直接 모델 規範型 適應 制御系에 對한 收斂 速度 改善

(An Improvement of Convergence Rate for Direct Model Reference Adaptive Control Systems)

金 道 鉉*, 崔 桂 根**

(Do Hyun Kim and Keh-Kun Choi)

要 約

本 論文에서는 MRAC 方式을 利用하여 離散 時間이고 雜音이 없는 單一한 入出力을 갖는 線型系에 直接 制御 方式으로 適應 制御 알고리즘을 適用하였다.

直接 制御 方式에서 制御器는 媒介變數型으로 構成되고 그리고 媒介變數 調整을 위한 檢證 알고리즘은 일련의 逐次方程式으로 주어지는데 이는 加重 最小 自乘法에 따라 誘導되었다.

加重 最小 自乘法으로 制御器 媒介變數를 檢證했을 때 出力 追跡誤差가 零에 收檢하는 速度가 傾度法 또는 最小 自乘法을 使用했을 때보다 빠르다는 것이 컴퓨터 시뮬레이션으로 確忍되었으며 또한 λ를 變化시키는 提案된 加重 最小 自乘法은 規範型 모델 入力의 周波數 成分에 關係없이 使用될 수 있음을 보였다. 또한 이런 境遇에 있어서 收斂性과 安定度에 關해서도 考察했다.

Abstract

A class of adaptive control algorithms applied to discrete-time single-input single-output deterministic linear systems is analyzed by using direct model reference adaptive control.

Controller parameters are identified with weighted least square Method. And computer simulations reveal that proposed weighted least square method in which the value of depends on the identification error can be used regardless of the sufficient condition of reference input signal.

I. 序 論

프랜트의 媒介變數를 모르거나 媒介變數가 천천히 變하는 프랜트를 制御하는 方法으로 MRAC(model reference adaptive control)에 關한 硏究가 많이 이루어졌다.[1,2,7]

MRAC는 直接 制御와 間接 制御로 區分할 수 있다.[4,6]

直接 制御에서는 프랜트와 制御器를 包含한 全體 制御系의 傳達函數가 원하는 規範型 모델의 傳達函數와 같게 하기 위하여 制御器 媒介變數를 直接 檢證한다.

間接 制御에서는 먼저 프랜트의 媒介變數를 利用하여 全體 制御系가 規範型 모델과 같아지도록 制御器를 構成한다.[6] 그런데 지금까지 檢證하는 方法으로 主로 傾度法이나 最小 自乘法이 使用되었다. 그러나 위의 두 方法은 收檢 速度가 조금 느린 편이다.[3,5]

---

*正會員, 明知大學校 工科大學 電子工學科

(Dept. of Electronics Eng., Myong Ji Univ.)

**正會員, 서울大學校 工科大學 電子工學科

(Dept. of Electronics Eng., Seoul National Univ.)

接受日字 : 1982年 9月 9日

한편 最小 加重 自乘法에 根拠를 둔 檢證 알고리즘을 使用하여 比較的 收斂 速度가 빠른 適應 觀測器를 構成하고 이 觀測器를 間接 制御에 適用하는 것이 提示되었다.[4] 그런데 間接 制御에서는 프랜트의 媒介變數를 檢證하고 또 制御器 媒介變數를 求해야 하는 번거로움이 있는데 이것은 프랜트의 遲延 時間이 클수록 심하다. 따라서 制御器 媒介變數를 直接 檢證하는 直接 制御가 便利하다는 것을 알 수 있다.

本 論文에서는 加重 最小 自乘法을 直接 MRAC에 適用하여 收檢 速度를 改善하는데 그 目的이 있다.

Ⅱ. 本 論

프랜트와 規範型 모델이 주어지면 먼저 프랜트와 媒介變數를 알고 있다고 가정하고 프랜트의 出力과 規範型 모델의 出力差인 誤差를 制御器의 媒介變數로 表示하고 이 出力 誤差가 零이 되도록 制御則을 定한다. 다음에 制御器의 媒介變數를 加重 最小 自乘法으로 檢證하여 프랜트의 入力을 決定한다.

1. 프랜트에 對한 假定과 規範型 모델 設定

프랜트는 다음과 같은 線型差介方程式으로 나타낼 수 있다고 假定한다.

$$A(q^{-1})\, y(k) = q^{-d} B(q^{-1})\, u(k) \qquad (1)$$

여기서 q^{-1}은 逆遷移演算子이고 d는 陰이 아닌 整數로 遲延時間을 나타내고 $A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$은 다음과 같이 定義되는 多項式이다.

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \cdots a_n q^{-n}$$

$$B(q^{-1}) = b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \cdots b_m q^{-m} \quad b_1 \neq 0$$

規範모델은 다음과 같다고 假定한다.

$$A_M(q^{-1})\, y_M(k) = q^{-d} B_M(q^{-1})\, r(k) \qquad (2)$$

$$A_M(q^{-1}) = 1 + a_{M1} q^{-1} + \cdots + a_{Mn_M} q^{-n_M}$$

$$B_M(q^{-1}) = b_{M1} q^{-1} + b_{M2} q^{-2} + \cdots + b_{Mm_M} q^{-m_M}$$

위에서 係數들은 零이 될수도 있다.

프랜트와 規範型 모델에 對하여 다음과 같은 假定을 한다.

1) n, m, d를 알고 있다.
2) $B(q^{-1})$의 모든 zero는 單位圓 内部에 있다.
3) $A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$은 서로 素이다.
4) 規範型 모델의 次數가 프랜트의 次數와 같거나 작다.

2. 制御器 媒介變數에 依한 出力 表示

프랜트와 規範型 모델은 다음과 같이 可觀測 標準形의 狀態 方程式으로 나타낼 수 있다.

$$x(k+1) = Ax(k) + bu(k-d) \quad x(o) = x_o$$

$$y(k) = c^T x(k) \qquad (3)$$

$$A = \left[\begin{array}{c|c} -a & \begin{matrix} I \\ \hdashline 0 \end{matrix} \end{array}\right] \qquad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

$$b_1 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$x_M(k+1) = A_M x_M(k) + b_M r(k-d)$$

$$x_M(0) = x_{M_o} \qquad (4)$$

$$y_M(k) = c^T x_M(k)$$

$$A_M = \left[\begin{array}{c|c} -a_M & \begin{matrix} I \\ \hdashline 0 \end{matrix} \end{array}\right] \qquad a_M = \begin{bmatrix} a_{M1} \\ a_{M2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}.$$

$$b_M = \begin{bmatrix} b_{M1} \\ b_{M2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Dim}(x) = \mathrm{Dim}(x_M) = M_{ax}(n, m)$$

프랜트는 다음과 같이 表示할 수 있다.

$$x(k+1) = A_M x(k) + p_1 y(k) + bu(k-d)$$

$$x(0) = x_o$$

$$y(k) = c^T x(k) \tag{5}$$

단, $p_1 = a_M - a$

狀態誤差 및 出力 誤差는 다음과 같다.

$$V(k+1) = A_M V(k) + p_1 y(k) + bu(k-d)$$

$$-b_M r(k-d)$$

$$V(0) = x_o - x_{Mo}$$

$$e(k) = c^T V(k) \tag{6}$$

다음과 같은 벡터들을 定義한다.

$$\phi_1(k+1) = A_M^T \phi_1(k) + cy(k)$$

$$\phi_1(0) = 0$$

$$\phi_2(k+1) = \bar{A}_M^T \phi_2(k) + \bar{c}u(k)$$

$$\phi_2(0) = 0$$

$$\phi_3(k+1) = A_M^T \phi_3(k) + cr(k)$$

$$\phi_3(0) = 0 \tag{7}$$

$$\dim(\phi_1) = \dim(\phi_3) = \max(n, m)$$

$$\dim(\phi_2) = \max(n, m+d) = \bar{n}$$

$\bar{A}_M$는 $\bar{n} \times \bar{n}$ 行列로써 $m+d \leqq n$인 境遇에는 A_M과 같고 $m+d > n$인 境遇에는

$$\bar{A}_M = \left[\begin{array}{c:c} a_1 & \\ a_2 & \\ \vdots & I \\ a_n & \\ 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \cdots\cdots \\ & 0 \end{array}\right]$$

이다 또 $\bar{c}$는 처음 요소만 1이고 나머지 요소는 0인 $\bar{n}$ 벡터이다.

그러면 $y(k)$와 $e(k)$는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y(k) = \theta_1^T \phi_1(k-d) + \theta_2^T \phi_2(k-d)$$

$$+ c^T A_M^K x(o)$$

$$+ \sum_{j=1}^{d} p_1^T (A^T)^{j-1} cc^T A_M^{K-j+1} x(o)$$

$$= \theta_1^T \phi_1(k-d) + \theta_2^T \phi_2(k-d)$$

$$+ f(x(o), k) \tag{8}$$

$$= \theta^T \phi(k-d) + f(x(o), k)$$

여기서 $f(x(o), k)$는 k가 커짐에 따라 0에 收斂하며 $x(o)$에 따라 決定되는 函數이다.

$$\theta_1 = A^d p_1$$

$$\theta_2 = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ 0 \end{bmatrix} + p_1^T c \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots p_1^T (A^T)^{d-1} c \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \cdots\cdots \\ \theta_2 \end{bmatrix} \qquad \phi = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \cdots\cdots \\ \phi_2 \end{bmatrix}$$

$$e(k) = y(k) - b_M^T \phi_3(k-d)$$

$$+ f(x_M(o), k) \tag{9}$$

$$e(k+d+1) = y(k+d+1) - b_M^T \phi_3(k+1)$$

$$f(x_M(o), k+d+1)$$

$$= \theta_1^T \phi_1(k+1) + \theta_2^T \phi_2(k+1)$$

$$- b_M^T \phi_3(k+1) + f(x_M(o), k+d+1)$$

$$= \theta_1^T A_M^T \phi_1(k) + \theta_1^T cy(k) + \theta_2^T \bar{A}_M^T \phi_2(k)$$

$$+ \theta_2^T \bar{c}u(k) - b_M^T \phi_3(k+1)$$

$$+ f(x_M(o), k+d+1)$$

로 表示되므로 여기서 $e(k+d+1)$가 0이 되도록 $u(k)$를 定하면 프랜트의 出力은 規範型 모델의 出力과 같게 되고 全體 制御系의 傳達函數는 規範型 모델의 傳達函數와 같게 된다.

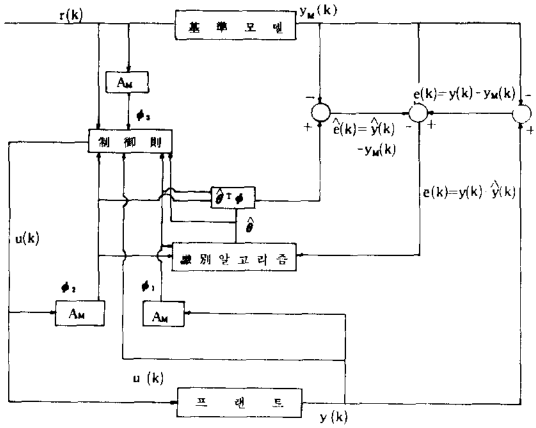

그림 1. 直接 MRAC 系의 系統図

Fig. 1. Schematic diagram of direct MRAC system.

3. 檢證 알고리즘

프랜트의 媒介變數를 모르기때문에 制御器 媒介變數 θ_1, θ_2를 찾아야 한다. 時刻 k때의 制御器 媒介變數 θ_1, θ_2의 檢證値를 $\hat{\theta}_1(k)$, $\hat{\theta}_2(k)$로 하였을 때 $y(k)$와 $e(k)$의 檢證値를 $y(k)$, $e(k)$라 한다. 그런데 $b_M^T\phi_3(k-d)$는 $y_M(k)$이고 알고 있는 量이므로 檢證誤差 $\bar{e}(k) = e(k) - \hat{e}(k)$는 $y(k) - \hat{y}(k)$와 같다.

$$y(k) = \hat{\theta}_2(k)^T\phi_1(k-d) + \hat{\theta}_2(k)^T\theta_2(k-d) + f(x(0), k)$$

$$= \hat{\theta}(k)^T\phi(k-d) + f(x(0), k) \qquad (10)$$

단 $$\hat{\theta}(k) \triangleq \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1(k) \\ \hat{\theta}_2(k) \end{bmatrix}$$

$$\phi(k) \triangleq \begin{bmatrix} \phi_1(k) \\ \phi_2(k) \end{bmatrix}$$

θ를 檢證하는 方法으로서 時刻 k에서 다음과 같은 評價函數를 最小가 되게 하는 $\hat{\theta}(k)$를 θ의 檢證値 $\hat{\theta}(k)$로 取한다.[4]

$$J(k) = \frac{1}{2}\sum_{j=d+1}^{k}\left\{\lambda^{k-j}\left(y(j) - \hat{\theta}(k)^T\phi(j-d)\right)\right\}^2 \qquad (11)$$

여기서 λ는 加重係數로서 $0 < \lambda < 1$이다. 이는 現在의 데이터에 比하여 過去의 데이터에 比重을 적게두는 역할을 한다. $\lambda = 1$이면 最小自乘法이 된다.

$\hat{\theta}(k)$에 對한 $j(k)$의 傾度가 零이 되도록 놓으면 $\hat{\theta}(k)$를 求할 수 있다.

$$\sum_{j=d+1}^{k}\lambda^{2(k-j)}\phi(j-d)\phi(j-d)^T\hat{\theta}(k) = \sum_{j=d+1}^{k}\lambda^{2(k-j)}\phi(j-d)y(j) \qquad (12)$$

다음과 같은 行列과 백터를 定義한다.

$$\Phi(\lambda, k-d) = \left\{\lambda^{k-d-1}\phi(1) \quad \lambda^{k-d-2}\phi(2)\cdots \quad \lambda\phi(k-d-1) \quad \phi(k-d)\right\} \qquad (13)$$

$$Y(\lambda, k)^T = \{\lambda^{k-d-1}y(d+1) \quad \lambda^{k-d-2}y(d+2)\cdots \quad \lambda y(k+1) \quad y(k)\} \qquad (14)$$

그러면 (12)式은 다음과 같이 된다.

$$\Phi(\lambda, k-d)\,\Phi(\lambda, k-d)^T\hat{\theta}(k) = \Phi(\lambda, k-d)\,Y(\lambda, k) \qquad (15)$$

여기서 $\Phi(\lambda, k-d)\,\Phi(\lambda, k-d)^T$의 逆行列이 存在한다고 假定하고 (15)式에서 逆行列을 求하는 것을 피하기 위해서 matrix inversion lemma를 利用하여 다음과 같이 遂次方程式으로 $\hat{\theta}(k)$를 表示한다.

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + \frac{\frac{1}{\lambda^2}\Gamma(\lambda, k-d-1)\phi(k-d)}{1 + \frac{1}{\lambda^2}\phi(k-d)^T} \left| \frac{\{y(k) - \hat{\theta}(k-1)^T\phi(k-d)\}}{\Gamma(\lambda, k-d-1)\phi(k-d)} \right. \qquad (16)$$

$$\Gamma(\lambda, k-d) = [\Phi(\lambda, k-d)\,\Phi(\lambda, k-d)^T]^{-1}$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}\Gamma(\lambda, k-d-1) - \frac{\frac{1}{\lambda^2}\Gamma(\lambda, k-d-1)\phi}{1 + \frac{1}{\lambda^2}\phi(k-d)^T} \frac{(k-d)\phi(k-d)^T\Gamma(\lambda, k-d-1)\frac{1}{\lambda^2}}{\Gamma(\lambda, k-d-1)\phi(k-d)}$$

$\Gamma(\lambda, \cdot) = D^2 I$로 놓으면 遂次方程式은 언제나 使用할 수 있다. 이때 $\Gamma(\lambda, k-d)$의 값은 $\Gamma(\lambda, k-d) = [\lambda^{2(k-d)}D^2 I + \Phi(\lambda, k-d)\,\Phi(\lambda, k-d)^T]^{-1}$이므로 k가 增加함에 따라 곧 원래의 값으로 수렴한다.

앞에서 $\Phi(\lambda, k-d)\,\Phi(\lambda, k-d)^T$의 逆行列이 存在한다고 假定했는데 그에 關해서 살펴 본다.

式(7)에서 $\phi_1(k)$, $\phi_2(k)$는

$$\phi_1(k) = \frac{1}{A^M(q^{-1})} \begin{bmatrix} Y(k-1) \\ \vdots \\ y(k-\bar{n}) \end{bmatrix}$$

$$\phi_2(k) = \frac{1}{A_M(q^{-1})} \begin{bmatrix} u(k-1) \\ \vdots \\ u(k-\bar{n}) \end{bmatrix} \qquad (17)$$

이므로 $\phi(k)$는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\phi(k) = \frac{1}{A_M(q^{-1})\,A(q^{-1})}\ EU(k) \qquad (18)$$

$$E=\left[\begin{array}{ccccccc}
\overbrace{0\ \cdots\ 0}^{d+1} & b_1 & b_2 & \cdots & b_m & & \\
 & & b_1 & \cdots & & b_m & \\
 & & & \ddots & & \ddots & \\
 & & & b_1 & b_2 & \cdots & b_m \\
\hdashline
1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & & \\
 & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & \\
 & & \ddots & & \ddots & & \\
 & & & 1 & a_1 & a_2\ \cdots & a_n
\end{array}\right]
\begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} n \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} \bar{n} \end{array}$$

$$u(k) = \begin{bmatrix} u(k-1) \\ u(k-2) \\ \vdots \\ u(k-n-\bar{n}) \end{bmatrix}$$

따라서 $\Phi(\lambda, k-d)$는 式(13)에 式(18)을 代入하면

$$\Phi(\lambda, k-d) = \frac{q^{-d}}{A_M(q^{-1})\,A(q^{-1})}\ E$$

$$\{\lambda^{k-d-1}\mu(d+1)\cdots\lambda\mu(k-1)\ \mu(k)\}$$

$$= \frac{q^{-d}}{A_M(q^{-1})\,A(q^{-1})} \cdot E\cdot U(\lambda, k) \qquad (19)$$

$\Phi(\lambda, k-d)\ \Phi(\lambda, k-d)^T$의 逆行列이 存在하려면

① $\det E \neq 0$

② $\det\{u(\lambda, k)\cdot u(\lambda, k)^T\} \neq 0$

이어야 한다.[4]

入力 $u(k)$의 周波數 成分이 充分히 많으면 ②는 만족된다.

또 $A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$이 서로 素이면 $\det E \neq 0$이다. 그러므로 加重 最小 自乘法을 直接 制御에 適用할 수 있다.

直接 MRAC에 加重 最小 自乘法을 適用할때 行列 E의 行列式이 零이 아니어야 한다는 것은 重要하다.

가령 프랜트의 次數를 잘 몰라서 실제로 프랜트의 $A(q^{-1})$과 $B(q^{-1})$의 次數가 各各 n, m보다 작은 境遇에도 벡터 ϕ_1과 ϕ_2의 dimension을 본문과 같이 잡는 境遇에는 行列 E가 $\det \neq 0$인 正方列行[square matrix]이 아니므로 入力 周波數가 充分한 境遇라도 $\Phi(\lambda, k-d)\ \Phi(\lambda, k-d)^T$의 逆行列이 存在하지 않아 加重 最小 自乘法을 適用할 수 없다.

4. 提案된 加重 最小 自乘法

加重 最小 自乘法을 使用하면 收檢 速度는 빠르나 規範型 入力 $r(k)$의 周波數 成分이 充分히 많아야 使用될 수 있다는 條件이 있다. 그러나 實際 制御 間題에 있어서는 레귤레이터와 같이 規範型 入力의 周波數 成分이 적은 境遇가 많다. 이런 境遇에 規範型 入力 周波數 成分에 關係없이 加重 最小 自乘法을 使用할 수 있도록 λ를 檢證 誤差 卽 $\bar{e}(k)$의 函數로 놓아 檢證 誤差가 큰 境遇에는 λ가 작고 媒介變數가 收檢한 뒤에는 $\lambda = 1$로 되게 하여 最小 自乘法과 같게 하며 入力 $r(k)$의 周波數 成分에 關係없이 빨리 收斂하는 알고리즘을 얻을 수 있다. 本 論文에서는 λ를 다음과 같이 變化시켜서 컴퓨터 시뮬레이션을 하였더니 종전의 加重 最小 自乘法에 依한 것보다 收檢 速度가 빠른 좋은 結果를 얻었다.

$$\lambda = \frac{1}{1 + G\log(1 + \bar{e}^2(k))} \qquad G > 0 \qquad (20)$$

여기서 $\bar{e}(k) = y(k) - \hat{\theta}(k-1)^T\,\phi(k-d)$

5. 制御則

앞에서 언급한 바와 같이 $e(k+d+1)$이 零이 되도록 $u(k)$를 定한다.

$$\hat{e}(k+d+1) = \hat{\theta}_1^T(k)\,\phi_1(k+1)$$

$$+\hat{\theta}_2^T(k)\,\phi_2(k+1) - b_M^T\,\phi_3 \qquad (21)$$

$(k+1) = 0$ 에서

$$u(k) = \frac{1}{\hat{\theta}_1^T(k)}\{b_M^T A_M^T \phi_3(k)$$

$$+ b_M^T c\,r(k) - \hat{\theta}_1^T(k) A_M^T \phi_1(k)$$

$$-\hat{\theta}_1^T(k)\,cy(k) - \hat{\theta}_2^T(k)\,\bar{A}_M^T \phi_2(k)\} \qquad (22)$$

6. 시뮬레이션

制御하려는 프랜트 規範型 모델을 다음과 같이 假定하고 apple Ⅱ 마이크로콤퓨터로 시뮬레이션을 遂行하였다.

프랜트:

$$A(q^{-1})\,y(k) = q^{-d} B(q^{-1})\,u(k) \qquad (23)$$

여기서

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2}$$

$$B(q^{-1}) = b_1 q^{-1}$$

$d = 1$: 遲延時間

規範型 모델:

$$A_M(q^{-1})\,y_M(k) = q^{-d} B_M(q^{-1})\,r(k) \quad (24)$$

여기서

$$A_M(q^{-1}) = 1 + a_{M_1} q^{-1} + a_{M_2} q^{-2}$$

$$B_M(q^{-1}) = b_{M_1} q^{-1}$$

$d = 1$

式(23)과 (24)로 주어지는 프랜트와 規範型 모델에서 각 媒介變數들의 값을 다음과 같이 놓았다.

모델 媒介變數:

$$a_{M_1} = 0$$
$$a_{M_2} = 0$$
$$b_{M_1} = 1$$

프랜트 媒介變數는 凡例와 같이 變化시키면서 制御器 媒介變數를 凡例에서 주어진 4가지 方法에 依하여 2個의 모델 入力 即 階段과 正弦波 入力의 境遇에 對해서 檢證하여 프랜트를 制御하였다.

이때 制御器 媒介變數 誤差의 norm $L(k)$와 出力誤差 $E(k)$를 凡例의 4가지 方法에 對해 比較했는데 다음 그림과 같다. $L(k)$와 $E(k)$에 對한 값을 그림에서 보면 提案된 加重 最小自乘法에 依한 境遇가 모델 入力이 階段 入力이든 正弦波 入力이든 關係없이 收斂 速度가 빠르다는 것을 알 수 있다.

특히 不安定系에 있어서는 加重 最小 自乘法을 適用했을 境遇 λ가 零에 가까워지면 發散하는 것을 시뮬레이션 結果에서 볼 수 있었으나 提案된 加重 最小自乘法을 適用했을 때는 항상 收斂한다는 것을 알 수 있었다.

따라서 提案된 加重 最小 自乘法은 프랜트가 安定이든 不安定이든 關係없이 適用할 수 있으며 위의 다른 方法보다 收斂速度가 빠르다는 것을 알 수 있다.

7. 安定度 解析

安定度 解析은 $0 < \lambda \leq 1$인 境遇에서 다루겠다. 다음과 같은 媒介變數 檢證誤差 벡터 $\tilde{\theta}(k)$를 定義한다.

$$\tilde{\theta}(k) = \hat{\theta}(k) - \theta$$

式(8)과 式(15)에서

$$\tilde{\theta}(k) = \tilde{\theta}(k-1) - \frac{\frac{1}{\lambda^2}\Gamma(\lambda, k-d-1)}{1+\frac{1}{\lambda^2}\phi(k-d)^T} \frac{\phi(k-d)\{\phi(k-d)^T\tilde{\theta}(k-1)}{\Gamma(\lambda, k-d-1)} \frac{-f(x(0),k)}{\phi(k+d)} \qquad (25)$$

다음과 같은 非陰函數를 定義한다.

$$w(k) = \tilde{\theta}(k)^T \Gamma(\lambda, k-d)^{-1}\tilde{\theta}(k) \quad (26)$$

그러면 (25)(26)式으로 부터

$$w(k) - w(k-1) = -(1-\lambda^2)\,w(k-1)$$

$$-\tilde{\theta}(k-1)^T \frac{\phi(k-d)\phi(k-d)^T\tilde{\theta}(k-1)}{1+\phi(k-d)^T\frac{\Gamma(\lambda, k-d-1)}{\lambda^2}\phi(k-d)}$$

$$+\frac{2\tilde{\theta}(k-1)^T\phi(k-d)f(x(o),k)}{1+\phi(k-d)^T\frac{\Gamma(\lambda, k-d-1)}{\lambda^2}\phi(k-d)}$$

$$+\frac{\frac{1}{\lambda^2}\phi(k-d)^T\Gamma(\lambda, k-d-1)\,\Gamma(\lambda, k-d)^{-1}}{\left\{1+\phi(k-d)^T\frac{\Gamma(\lambda, k-d-1)}{\lambda^2}\right.}$$

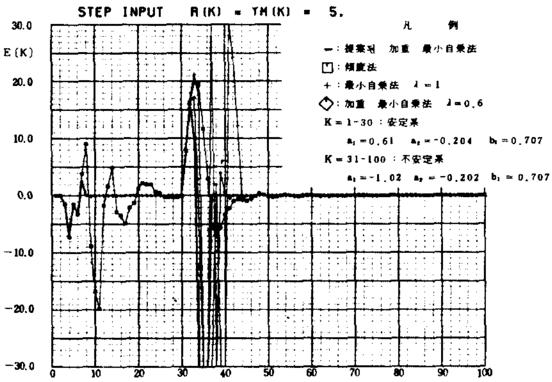

그림 2. 出力誤差

Fig. 2. Error of output : E(k).

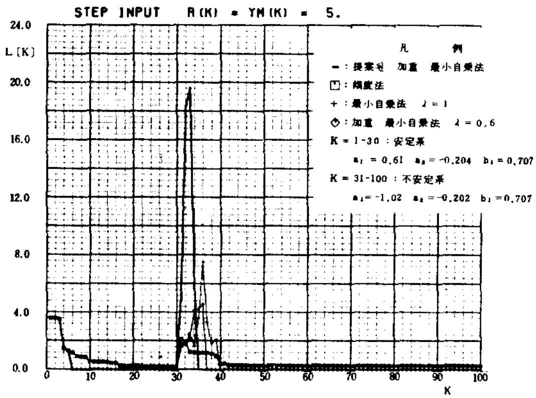

그림 3. 媒介變數 誤差의 Norm

Fig. 3. Norm of parameter error : L(k).

$$\frac{\Gamma(\lambda, k-d-1)\phi(k-d)\frac{1}{\lambda^2} f^2(x(o),\ k)}{\phi(k-d)\Big\}^2} \tag{27}$$

W(k)는 非陰函數이고 $\lim_{k\to\infty}$ (x(o), k)=0 이므로

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|\theta(k-1)^T \phi(k-d)|^2}{1+\phi(k-d)^T \dfrac{\Gamma(\lambda, k-d-1)}{\lambda^2}\phi(k-d)} = 0 \tag{28}$$

$0<\lambda<1$ 인 境遇에 다음 가정이 必要하다.

行列 $\Gamma(\lambda\ \cdot)$의 고유치에 對해

$$\rho_{min}\quad \Gamma(\lambda\ \cdot) \geqq C_1 > 0 \qquad \forall k$$

$$\rho_{max}\quad \Gamma(\lambda\ \cdot) \leqq C_2 < \infty$$

라 假定하면 (21), (25), (28)式으로 부터 다음 式을 얻을 수 있다.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e(k)|^2}{1+\phi(k-d)^T\,\Gamma(\lambda, k-d-1)\,\phi(k-d)} = 0 \tag{29}$$

한편 ϕ에 對하여 다음과 같은 展開方程式(evolution eq.)을 얻는다.[2,3]

$$\phi(k-d) = F\phi(k-d-1) + g\,e(k) + R(k) \tag{30}$$

여기서

$$F = \left[\begin{array}{c:c} A^T & \\ \hdashline -\dfrac{1}{\theta_2^T c}\,\bar{c}\,\theta_1^T\ A^T & \end{array}\right]$$

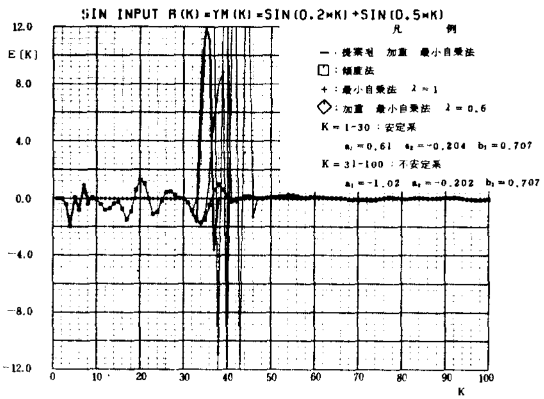

그림 4. 出力誤差

Fig. 4. Error of output : E(k).

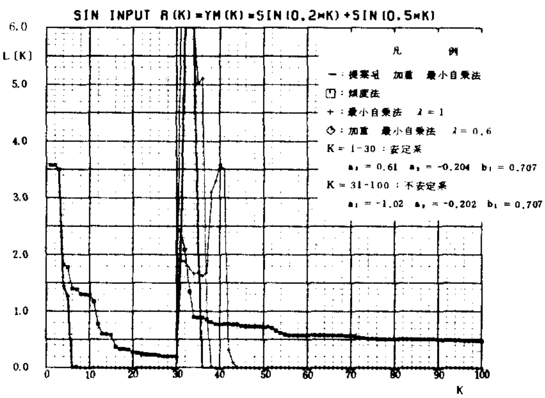

그림 5. 媒介變數 誤差의 Norm : L(k)

Fig. 5. Norm of parameter error : L(k).

$$
\begin{array}{c}
cp^T_{2(d)} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
A^T_M - \dfrac{1}{\theta_2^T \bar{c}} \bar{c}[\theta_2^T \bar{A}^T_M + \theta_1^T cp^T_{2(d)}
\end{array}
\Bigg]
$$

$$
g = \frac{1}{\theta_2^T \bar{c}} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$R(k)$는 $x(o)$와 $y_M(k)$의 函數로서 $y_M(k)$가 有界되면 有界된다.

行列 F의 特性 多項式은 $A_M(q^{-1})B(q^{-1})$이다.

그러므로 F는 安定한 行列이고 따라서 $\rho\max F < 1$ 이며 다음 式을 얻는다.

$$
|\phi(k-d)| \leq c + \sum_{j=0}^{K-d-1} (\rho\max F)^j |g| \, |e(k-j)| \tag{31}
$$

이와같이 $\phi(k-d)$는 $e(k)$에 無關하게 커질 수 없고 $y_M(k)$가 平等有界이므로 $e(k) \to 0$에 따라 $\phi(k)$도 平等有界가 된다.

(29)式과 (31)式에서 $\lim_{K\to\infty} |e(k)| \to 0$임을 알 수 있다. 따라서 $|e(k)|$는 零에 收斂하고 $\phi(k-d)$는 有界된다.

Ⅲ. 結 論

加重 最小 自乘法을 MRAC의 間接 制御뿐만 아니라 直接 制御에도 適用할 수 있음을 보였다.

傾度法이나 最小 自乘法에 依하던 直接 制御에 加重 最小 自乘法을 適用해서 收斂 速度를 改善하였다. 위의 方法을 適用하기 위해서는 프랜트의 入力이 充分한 周波數 成分을 갖고 있어야 한다는 條件이 必要하다.

그러나 實際로는 周波數 成分이 充分하다는 條件을 만족시킬 수 없는 境遇가 있다.

이런 境遇에는 加重 最小 自乘法에서 λ를 出力 誤差의 函數

$\lambda = \dfrac{1}{1 + G\log(1 + \bar{e}(k)^2)}$ $G > 0$로 놓아 이 誤差가 클 때는 λ의 값이 작고 또 誤差가 零일때는 $\lambda = 1$이 되게 하여 最小 自乘法이 되게 하면 規範型 모델의 入力 $r(k)$의 周波數 成分이 充分치 않은 境遇에도 適用할 수 있다.

參 考 文 獻

[1] Bo Egardt, "Unification of some discrete-time adaptive control schemes", *IEEE Trans. on Automatic Control,* vol. AC-25, no. 4, August 1980.

[2] Bo Egardt, "Stability analysis of discrete-time adaptive control schemes", *IEEE Trans. on Automatic Control,* vol. AC-25, no. 4, August 1980.

[3] Jean-Jacques J. Fuchs, Discrete adaptive control a sufficient condition for stability and applications", *IEEE Trans. on Automatic Control,* vol. AC-25, no. 5 October 1980.

[4] T. Suzuki, T. Nakamura, M. Kaga, "Discrete adaptive observer with fast convergence," *Int. Jo Control,* vol. 31, no. 6, 1980.

[5] G.C. Goodwin P. Jo Ramadge, P.E. CAINS, "Discrete-time multitivariable adaptive control", *IEEE Trans, on Automatic Control,* vol. AC-25, no. 3, June 1980.

[6] K.S. Narendra, L.S. Valavani, "Direct and indirect model reference adaptive control," *Automatica,* vol. 15, pp. 653-664, 1979.

[7] 金道鉉, 金成國, "Direct MRAC에 대한 Weighted-Least Square Method의 適用에 關한 研究," 大韓電子工學會 秋季綜合學術大會 論文集 vol. 4, no. 3, 1981.