

Bourdon管을 이용한 전기식 압력변환기(壓力變換器)의 特性

김기중* · 백재규** · 한응교*

Characteristics of Electrical Type Pressure Transducer Which uses Bourdon Tube

Kijoong Kim · Jaekyu Baick · Eungkyo Han

Abstract

The Bourdon tube pressure gauge is the most widely used primary detector for pressure in various kinds of fields recently. However in many cases lots of difficulties are encountered in telemetering, measuring the continuously changing pressure and recording as time goes by, etc.

In this paper a Bourdon tube of flat-oval section is considered. On the basis of Wolf's theory, the very sensitive places are selected on the tube and full bridge arrangement is used. Then all of the characteristics are examined in order to use the pressure transducer practically into which the pressure gauge is converted.

From the results, the error in meter reading is about $\pm 3\%$ F. S., on the other hand, when measured with strain gauge, the error is within $\pm 1\%$ F. S.. Also external acceleration on Bourdon tube hardly affect practical use.

記號說明

D : flexural rigidity($(Eh^3)/12(1-\nu^2)$)
 E : modulus of elasticity(Young's modulus)
 F : strain gauge factor
 M_φ, M_θ : bending moments in tube per unit length of meridional section and a section perpendicular to meridian, respectively
 N_φ, N_θ : force in tube per unit length of meridional section and a section perpendicular to meridian, respectively
 R : radius of curvature of tube center line

V : volume of ring per unit length
 W : virtual work done by uniformly distributed pressure
 a : half width of flat-oval section
 b : half height of flat-oval section
 c : half width of flat part(a-b)
 e_i, e_o : input and output voltage in wheatstone bridge circuit
 h : wall thickness of tube
 n_o : width-to-height ratio of flat part
 p : uniformly distributed pressure
 r_i : radius of curvature of infinitesimal area
 s : arc length
 v : displacement in the y direction

*正會員, 한양대학교.

**한국공업협사 기술부 ·

- ϵ : strain measured experimentally
- $\epsilon_\varphi, \epsilon_\theta$: unit elongation of tube in meridional direction and in the direction of parallel circle, respectively
- θ : angle which defines the position of a meridian
- ν : poisson's ratio
- $\sigma_\theta, \sigma_\varphi$: stress of tube in meridional direction and in the direction of parallel circle, respectively
- φ : angle which defines the position of a parallel circle

1. 緒 論

여러 機械 또는 裝置의 驅動系나 制御系에 있어서 流體나 氣體로 動力을 얻거나 制御를 하는 境遇가 많이 있으며, 그 性能은 壓力 또는 壓力의 變化에 依存하게 된다. 이 時의 作動이 適切한가를 알아 보기 위하여 壓力計가 必要하게 되며 壓力計는 正確하고 작은 壓力의 變化도 測定해 낼 수 있는 것이 要望된다. 現在 여러 分野에서 壓力計로 가장 많이 使用하고 있는 것은 Bourdon管式壓力計이다. 이는 直動計器로서 遠隔計測, 빠른 壓力의 變化 및 미소한 壓力變化的 측정 등에는 不可能하다.

따라서 本 研究에서는 市販되고 있는 Bourdon管式壓力計에 많이 使用되고 있는 flat-oval形 斷面을 가진 Bourdon管을 受感體로 利用하여 가장 感度가 銳敏한 個所를 Wolf의 理論¹⁾에 依하여 決定하고 4계이지法으로 回路를 構成, 이를 壓力變換器로 使用하는데 있어서의 特性²⁾을 調査研究하였다.

2. 變換原理

2-1 Bourdon管의 應力解析

Wolf는 flat-oval 단면에 對한 그의 理論을 다음과 같이 展開시켰다.

M_θ, N_φ 는 M_φ 와 N_θ 에 比하여 無視할 수 있다고 假定했을 때 單位길이 的 ring에 蓄積되는 變形에너지 U 는

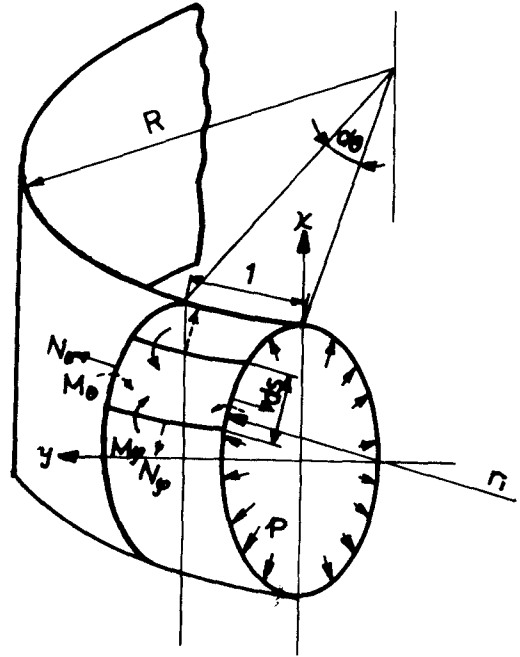


Fig. 1. Forces and bending moments in the ring per unit length

$$U = \frac{1}{2D} \oint M_\theta^2 dS + \frac{1}{2hE} \oint N_\varphi^2 dS \quad (1)$$

이 되며, 여기서 $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ 이다.

또, 內壓 P 가 單位길이 的 ring의 容積을 dV 만큼 變形시킨다면 壓力 p 가 한 假想일 W 는 다음과 같다.

$$W = pdV \quad (2)$$

橫斷面內의 各 點이 y 軸方向으로 V 만큼 變化한다면 曲率 $1/r_1$ 은 $\Delta(1/r_1)$ 만큼 變化하고, 管壁은 伸縮하지 않는다고 假定하면 V 와 $\Delta(1/r_1)$ 사이에는 다음과 같은 관계가 있다.

$$\Delta\left(\frac{1}{r_1}\right) = \frac{d}{dS} \left(\frac{1}{x'} \cdot \frac{dV}{dS} \right) \quad (3)$$

여기서 '는 S 에 關하여 미분한 것을 뜻한다. 이때 θ 方向의 曲率變化를 無視하면 굽힘 moment와 曲率變化와의 관계는

$$\frac{M_\varphi}{D} = \Delta\left(\frac{1}{r_1}\right)$$

이 되며, 또 橫斷面積의 變化 即, 單位 길이當의 容積變化는

$$dV = \oint V \left\{ x' + \frac{d}{dS} \left(\frac{yy'}{x'} \right) \right\} dS \quad (4)$$

가 된다. 橫斷面이 變形되면 曲率半徑 R 은 ΔR

만큼 變化하여 ϵ_θ 는 다음과 같이 표시된다.

$$\epsilon_\theta = \frac{V}{R} - \frac{y}{R} \cdot \frac{\Delta R}{R} \quad (5)$$

그리고

$$N_\theta = Eh\epsilon_\theta$$

가 되므로 式(2), (3), (4)를 式(1), (2)에 代入하면 potential energy는

$$U - W = \frac{D}{2} \oint \left\{ \frac{d}{dS} \left(\frac{1}{x'} \right) \frac{dV}{dS} \right\}^2 dS + \frac{Eh}{2R^2} \oint \left\{ V - y \frac{\Delta R}{R} \right\}^2 dS - p \oint V \left\{ x' + \frac{d}{dS} \left(\frac{yy'}{x'} \right) \right\} dS \quad \dots(6)$$

의 되며 最小일의 原理에 따르면 安定된 平衡상태에서 potential energy가 最小가 된다.

未定定數를 包含하는 變位 V 는 S 의 함수로 가정하고 $(U - W)$ 가 最小가 되도록 未定定數를 決定하면 V 를 決定할 수 있다. Wolf는 flat-oval 단면의 Bourdon管을 對象으로 變位 V 가 같은 단면을 갖는 眞直管의 變位에 比例한다고 가정하여 $(U - W)$ 를 最小가 되도록 未定定數 即, 比例定數 및 $\Delta R/R$ 을 決定하였다.

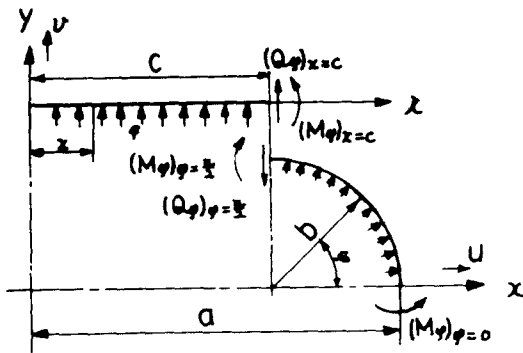


Fig. 2. Shearing forces and bending moments at flat-oval cross-section

flat-oval 단면을 갖는 眞直管의 內壓에 의한 變形을 求하기 위하여 直線부와 半圓부로 나누면 直線部는 一定한 分布荷重 및 양단에 굽힘moment를 받는 길이 $2C$ 의 보가 된다.

이때 $\frac{V}{C}$ 를

$$\frac{V}{C} = \alpha_0' + \frac{\beta_0'}{2} \cdot \frac{x^2}{C^2} + \frac{r_0'}{12} \cdot \frac{x^4}{C^4} \quad (7)$$

라 한다.

半圓部는 圓弧모양의 굽러진 보라 생각하면 굽힘moment는

$$\frac{M_\varphi}{D} = \frac{C}{b^2} (A_0' + B_0 \cos \varphi), \quad dS = -bd\varphi \quad (8)$$

이 되고 式(8)을 式(3)에 넣고 積分하면

$$\frac{V}{C} = A_0' (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) + \frac{B_0}{2} (\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi) \quad (9)$$

이 된다.

이 때 直線部와 半圓部와의 接合點에서 변위, 各변위, 굽힘moment, 전단력 등이 연속되어야 하는 조건으로부터 계수들을 구한다.

式(7)과 式(9)를 式(6)에 代입하면 potential energy는

$$U - W = a_{11} B_0^2 + a_{12} B_0 \frac{\Delta R}{R} + a_{22} \left(\frac{\Delta R}{R} \right)^2 + a_{33} B_0 \quad (10)$$

가 되며 앞서의 계수들과 式(10)의 계수, B_0 , $\frac{\Delta R}{R}$ 에 대한 計算式은 부록에 나와 있다.

式(7)과 式(8)로부터

$$\text{半圓部 } \frac{M_\varphi}{D} = B_0 \frac{C}{b^2} (A_0 + \cos \varphi) \quad (11)$$

$$\text{直線部 } \frac{M_x}{D} = \frac{B_0}{C} (\beta_0 + r_0 \frac{x^2}{C^2}) \quad (12)$$

이 된다.

이 때 式(5)로부터

$$\sigma_\theta = E\epsilon_\theta = \frac{E}{R} (V - y \frac{\Delta R}{R})$$

이 되므로 式(7) 및 式(9)를 代입하면

$$\text{直線部 } \frac{\sigma_\theta}{E} = \pm \frac{b}{R} \left[B_0 n_0 \left(\alpha_0 + \frac{\beta_0}{2} \cdot \frac{x^2}{C^2} + \frac{r_0}{12} \cdot \frac{x^4}{C^4} \right) - \frac{\Delta R}{R} \right] \quad (13)$$

$$\text{半圓部 } \frac{\sigma_\theta}{E} = \pm \frac{b}{R} \left[B_0 n_0 \left\{ A_0 (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) + \frac{1}{2} (\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi) - \frac{\Delta R}{R} \sin \varphi \right\} \right] \quad (14)$$

여기서 + : 외측벽, - : 내측벽

$R = \infty$ 라 하면

$$\frac{\sigma_\theta}{P} = \frac{b}{h} \frac{n_0 + \pi/4}{n_0 + \pi/2} \quad (15)$$

이 되므로 굽러진 관에서는 式(13)과 式(15)의 합 또는 式(14)와 式(15)의 합과 같은 應力이 發生한다. 이를 近似的으로 眞直管에서 發生되는 것과 같다고 가정하면³⁾

$$\frac{(\sigma_\varphi)_{\varphi=0}}{P} = \frac{a}{h} \pm \frac{\sigma(M_\varphi)_{\varphi=0}}{Pa^2} \cdot \frac{a^2}{h^2} \quad (16)$$

$$\frac{(\sigma_\varphi)_{x=0}}{P} = \frac{a}{h} \cdot \frac{b}{a} \pm \frac{\sigma(M_\varphi)_{x=0}}{Pa^2} \cdot \frac{a^2}{h^2}$$

(+ ; 내면)
(- ; 외면)

이 때 strain ε_φ 는

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{E}(\sigma_\varphi - \nu\sigma_r) \quad (18)$$

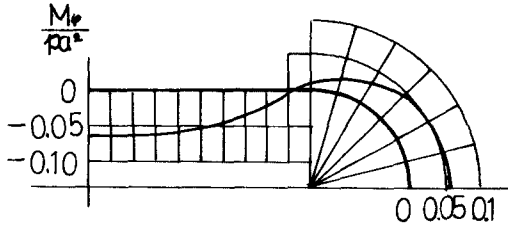


Fig. 3. Rate M_p/Pa^2 , plotted theoretically

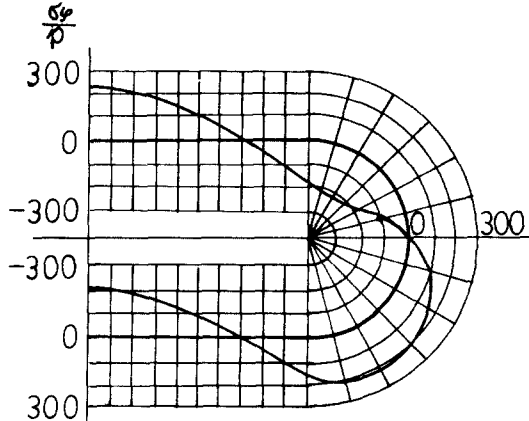


Fig. 4. Rate σ_φ/P , plotted theoretically

이 되며, 이 때 σ_φ/P 와 M_p/Pa^2 의 위치에 따른 분포가 그림 3과 그림 4에 나타나 있다.

2-2. Wheatstone bridge의 구성과 출력

그림 5(a)와 같이 $x=0, y=0$ (即, $\varphi=0$)인 위치에 strain gauge를 부착하여 그림 5(b)와 같이 wheatstone bridge를 구성하였다. 이 때 G_a 에서 발생하는 strain을 ε_a , G_b 에서 ε_b , G_c 에서 ε_c , G_d 에서 ε_d 등으로 표시하면 총 strain은

$$\varepsilon = \varepsilon_a - \varepsilon_b + \varepsilon_c - \varepsilon_d$$

이 되며, 출력은⁶⁾

$$\begin{aligned} e_o &= -\frac{e_i}{4} F \cdot \varepsilon = -\frac{e_i}{4} F (\varepsilon_a - \varepsilon_b + \varepsilon_c - \varepsilon_d) \\ &= -\frac{e_i}{2} F \cdot \frac{1}{E} \left[\frac{(b-a)b}{b} + \frac{6}{h^2} \{ (M_\varphi)_{\varphi=0} - (M_\varphi)_{x=0} \} \right] \end{aligned} \quad (19)$$

이 된다.

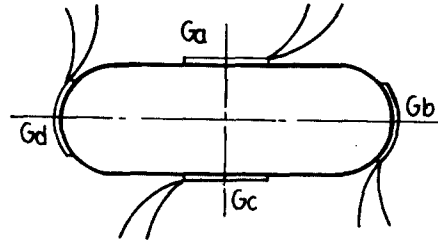
2-3 受感部の Strain 算出

(1) 受感部(범위; 5kg/cm^2)

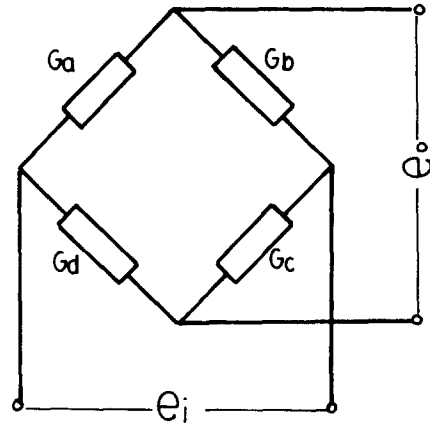
Bourdon管의 재료: 黄銅

$E=0.98 \times 10^8 \text{kg/cm}^2$

$\nu=0.35$



(a)



(b)

Fig. 5. (a) Four-gauge arrangement for measuring strain

(b) Wheatstone bridge circuit

Bourdon管의 치수는 Table 1에 나타나 있다.

(2) strain의 계산치: 3372.8×10^{-6}

(3) 使用한 strain gauge: KFC-5-cl-11

[KYOWA] $120 \pm 0.3\Omega$

(4) 接續法: 그림 5(b)와 같은 4 gauge法으로 bridge 구성

Table 1. Dimension of tube

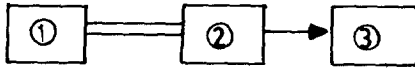
a	5.3 mm
b	1.65 mm
c	3.65 mm
h	0.2 mm
R	27.0 mm

3. 實驗方法 및 裝置

3-1. 靜的 特性試驗

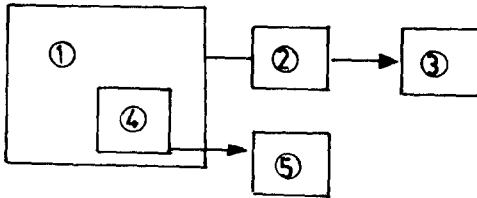
(1) 直線性

壓力變換器를 static strain indicator에 연결하고 compressor로 壓力을 주며 범위 5kg/cm^2 인 壓力計의 使用最大壓力인 3.5kg/cm^2 까지 0.5kg/cm^2 增加時 마다의 strain을 측정하여 그 直線性을 檢討하였다. 그림 6은 그 block선도이며 그림 8은 그 裝置이다.



- ① : Compressor
- ② : Pressure transducer
- ③ : Static strain indicator

Fig. 6. Block diagram of experimental apparatus for measuring linearity



- ① : Electric heater
- ② : Thermometer
- ③ : Recorder
- ④ : Pressure transducer
- ⑤ : Static strain indicator

Fig. 7. Block diagram of experimental apparatus for measuring the zero drift

(2) 溫度特性(零點移動)

壓力變換器의 溫度에 따르는 零點移動量을 알아보기 위하여 electric heater로 溫度를 20°C 에서 100°C 까지 變化시키며 10°C 增加할 때마다 static strain indicator로 零點의 移動을 測定하였다. 그림 7은 그 block 線圖이며 그림 9는 그 裝置이다.

3-2. 動的 特性試驗

(1) 應答性

變換器에 急激한 壓力變化를 주며 그 應答을 oscilloscope로 관찰하였다. 그리하여 變化가 크고 急한 壓力測定에 있어서의 應答性을 알아 보

았다. 그림 10은 實驗裝置의 block 線圖이며 그림 13은 그 장치의 寫眞이다.

(2) 固有振動數

彈性系에 自由振動을 주어 그 振動數로부터 固有振動數를 決定하는 方法을 利用하여 Bourdon

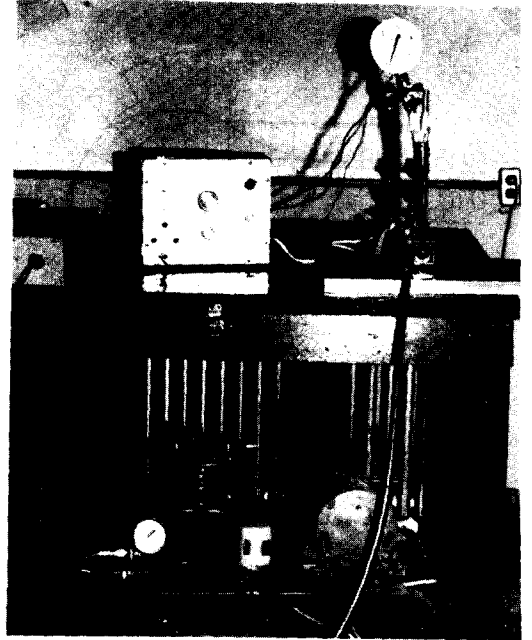


Fig. 8. Experimental apparatus for measuring linearity



Fig. 9. Experimental apparatus for measuring the zero drift.

- ① : Compressor
- ② : Pressure transducer
- ③ : Dynamic amplifier
- ④ : Oscilloscope

Fig. 10. Block diagram of experimental apparatus for measuring response

管에 自由振動을 주며 oscilloscope로 그 固有振動數를 測定하였다. 그림 11은 그 block 線圖이며 장치는 그림 13과 같다.

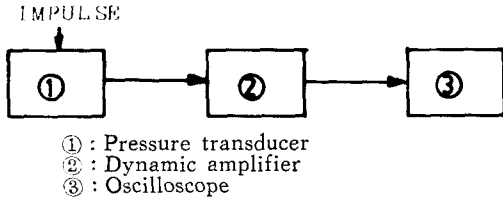


Fig. 11. Block diagram of experimental apparatus for measuring natural frequency

(3) 外部 振動加速度에 依한 影響

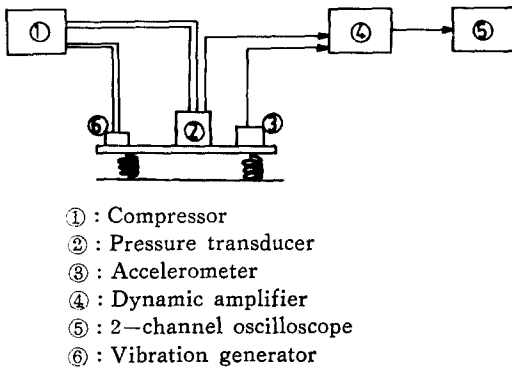


Fig. 12. Block diagram of experimental apparatus for measuring the effect of external acceleration on Bourdon tube characteristics

振動板에 變換器와 加速度計를 附着하고 compressor를 이용한 vibration generator로 振動加速度를 주면서 oscilloscope로 加速度를 測定하며 外部로부터 變換器에 振動加速度가 미치는 影響을 관찰하였다. 그림 12는 그 block線圖이다.

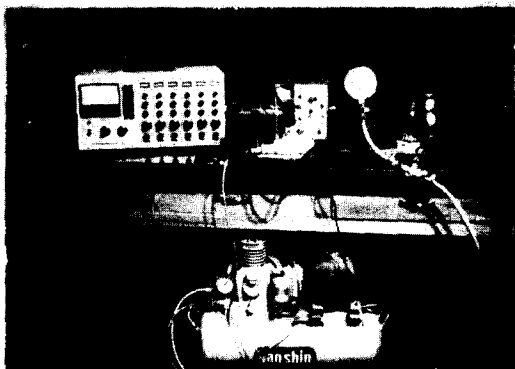


Fig. 13. Experimental apparatus for measuring response

4. 實驗結果 및 考察

4-1. 靜的特性 試驗

(1) 直線性

0~3.5kg/cm²까지 0.5 kg/cm²씩 증가시키며 그 때의 strain을 測定한 것이 Table 2와 그림 14에 나타나 있다. 이 때 非直線性은 ±1% F.S. 정도로서 良好하였으며 3.5kg/cm²의 strain 값을 10回 測定하여 求한 표준편차는 5.7×10⁻⁶가 되었다. 3.5kg/cm²에서의 strain 理論値는 다음과 같다. 式(13)~(17)를 計算하여 式(18)에 代入하면

$$\begin{aligned} (\varepsilon_{\varphi})_{\varphi=0} &= -884.5 \times 10^{-6} \\ (\varepsilon_{\varphi})_{x=0 \text{ 外}} &= 518.8 \times 10^{-6} \\ (\varepsilon_{\varphi})_{x=0 \text{ 内}} &= 1085 \times 10^{-6} \end{aligned}$$

이 되며, 총 strain은

$$\begin{aligned} \varepsilon &= -2(\varepsilon_{\varphi})_{\varphi=0} + (\varepsilon_{\varphi})_{x=0 \text{ 外}} + (\varepsilon_{\varphi})_{x=0 \text{ 内}} \\ &= 3372.8 \times 10^{-6} \end{aligned}$$

(2) 溫度特性(영점이동)

20°C에서 100°C까지 온도를 10°C씩 증가시키며 영점의 移動量을 測定한 것이 Table 3과 그림 15에 나타나 있다. 낮은 溫度에서는 溫度變化에 따르는 影響이 별로 크지 않았으나 溫度가 上昇함에 따라 영점이동이 심하였다. 이는 적당히 온도보상을 하면 고온에서도 큰 오차없이 測定이 가능하리라고 생각된다.

Table 2. Obtained data

Pressure (kg/cm ²)	UP		DOWN	
	Strain (×10 ⁻⁶)	Diff. of Strain	Strain (×10 ⁻⁶)	Diff. of Strain
0	0	485	6	477
0.5	485	490	483	485
1.0	975	488	968	486
1.5	1463	480	1454	483
2.0	1943	478	1937	478
2.5	2420	479	2415	481
3.0	2899	484	2896	487
3.5	3383		3383	

Table 3. Obtained data

Temp(°C)	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Zero drift (×10 ⁻⁶)	0	12	22	43	65	69	14	-48	-13

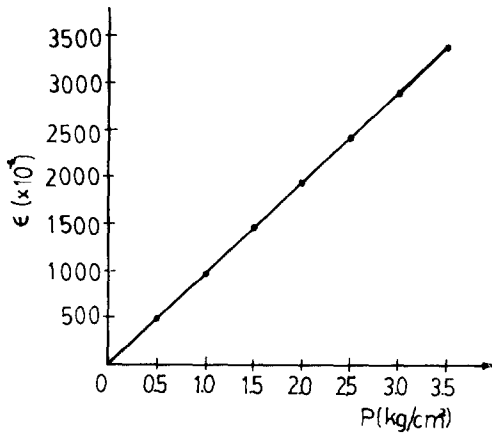


Fig. 14. Relationship between strain and pressure

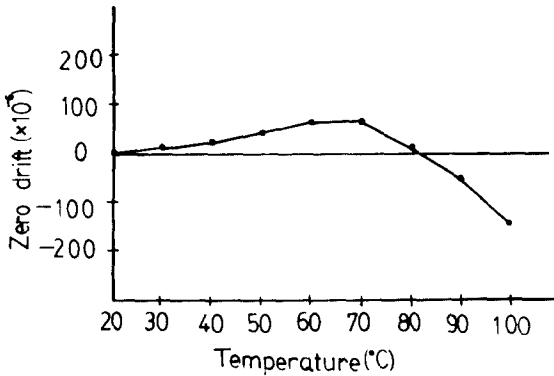


Fig. 15. Relationship between zero drift and temperature

4-2. 動的 特性試驗

(1) 應答性

Bourdon管에 壓力을 주었다가 밸브를 急激히

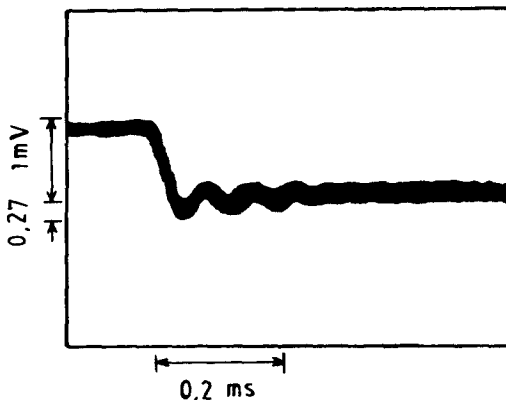


Fig. 16. Measured Response

開閉했을 때의 應答을 調査하였다. 이때 영향이 더 크게 나타나는 밸브 개방시의 최대초과량과 정정시간을 알아 보았다. 그 應答을 oscilloscope로 관찰한 결과는 그림 13에 나타나 있으며 이때의 최대초과량은 약 27%, 整定時間은 0.2秒가 되었다. 그러므로 急激한 변화를 하는 壓力 측정에서는 이와 같은 應答성을 고려해야 한다.

(2) 固有振動數

自由振動을 주어 그 波形을 oscilloscope로 잡아 고유진동수를 측정한 결과는 $f_n=225\text{Hz}$ 가 되었으며 外部의 振動이 이에 가깝게 되면 使用이 不可能하게 된다.

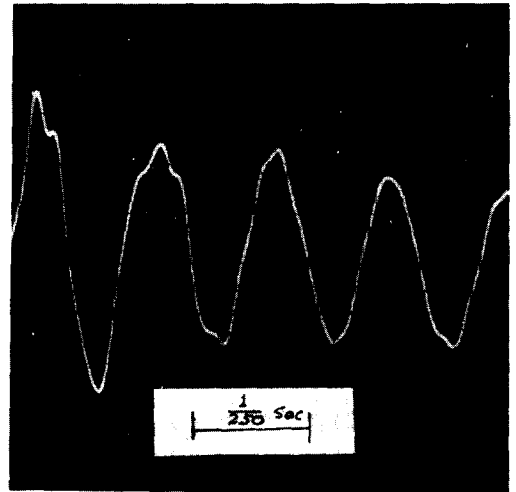


Fig. 17. Measured natural frequency

(3) 外部 振動 加速度에 의한 영향

壓力變換器를 振動 加速度를 받는 부분에 直接 附着하였을 때 그 부분에 加해지는 外部로부터의 振動加速度는 測定에 相當한 影響을 미친

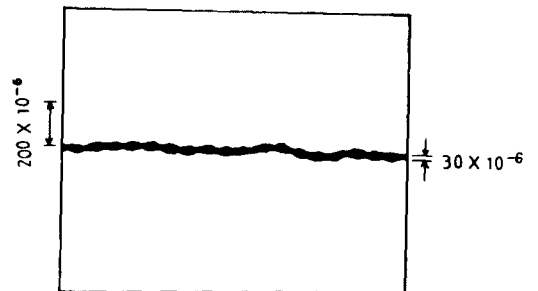


Fig. 18. Effect of external acceleration on bourdon tube characteristics

다. 實驗 結果 約3g(g: 重力加速度)정도의 振動加速度에 대하여 約 $\pm 30 \times 10^{-6}$ 정도의 strain 값의 變化를 가져 왔으며 이는 $\pm 1.0\%$ F. S. 以內的 영향이므로 比較的 큰 振動加速度인 3g 정도까지도 커다란 誤差없이 測定할 수 있음을 알았다. 그림 18은 압력 3.5kg/cm²가 加해졌을 때 外部로부터 約 3g의 振動加速度을 주었을 때 미치는 영향을 oscilloscope로 관찰한 것이다.

5. 考 察

理論式 實測한 h 및 壓力의 數値를 代入 計算한 結果와 strain gauge에 依한 變換電壓과의 比較에서는 理論式에의 數値代入算出에 두께 h²과 關係되어 細心한 두께 測定을 거듭하였다. strain gauge로서 wheatstone bridge에 따른 出力과 上記의 理論的 計算値 사이에는 生覺보다 작은 不確實度를 가졌다. 理論上의 數値計算에 의한 不確實도와 strain gauge 素子에 의한 結果의 不確實도는 此後 計算할까 한다.

6. 結 論

(1) Bourdon管式 壓力計의 指針으로 測定할 때에 있어서 誤差는 $\pm 3\%$ F. S. 정도인데 비하여 strain gauge式으로 變換하였을 때의 誤差는 $\pm 1\%$ F. S. 로서 精密한 測定이 可能하였다.

(2) 外部 振動加速度에 의한 영향은 실제使用하는데 있어서 큰 支障이 없었다.

(3) Bourdon管式 壓力變換器는 從來의 게이 지壓을 測定하는 直動計器 自體를 損傷시키지 않고도 그대로 쓸 수 있으며 strain gauge를 손쉽게 附着시켜 使用할 수 있어서 低廉하고 取扱이 簡便하다. 그러나 高溫의 流體壓力測定과 外部로부터 충격이 가해지는 경우에는 온도보상과 응답에 대한 보상 등의 여러 문제점을 가지

고 있어 앞으로 이에 대한 研究가 계속 必要하다고 생각된다.

參 考 文 獻

1. Alfred Wolf, "An Elementary Theory of Bourdon Gauge" Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME. Vol. 68(1946), pp. A-207~A-210.
2. F.B. Jennings, "Theories on Bourdon Tubes." ASME 78-1(1956), pp.55~64.
3. 中原一郎, "ブルドン管의 理論と設計", 機械の研究 第14卷 6號, 7號, 8號, 9號, 10號(1962), pp.797~801, 931~936, 1043~1048, 1149~1155, 1281~1285.
4. R.C. Clark, T.I. Gilroy and E.Reissner, "Stresses and Deformations of Toroidal Shells of Elliptical Cross Section", Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME. Vol. 74 (1952) pp.37~48.
5. Timoshenko, "Theory of plates and Shells", Mc Graw-Hill (1959), pp.429~532.
6. 韓應教, "스트레인 게이지—理論과 應用—", 普成文化社(1976), pp.140.
7. 中原安部, 近似丹斷面をもつブルドン管의 變位及トルク, 日本機械學會講演前刷集 No.3 91961. 4.
8. Die Biegung Krummer Rohre von H. Lorenz. Physik Zeitschrift 13 (1912) pp. 768~774.
9. Der Einfluss der Querschnittsform auf das Verhalten von Bourdon feldern von W. Wuest. Ing. Arch. 20-2 (1952). pp.116~125.
10. T.G. Beckwith, N.L. Buck, R.D. Marangoni, "Mechanical Measurements", Addison-Wesley (1982).
11. Doebelin, "Measurement Systems", Mc Graw-Hill (1966).

附 錄

直線部에 있어서 $x=c$ 인 점에서는

$$\begin{aligned} (v)_{x=c} &= (a_o' + \frac{\beta_o'}{2} + \frac{\gamma_o'}{12})c \\ \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=c} &= \beta_o' + \frac{\gamma_o'}{3} \\ \left(\frac{M_\varphi}{D}\right)_{x=c} &= \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_{x=c} = \frac{1}{c}(\beta_o' + \gamma_o') \\ \left(\frac{Q_\varphi}{D}\right)_{x=c} &= \left(\frac{d^3v}{dx^3}\right)_{x=c} = 2\frac{\gamma_o'}{c^2} \end{aligned}$$

이 되며 半丹部에 있어서 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 인 점에서는

$$\begin{aligned} (v)_{\varphi=\frac{\pi}{2}} &= (A_o' + \frac{\pi}{4}B_o)c \\ \Delta\varphi &= -\frac{b}{D} \int_0^{\pi/2} M_\varphi d\varphi = -\frac{c}{b} \int_0^{\pi/2} (A_o' - B_o) \\ \left(\frac{M_\varphi}{D}\right)_{\varphi=\frac{\pi}{2}} &= \frac{c}{b^2}A_o' \\ \left(\frac{Q_\varphi}{D}\right)_{\varphi=\frac{\pi}{2}} &= \frac{1}{D} \left(\frac{dM_\varphi}{ds}\right)_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \frac{c}{b^3}B_o \end{aligned}$$

이 된다.

$\alpha_o', \beta_o', \gamma_o', A_o'$ 및 式(10)의 係數들과 $B_o, \frac{\Delta R}{R}$ 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \alpha_o &= \frac{\alpha_o'}{B_o} = \frac{2}{2n_o + \pi} \left[\frac{n_o^4}{24} + \frac{5\pi}{48}n_o^3 + \frac{5}{6}n_o^2 + \frac{\pi}{4}n_o + \frac{\pi^2}{8} - 1 \right] \\ \beta_o &= \frac{\beta_o'}{B_o} = -\frac{n_o^2}{2n_o + \pi} \left[\frac{n_o^2}{3} + \frac{\pi}{2}n_o + 2 \right] \\ \gamma &= \frac{\gamma_o'}{B_o} = \frac{n_o^3}{2} \\ A_o &= \frac{A_o'}{B_o} = \frac{2}{3} \frac{n_o^2 - 3}{2n_o + \pi}, \quad n_o = \frac{c}{b} \\ a_{11} &= \frac{2Eh}{R^2} bc^2 \left[\frac{1}{12(1-\nu^2)} \frac{R^2 h^2}{b^4} A_{11} + A_{11}' \right] \\ a_{12} &= -\frac{4Ehc^3}{R^2} A_{12} \end{aligned}$$

$$a_{22} = \frac{2Eh}{R^2} \frac{c^4}{b} A_{22}$$

$$a_{33} = -4\mu c^2 A_{33}$$

여기서

$$\begin{aligned} A_{11} = A_{33} &= \alpha_o + \frac{\beta_o}{6} + \frac{\gamma_o}{60} \\ &= \frac{2}{2n_o + \pi} \left(\frac{n_o^4}{45} + \frac{\pi}{15}n_o^3 + \frac{2}{3}n_o^2 + \frac{\pi}{4}n_o + \frac{\pi^2}{8} - 1 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{11}' &= \frac{\pi}{8} \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right) A_o^2 + \left(\frac{26}{9} - \frac{\pi^2}{4} \right) A_o \\ &\quad + \frac{\pi}{32} \left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{3}{2} \right) + n_o \left\{ \alpha_o^2 + \frac{\beta_o^2}{20} + \frac{\gamma_o^2}{1296} + \frac{\alpha_o\beta_o}{3} + \frac{\alpha_o\gamma_o}{30} + \frac{\beta_o\gamma_o}{84} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{12} &= \frac{2}{n_o^2(2n_o + \pi)} \left\{ \frac{n_o^5}{45} + \frac{\pi}{15}n_o^4 + \frac{2}{3}n_o^3 + \frac{7\pi}{24}n_o^2 + \left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{2}{3} \right) n_o + \frac{\pi}{24} \right\} \end{aligned}$$

$$A_{22} = \frac{1}{n_o^4} \left(n_o + \frac{\pi}{4} \right)$$

이 된다. 式(10)을 B_o 및 $(\Delta R/R)$ 에 對하여 偏微分하여 0으로 놓으면

$$\begin{cases} 2a_{11} B_o + a_{12} \frac{\Delta R}{R} + a_{33} = 0 \\ a_{12} B_o + 2a_{22} \frac{\Delta R}{R} = 0 \end{cases}$$

이 되고 이 方程式을 풀어 B_o 와 $(\Delta R/R)$ 을 求하면 다음과 같다.

$$B_o = -\frac{2a_{33}a_{22}}{4a_{11}a_{22} - a_{12}^2}$$

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{a_{12}a_{33}}{4a_{11}a_{22} - a_{12}^2}$$