은 앞서 설명과 같이 응용 수학의 일 분야로 볼 수 있으며 매우 깊게 연구되어 있으므로 관심 있는 독자는 참고 문헌을 참조하기 바란다.

수학적인 최적화, 예를들어 최소화의 문제에서 궁극적으로 찾고자하는 것은 제한조건을 만족하는 허용 영역내에서 목적함수를 가장 적게 하는 점과 그 값을 찾는 것이지만, 전체 허용 영역과 그 위에 정의된 목적함수의 형태를 볼 수 없는 입장에서 최소점을 찾는다는 것과 확인하는 방법이 매우 어렵다.

허용 영역내의 어떤 점에서 목적함수 값이 그 점의 어떤 근방의 모든 점에서의 값과 비교하여 가장 적거나 또는 적어도 같은 값을 줄때 그 점을 상대적 최소점(relattve minimum)즉 극소점이라 부른다. 그 점 근방뿐만 아니라 허용 영역내의 모든 점에서의 값과 비교하여 가장 적거나

적어도 이보다 적은 함수값을 주는 점이 없을 때 이 점을 절대적 최소점(absolute minimum)이라 한다. 대부분의 축차적인 방법은 극소점을 찾는 과정에 불과하므로, 실제 문제에서는 이렇게 얻은 점이 과연 최소점인지 확인하기 위해 여러 다른 점에서 다시 축차적으로 얻은 값과 비교 검토할 필요가 있다.

먼저 제한 조건식이 없는 경우를 생각하자. 일 변수 함수 $f(x)$가 $\bar{x}$ 근방에서 Taylor급수로 전개하면,

$$f(\bar{x}+h)=f(\bar{x})+f'(\bar{x})h+\frac{1}{2}f''(\bar{x}+\theta h)h^2 \tag{31}$$

여기서 θ는 0과 1 사이의 어떤 값이다. 이 식에서 만약 $f'(\bar{x})\neq 0$이면, $f(\bar{x}+h)$는 h를 잘 잡아서 $f(\bar{x})$보다 적게 만들 수가 있으므로 $f(\bar{x})$는 극소값이 될 수 없다. 다시 말하면 $f(\bar{x})$가 극소값을 가지려면 $f'(\bar{x})=0$이 필수적이고, 이것이 $\bar{x}$가 $f(x)$의 극소점이 되기 위한 필요 조건이다. $f'(x)=0$을 만족하는 점을 정류점(stationary point)이라 한다. 또, 만약 $f'(\bar{x})=0$이고 $f''(\bar{x})>0$이면 모든 h에대해서 $f(\bar{x}+h)\geq f(\bar{x})$이므로, $f'(\bar{x})=0$과 $f''(\bar{x})>0$은 $\bar{x}$가 극소점이 되기위한 하나의 충분조건이다.

위에서 말한 이론을 다변수 함수 $f(x_1,\cdots,x_n)$에서도 성립한다. 즉, $\nabla f(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)=0$은$(\bar{x}_1,\cdots \bar{x}_n)$가 극소점이 위한 필요 조건이다. 이 조건과 $\nabla^2 f(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)$이 소위 一方的 陽(positive definite)이라는 조건은 하나의 충분 조건이 된다.

이제 등식의 제한 조건식이 있는 다음과 같은 NLP를 생각하자.

$$\min f(x_1,\cdots,x_n) \tag{32}$$

$$\text{subject to } h_i(x_1,\cdots x_n)=0, i=1,\cdots,m \tag{33}$$

이 경우 등식에서, 예를 들어$(x_1,\cdots,x_m)$을 $(x_{m+1},\cdots,x_n)$의 함수로 풀어서 $f(x_1,\cdots,x_n)$에 대입하면 $f(x_1,\cdots x_n)=F(x_{m+1},\cdots,x_n)$으로 되고 문제는 제한 조건식이 없이 $F(x_{m+1},\cdots x_n)$을 $(x_{m+1},\cdots,x_n)$에 대해서 최소화하는 문제와 같게 될 것이다. 그러나 이러한 방법은 극히 간단한 경우 외에는 변수를 소거하기가 어려우므로 다음과 같이 소위 Lagrange의 승수(Multiplier)$(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)$을 도입하면 제한 조건을 보다 쉽게 처리할 수 있다. 결과만 요약하면, 다음과 같은 필요조건을 얻게 된다. 즉, 만약$(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)$가 윗 문제의 극소점이라면 Lagrange 승수$(\bar{\lambda}_1,\cdots,\bar{\lambda}_m)$가 있어서 Lagrange의 함수

$$L(x_1,\cdots,x_n)=f(x_1,\cdots,x_n)+\sum\lambda_i h_i\cdot(x_1,\cdots,x_n) \tag{34}$$

이 $(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)$에서 정류값을 가지게 된다는 것이다. 다시 쓰면, 필요 조건은

$$\nabla f(x_1,\cdots,x_n)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\nabla h_i(x_1,\cdots,x_n)=0 \tag{35}$$

과 $h_i(x_1,\cdots,x_n)=0$ (36)

을 만족해야 한다는 것이다.

다음에 일반적인 비선형 계획법 문제 즉,

$$\min f(x_1,\cdots,x_n) \tag{37}$$

$$\text{subject to } h_i(x_1,\cdots,x_n)=0,\ i=1,\cdots,m \tag{38}$$

$$g_j(x_1,\cdots,x_n)\leq 0,\ j=1,\cdots,p \tag{39}$$

의 경우에 대해서 필요 조건을 요약하면 다음과 같다. 이에 대한 증명등은 부록의 참고문헌을 참조하라. 만약$(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)$가 위의 비선형 계획법의 극소점이라면 $(\bar{\lambda}_1,\cdots,\bar{\lambda}_m)$과 음수가 아닌 $(\bar{\mu}_1,\cdots,\bar{\mu}_p)$가 있어서 Lagrange의 함수

$$L(x_1,\cdots,x_n)=f(x_1,\cdots x_n)+\sum\lambda_i h_i+\sum\mu_j g_j \tag{40}$$

가$(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)$에서 정류점이 되어야 하고 $\mu_j g_j=0$ $j=1,\cdots,p$를 만족해야 한다는 것이다. 식으로 나타낸 필요조건은 $(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)$가

$$\nabla f+\sum\lambda_i\nabla h_i+\sum\mu_j\nabla g_j=0 \tag{41}$$

$$h_i=0,\ i=1,\cdots,m \tag{42}$$

$$\mu_j g_j=0,\ j=1,\cdots,p \tag{43}$$

$$\mu_j\geq 0,\ j=1,\cdots,p \tag{44}$$

를 만족해야 한다는 것이다. 이 조건을 Kuhn-Tucker의 필요 조건이라 부른다. 여기서 보면 미지수로는 $(x_1,\cdots,x_n)$, $(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)$, $(\mu_1,\cdots,\mu_p)$로 $(m+n+p)$개이고, 방정식 수도 $(m+n+p)$개로 일치하고 답을 구하게 되면 보통 다수를 얻게 된다.

이들은 필요조건이므로 이들의 해는 극소점에 대한 후보점을 제시할 뿐이므로 이들에 대해 충분조건을 검토하거나 아니면 모든 후보점들을

비교 검토하여 최소점을 선정할 수 있을 것이다. 이 필요조건에서 명기할 것은 부등식 제한조건에 해당하는 Lagrange의 승수는 음이되어서는 안된다는 것이며, 등식 제한 조건에 대응하는 승수에는 이와 같은 부호의 제한이 없다는 것이다.

다음 강좌에서는 필요조건을 이용한 비교적 간단한 문제에서의 풀이의 예를 보이고, 계속해서 축차적인 방법에 의한 수치적 방법을 소개하고자 한다.

참고문헌

1. Wilde, D.J., *Globally Optimal Design*, John Wiley Sons, 1978.
2. Stoecker, W.F., *Design of Themal Systems*, 2nd ed., McGraw-Hill, 1980.
3. 곽병만, "최적설계에 의한 CAD 패키지 개발", 대한기계학회지, Vol. 21, No. 6, 1981.
4. Mischke, C.R., *An Introduction ot Computer-Aided Design*, Prentice-Hall, 1968.
5. Haug, E.J. and J.S. Arora, *Applied Optimal Design*, Wileg-Interscience, 1979.
6. Shigley, J.E., Mechanical Engineering Design, Third Edition, McGraw-Hill, New York, 1977.
7. Dantzig, G.B., *Linear Programming and Extension*, Princeton University Press, 1963
8. Kuester, J.L. and J.E. Mize, *Optimization Techniques with FORTRAN*, McGraw-Hill, 1973.
9. Bazaraa, M.S. and C.M. Shetty, *Nonlinear Programming, Theory and Algorithms* John Wiley & Sons, 1979.
10. Duffin, R.J., E.L. Peterson and C.M. Zener, *Geometric Programming*, Wiley, 1967.
11. Polak, E., *Computational Methods in Optimization: A Unified Approach*, Academic Press, 1971.
12. Fiacco, A.V. and G.P. McCormick, *Nonlinear Programming: Sequentially Unconstrained Minimization Techniques*, John Wiley & Sons, 1968.
13. Luenberger D.,G., *Introduction to Linear and Nonlinear Programming*, Addison-Wesley, 1973.
14. Luenberger, D.G., *Optimization by Vector Space Methods*, John Wiley & Sons, 1969.
15. Cooper, L. and D. Steinberg, *Introduction to Methods of Optimizatior*, W.B. Saunders.
16. Hadley, G., *Nonlinear and Dynamic Programming*, Addison-Wesley, 1964.
17 Hestenes, M.R., *Optimization Theory*, John Wiley & Sons, 1975.
18. Pshenichnyi, B.N., Necessary Conditions for an Extremum, Marcel Dekker, 1971.
19. Beveridge, G.S.G. and R.S. Schechter, *Optimization: Theory and Practice*, McGraw-Hill, 1970.

◇