

# Elliptic 필터 函數의 時間領域特性에 대한 考察

## (The Time-Domain Characteristics of Elliptic Filter Functions)

韓 秉 誠\*, 金 炯 甲\*\*  
(Byoung Sung Han and H. K. Kim)

### 要 約

Elliptic 함수는 허수 축상에 영점을 가지며 통과영역과 차단영역에서 같은 파상을 갖는데 결과적으로 elliptic 함수는 천이영역을 최소로 함으로써 감도면에서 최적인 상태를 만들 수 있으나, 시간 영역에서의 특성은 Chebyshev 함수나 Butterworth 함수 응답 특성보다 떨어진다.

본 논문은 통과영역 감쇠율, 차단 주파수  $\omega_s$  등과 같이 여러 요소를 변화시켰을 때의 효과를 분석하기 위해서 단위계단 응답과 임펄스 응답을 분석해 보았다. 그 결과 다음과 같은 독특한 특성이 나타났는데 elliptic 필터 함수의 계단 응답은 높은 고유주파수에서 오버슈우트와 언더슈우트가 크고 빠르게 발생했고 초기값은  $\omega_s$ 가 증가하므로 감소하나 원점에서 시작하지는 않았다.

Butterworth나 Chebyshev의 경우와는 다르게 임펄스 응답은 원점에서 시작하지 않는 것도 있으며 위와 같은 독특한 특성을 알아보도록 8개의 특성곡선을 제시하였다.

### Abstract

The elliptic functions have transmission zeros on the imaginary axis and exhibit equal ripples in the stopband as well as in the passband. As a consequence they can be made optimal in the sense that the transition band is minimal. However the time domain behaviors turned out to be inferior to those of Chebyshev and Butterworth responses.

This paper investigates the unit step responses and impulse responses in order to analyze the effects of various parameters such as passband attenuation, stopband frequencies  $\omega_s$  etc., The following are the prominent features. Step responses of elliptic filters rise faster and produce larger overshoots and undershoots with higher natural frequencies. In the case of even functions, the initial values are non-zero which decreases as  $\omega_s$  increases. Unlike Butterworth or Chebyshev cases the impulse responses start with nonzero values which also decrease as  $\omega_s$  or order of the function increases. Eight figures are included to illustrate above analysis.

### I. 序 論

필터裝置를 만드는데 應用되고 있는 필터 函數들의

特性을 考察하는 方法들중 時間領域에서의 特性을 考察하는 方法은 入力信號  $V_1(t)$ 와 出力信號  $V_2(t)$ 의 時間領域 特性 특히 信號 歪曲의 時間領域 特性을 測定하는 方法의 存在에<sup>[1]</sup> elliptic 필터 函數의 歪曲의 程度를 考察하기 爲해서 임펄스와 階段入力에 따른 出力의 變化를 時間의 變化에 따라 考察해 보았다.

임펄스 應答은  $V_1(t) = \delta(t)$  [ $V_1(s) = 1$ ]을 印加했을 때 나타나는 應答으로 理想的인 임펄스 應答은 振幅이 K인 임펄스으로써 抵域通過 Butterworth 필터 函數

\*正會員, 全北大學校 工科學 電氣工學科  
(Dept. of Electrical Eng., Jeonbug National Univ.)

\*\*非會員, 캐나다 마니토바 대학  
(Dept. of Electrical Eng., Manitoba Univ. of Canada)  
接受日字: 1983年 6月 13日

와 Chebyshev 필터 函數의 임펄스 應答은 次數  $n$ 에 따라 時間  $t$ 의 여러 點중에서  $t=t_0$  [ $t_0$ : 최초 오버슈트 슈우트가 일어난 時間]인 點에서 中心 펄스를 갖고 次數  $n$ 에 좌우되며  $t > t_0$  點에서 언더슈우트(undershoot)하면서 振動한다. Thomson 필터 函數나 Bessel 필터 函數도 역시 여러 點에서 펄스의 中心을 가지나 振動變化는<sup>[2,3]</sup> 이들 펄스 中心이 급격히 떨어진 후 작은 언더슈우트를 갖는 다음에 發生한다.

理想的인 階段應答은  $a(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)/S\}$ 에서 [ $H$ : 傳達函數]  $a(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Ke^{-s\tau}/s\} = Ku(T-\tau)$ 로 振幅  $K=1$ 이 되고  $\tau$  時間만큼 遲延된 階段函數로써 Butterworth나 Chebyshev의 抵域通過 필터函數의 階段應答은 類似한 應答特性을 보여 주는 데 높은 周波數에서는 큰 利得에 따른 오버슈우트(overshoot)가 있고 오버슈우트후에 入力의 갑작스런 變動에 따른 振動이 일어난다. Bessel 필터 函數는 階段應答에서 오버슈우트나 振動이 없는데 抵域通過 elliptic 필터函數는 阻止領域과 通過領域에서 等波狀(equal ripple)을 갖는 독특한 振幅의 크기 特性을 갖고 遷移領域이 어느 필터보다 좋은 特性을 갖는데 이 振幅크기 特性은

$$|N(j\omega)|^2 = \frac{H^2}{1 + R_n^2(\omega)}$$

이고 分母  $R_n(\omega)$ 는 有理函數의 形態로 次數  $n$ 과는 無關하게  $0 \leq \omega \leq 1$  (rad/sec)에서 通過領域을 만들며 次數  $n$ 에 따라 遷移領域에서 더욱 가파르다.

본 論文에서는 elliptic 필터函數가 0.1dB와 1.0 dB 通過領域 波狀에서 次數  $n$ 가 2, 3, 4, 5, 6, 7의 6種類의 필터函數를 遮斷周波數가 각각 1.05 (rad/sec), 1.10 (rad/sec), 1.20 (rad/sec), 1.50 (rad/sec), 2.00 (rad/sec)인 경우의 임펄스와 階段應答을 計算하기 위하여 連分數로 展開하여 時間領域에서의 應答을 計算하고 이 連分數를 逆 Laplace 變換한 값을 時間  $t$ 의 變化에 따른 出力變化를 컴퓨터 프로그래밍하여 韓國科學技術院에 設置된 CDC社의 CYBER 174-16 시스템 컴퓨터를 使用하여 計算한 結果를 Calcomp 960 plotter (belt bed system)를 利用하여 그래프로 나타낸 후 比較 檢討하였다.

II. Elliptic 필터 函數의 時間領域特性 計算

抵域通過 elliptic 필터函數의 振幅크기 特性式

$$|N(j\omega)|^2 = \frac{H^2}{1 + R_n^2(\omega)} \tag{1}$$

에서 有理函數  $R_n(\omega)$ 는  $n$ =偶數때와  $n$ =奇數때의

두 가지 形態를 갖는데<sup>[1,2,4]</sup>,

$n$ =偶數인 경우

$$R_n(\omega) = \frac{(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2) \cdots (\omega_{\frac{n}{2}}^2 - \omega^2)}{(1 - \omega_1^2 \omega^2)(1 - \omega_2^2 \omega^2) \cdots (1 - \omega_{\frac{n}{2}}^2 \omega^2)} \tag{2}$$

$n$ =奇數인 경우

$$R_n(\omega) = \frac{\omega(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2) \cdots (\omega_{\frac{n-1}{2}}^2 - \omega^2)}{(1 - \omega_1^2 \omega^2)(1 - \omega_2^2 \omega^2) \cdots (1 - \omega_{\frac{n-1}{2}}^2 \omega^2)} \tag{3}$$

이 된다.

式(2)와 (3)을 周波數 變形을 시키면

$$R'_n(\omega) = M \frac{(\omega_1^2 - \omega^2/\omega_s)(\omega_2^2 - \omega^2/\omega_s) \cdots (\omega_{\frac{n}{2}}^2 - \omega^2/\omega_s)}{(1 - \omega_1^2 \omega^2/\omega_s)(1 - \omega_2^2 \omega^2/\omega_s) \cdots (1 - \omega_{\frac{n}{2}}^2 \omega^2/\omega_s)} \tag{4}$$

$$R'_n(\omega) = N \frac{\omega(\omega_1^2 - \omega^2/\omega_s)(\omega_2^2 - \omega^2/\omega_s) \cdots (\omega_{\frac{n-1}{2}}^2 - \omega^2/\omega_s)}{(1 - \omega_1^2 \omega^2/\omega_s)(1 - \omega_2^2 \omega^2/\omega_s) \cdots (1 - \omega_{\frac{n-1}{2}}^2 \omega^2/\omega_s)} \tag{5}$$

$M, N$ : 곱셈 常數

$\omega_s$ : 遮斷領域 始作周波數

式(1)의  $R_n^2(\omega)$  대신 式(4)를 代入하고 왼쪽 半平面에서 極點과  $j\omega$ 軸의 上半面에서 零點을 選擇하고  $\omega$  대신  $\frac{s}{j}$ 를 代入하면 偶數次 elliptic 回路網 函數의 一般的인 形態는

$$N_o(s) = \frac{H_o \prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} (s^2 + \Omega_i^2)}{a_o + a_1 s + \cdots + a_{n-1} s^{n-1} + a_n s^n}$$

$n = 2, 4, 6, \dots$

이 되며 分母次數와 分子의 次數는 같다.

奇數次 elliptic 回路網 函數는 式(1)의  $R_n^2(\omega)$  대신 式(5)를 代入하면

$$N_o(s) = \frac{H_o \prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} (s^2 + \Omega_i^2)}{a_o + a_1 s + \cdots + a_{n-1} s^{n-1} + a_n s^n}$$

$n = 3, 5, 7, \dots$

이 되고 奇數次와 偶數次 標準化 elliptic 필터의 傳達

函數는  $\omega_s = 1.05(\text{rad/sec})$ 에서  $\omega_s = 2.00(\text{rad/sec})$ 까지 次數  $n=2$ 에서  $n=10$ 까지 極값과 零값 그리고 2次分母要素는 이미 表로<sup>[5]</sup> 만들어져 發表되었고 이 函數의 一般의 形態는

$$N(s) = H \prod_i \frac{s^2 + c_i}{s^2 + a_i s + b_i}$$

이고 0.1dB와 1.0dB 通過領域 波狀에 대하여 求해져 있다.

$n = 3$ ,  $\omega_s = 1.05(\text{rad/sec})$  通過領域波狀 0.1dB에서 elliptic 函數는

$$N(s) = \frac{H(s^2 + 1.205410)}{(s + 2.812966)(s^2 + 0.089707s + 1.166967)}$$

가 되고  $S = 0$ 일때  $N(0) = 1$ 이므로  $H$ 를 求하여 代入하면

$$N(s) = 2.723259 \cdot$$

$$\left( \frac{(S^2 + 1.205410)}{(S + 2.812966)(S^2 + 0.089707 + 1.166969)} \right) \quad (6)$$

이 된다. 式(6)의 가로안의 分母, 分子를 分離한後 常數  $H$ 를 곱하고 逆 Laplace 變換을 할 수 있도록 하면

$$N(s) = \frac{2.812965924}{S + 2.812966} - 0.089706952 \cdot$$

$$\frac{S + 0.044853}{(S + 0.044853)^2 + (1.079331813)^2} + 0.003727931$$

$$\cdot \frac{1.079331813}{(S + 0.044853)^2 + (1.079331813)^2} \quad (7)$$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[N(s)]$$

$$= 2.812965924 e^{-2.812966t} - e^{-0.044853t} \cdot$$

$$(0.089706952 \cos 1.079331813t$$

$$- 0.003727931 \sin 1.079331813t) \quad (8)$$

$$+ 2.812965924 e^{-2.812966t} - e^{-0.044853t} \cdot$$

$$[0.089784378 \cos(1.079331813 +$$

$$+ 2.379658191)] \quad (9)$$

$N(s)$ 의 單位 階段應答  $a(t) = \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s}N(s)]$ 에서 單位 階段函數는  $U(t) = 0(t < 0)$  또는,  $U(t) = 1(t > 0)$ 로 定義되며 이것을 Laplace 變換을 하면  $\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$ 이다. 式(6)에 單位 階段函數를 加하여 應答을 計算하면

$$\frac{1}{s} N(s) = 2.723259$$

$$\left\{ \frac{s^2 + 1.205410}{s(s + 2.812966)(s^2 + 0.089707s + 1.166969)} \right\} \quad (10)$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{1.00000009}{s + 2.812966} + 0.00000009 \cdot$$

$$\frac{(s + 0.044853)}{(s + 0.044853)^2 + (1.079332)^2} - 0.083113496$$

$$\frac{1.079332}{(s + 0.044853)^2 + (1.079332)^2} \quad (11)$$

$$N(s) \text{ 單位 階段應答는 } a(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} N(s) \right\}$$

$$a(t) = 1 - 1.00000009 e^{-2.812966t} + e^{-0.044853t}$$

$$(0.00000009 \cos 1.079332t - 0.083113496$$

$$\sin 1.079332t) \quad (12)$$

$$= 1 - 1.00000009 e^{-2.812966t} + e^{-0.044853t} \cdot$$

$$[0.083113496 \cos(1.079332t + 89.99993796)] \quad (13)$$

위 例처럼 5가지의 서로 다른 阻止領域周波數에서  $n = 2$ 부터  $n = 7$ 까지 0.1dB과 1.0dB의 通過領域 波狀에 대하여 임펄스 階段 두 應答式을 求하여 特性曲線을 그려 보았다.

### III. 單位 임펄스 應答分析

2次 elliptic 필터 函數의 임펄스 應答는  $h(t) = K_2 \cdot \delta(t) + e^{-\alpha_1 t} [A_1 \cos(\beta_1 t + \theta_1)]$  ( $n = 2$ )로 表示할 수 있으며 2次 elliptic 필터의 傳達函數는 周波數 領域에서 한 쌍의 共軛複素數 極點을 갖고 制動(damping) 常數와 振動周波數는 이들 極값의 實數部와 虛數部의 크기이다.

그러므로 4次와 6次的 필터函數는 많은 쌍의 共軛複素數 極을 갖게 되므로 임펄스 應答에 기여하는  $\alpha$ 와  $\beta$ 가 하나 이상이 되어

$$h(t) = K_4 \delta(t) + e^{-\alpha_1 t} [A_1 \cos(\beta_1 t + \theta_1)]$$

$$- e^{-\alpha_2 t} [A_2 \cos(\beta_2 t + \theta_2)] \quad (n = 4)$$

$$h(t) = K_6 \delta(t) + e^{-\alpha_1 t} [A_1 \cos(\beta_1 t + \theta_1)]$$

$$- e^{-\alpha_2 t} [A_2 \cos(\beta_2 t + \theta_2)]$$

$$+ e^{-\alpha_3 t} [A_3 \cos(\beta_3 t + \theta_3)] \quad (n = 6)$$

$K_2$ : 2次 필터의 임펄스 크기(strength) 常數

$K_4$ : 4次 필터의 임펄스 크기 常數

$K_6$ : 6次 필터의 임펄스 크기 常數

$\alpha$  : 制動常數

$\beta$  : 振動周波數

이고  $n$  가 奇數次 필터函數는

$$h(t) = A_0 e^{-\alpha_0 t} - e^{-\alpha_1 t} [A_1 \cos(\beta_1 t + \theta_1)] \quad (n = 3)$$

$$h(t) = A_0 e^{-\alpha_0 t} - e^{-\alpha_1 t} [A_1 \cos(\beta_1 t + \theta_1)] + e^{-\alpha_2 t} [A_2 \cos(\beta_2 t + \theta_2)] \quad (n = 5)$$

$$h(t) = A_0 e^{-\alpha_0 t} - e^{-\alpha_1 t} [A_1 \cos(\beta_1 t + \theta_1)] + e^{-\alpha_2 t} [A_2 \cos(\beta_2 t + \theta_2)] + e^{-\alpha_3 t} [A_3 \cos(\beta_3 t + \theta_3)] \quad (n = 7)$$

임펄스應答에 대한 特性曲線中 一部를 그림 1, 2, 3, 4에 나타내었다.

그래프로 그릴 때는 偶數次 函數의 임펄스 크기를 除外하고 그래픽하였다.

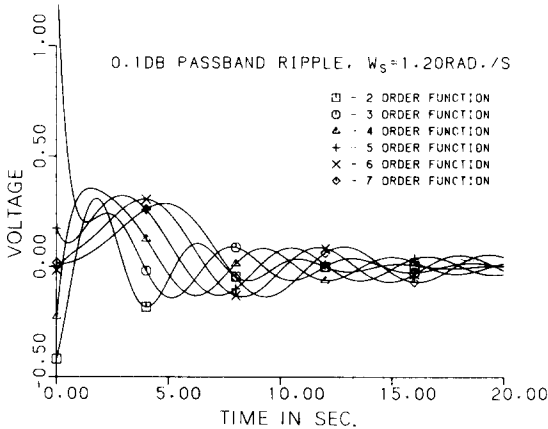


그림 1. 단위 임펄스 응답곡선  
Fig. 1. Unit impulse response.

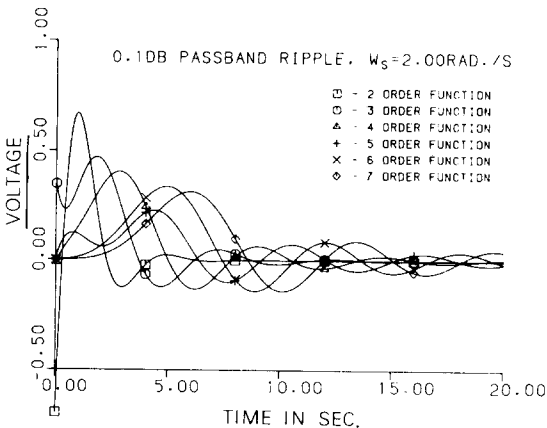


그림 2. 단위 임펄스 응답곡선  
Fig. 2. Unit impulse response.

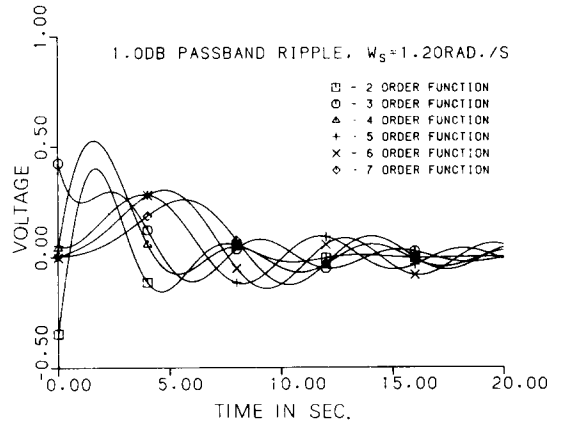


그림 3. 단위 임펄스 응답곡선  
Fig. 3. Unit impulse response.

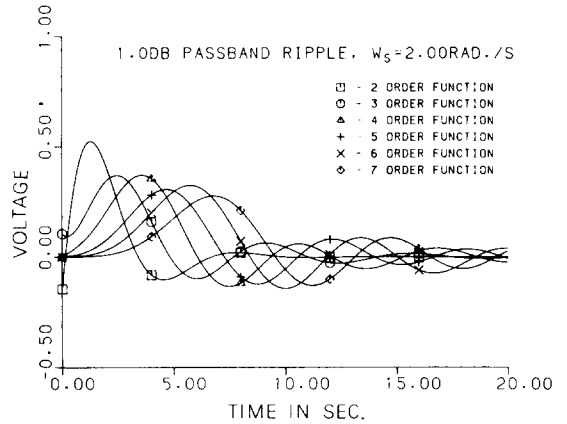


그림 4. 단위 임펄스 응답곡선  
Fig. 4. Unit impulse response.

IV. 單位 階段 應答分析

$n$  가 奇數次 필터函數는 時間  $t = 0$ 에서의 應答는 零이며  $n$  가 偶數次 필터函數는  $t = 0$ 에서의 應答는  $0 < a(t) < 1$ 인 점에서 시작하고  $\omega_s$ 가 증가할수록 0에 가까워져 간다.

時間領域特性曲線을 얻기 위한 式을 구해보면

$n$ 은 偶數次일 때

$$a(t) = 1 - e^{-\alpha_1 t} [A_1 \cos(\beta_1 t + \theta_1)] \quad (n = 2)$$

$$a(t) = 1 - e^{-\alpha_1 t} [A_1 \cos(\beta_1 t + \theta_1)] + e^{-\alpha_2 t} [A_2 \cos(\beta_2 t + \theta_2)] \quad (n = 4)$$

$$a(t) = 1 - e^{-\alpha_1 t} [A_1 \cos(\beta_1 t + \theta_1)] + e^{-\alpha_2 t} [A_2 \cos(\beta_2 t + \theta_2)] + e^{-\alpha_3 t} [A_3 \cos(\beta_3 t + \theta_3)] \quad (n = 6)$$

$n = 奇數次$ 일 때

$$a(t) = 1 - A_0 e^{-\alpha_0 t} + e^{-\alpha_1 t} [A_1 \cos(\beta_1 t + \theta_1)] \quad (n = 3)$$

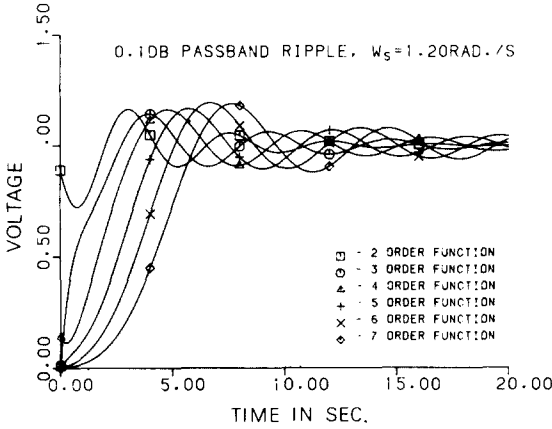


그림 5. 단위 階段 응답곡선  
Fig. 5. Unit step response.

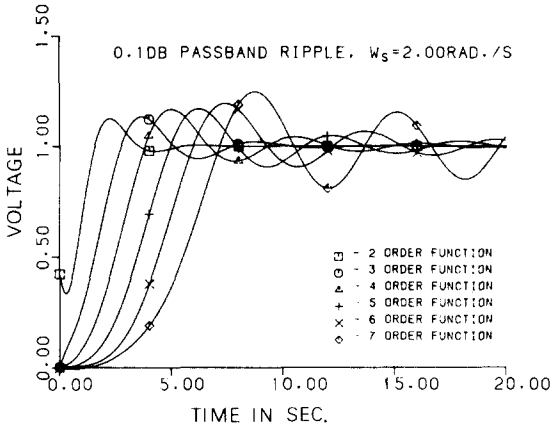


그림 6. 단위 階段 응답곡선  
Fig. 6. Unit step response.

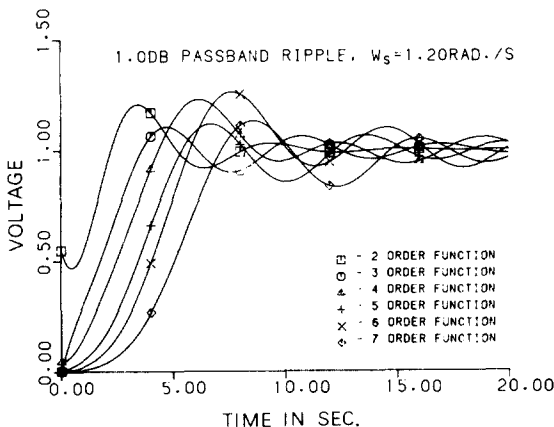


그림 7. 단위 階段 응답곡선  
Fig. 7. Unit step response.

$$a(t) = 1 - A_0 e^{-\alpha_0 t} + e^{-\alpha_1 t} [A_1 \cos(\beta_1 t + \theta_1)] + e^{-\alpha_2 t} [A_2 \cos(\beta_2 t + \theta_2)] \quad (n=5)$$

$$a(t) = 1 - A_0 e^{-\alpha_0 t} + e^{-\alpha_1 t} [A_1 \cos(\beta_1 t + \theta_1)] + e^{-\alpha_2 t} [A_2 \cos(\beta_2 t + \theta_2)] - e^{-\alpha_3 t} [A_3 \cos(\beta_3 t + \theta_3)] \quad (n=7)$$

이러한 단위 階段 應答特性曲線중 一部를 그림5, 6, 7, 8에 나타내었다.

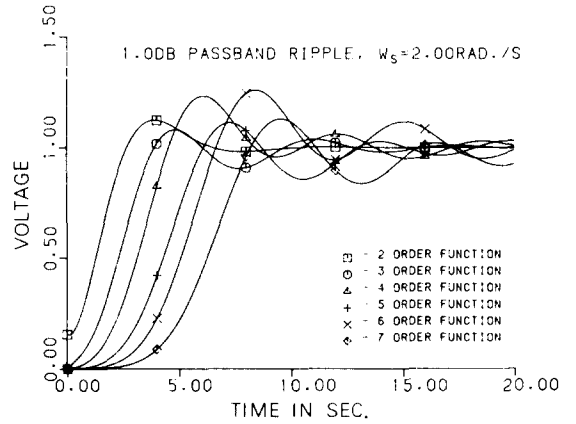


그림 8. 단위 階段 응답곡선  
Fig. 8. Unit step response.

V. 結 論

Elliptic 필터函數의 임펄스 應答特性은 n=偶數次 函數때는 임펄스 應答의 임펄스 크기가 存在하며 그 값이 1보다 작고 또한 n=奇數次 函數에 비하여 매우 작아 그 차이가 1.7(max) 정도되며 偶數次 函數의 임펄스 크기는 n, ωs, dB의 증가에 따라 감소한다.

n=奇數次 函數때의 임펄스 應答의 임펄스 크기는 n이 적을수록 매우 크며 n, ωs, dB의 증가에 따라 減小하여 零에 接近한다.

언더슈우트는 n이 偶數次 函數때가 奇數次 函數때보다 크며 通過領域 波狀이 增加할수록 커진다.

定着時間은 次數 n이 增加할수록 增加하고 언더슈우트는 次數 n가 增加할수록 減小하며 自然振動數는 次數 n이 增加함에 따라 減小한다.

Elliptic 필터函數의 階段 應答特性은 次數 n이 奇數次 函數일 때는 初期值(t=0때)가 원점에서 시작하고 n이 偶數次 函數일 때는 0과 1 범위안에서 시작하나 ωs, dB 次數의 增加에 따라 원점에 가까워진다.

오버슈우트는 次數 n가 奇數次 函數일때가 偶數次 函數일 때 보다 크며 通過領域 波狀이 增加할수록 커진다.

上昇時間은 次數 n이 增加할수록 增加하고 自然振動數는 次數 n이 增加할수록 적어지며 ωs가 增加할

수록 減小하며 定着時間은  $\omega_s$ ,  $n$ 의 增加에 따라 오버슈우트와 언더슈우트는 Chebyshev 필터函數 特性보다 많고 上昇時間은 작으며 自然振動數는 크다.

임펄스 應答特性에서 Butterworth 필터函數의 遲延時間은 elliptic 필터函數와 비슷하며 Chebyshev 필터函數는 elliptic 필터函數의 遲延時間보다 길고 定着時間은 Butterworth 필터函數가 elliptic 필터函數보다 빠르다. 次數  $n$ 이 클때 elliptic 필터函數의 언더슈우트는 Butterworth나 Chebyshev 필터函數와 비슷하나 次數  $n$ 이 적을수록 Butterworth가 더 작은 언더슈우트를 갖는다. 0.1dB 通過領域 波狀에서 elliptic 필터函數의 階段 應答特性은 Chebyshev 필터函數의 應答特性과 비슷하고 遲延時間과 定着時間도 비슷하나 次數  $n$ 이 적어질수록 오버슈우트가 커지며 전체적으로 볼때 Butterworth 필터函數가 階段應答에서 振動(ringing)이 적다. Bessel 필터函數는 階段 應答特性에서 오버슈우트나 振動이 전혀없다.

이런 점을 볼 때 Butterworth 필터와 數나 Chebyshev, Bessel 필터 등의 時間領域特性보다<sup>[2, 3, 6]</sup> 떨어지나 通過領域과 阻止領域에서의 特性이 월등히 우수하기 때문에 현재 使用되는 필터回路에 elliptic 필터가

重要한 位置를 점유하고 있다.

#### 參 考 文 獻

- [1] Chen Hong-Bin & Wang Ji-Qin, "A new time domain approach approximation to the ideal delay function," *Ttan. IEEE on CT.*, pp. 640-645, 1980.
- [2] A.I. Zverev, *Handbook of Filter Synthesis.* John Wiley & Sons Inc., pp. 402-407, 1967.
- [3] A.B. Williams, *Electronic Filter Design Handbook.* McGraw-Hill Book Co., pp. 2-28-2-73, 1981.
- [4] H.Y-F. Lam, *Analog and Digital Filters.* Prentice-Hall Inc., pp. 264-272, 1979.
- [5] L.P. Huelsman, P.E. Allen, *Introduction to the Theory of Active Filters.* New York McGraw-Hill Inc., pp. 40-59, 1980.
- [6] D.E. Johnson, *Introduction to Filter Theory.* Prentice-Hall Inc., pp. 115-129, 1976.