

## 영상처리를 위한 순차 컨버루션 기법

李 商 郁

서울대학교 工科大学 制御計測工學科 助教授

### I. 서 론

영상처리(image processing)에 대한 일반의 관심도가 높아지고 있다. 영상처리는 컴퓨터가 널리 공학에 사용됨에 따라 발달된 학문으로서 매우 광범위한 응용 분야를 가지고 있다. 예를 들면 의공학, 군사목적, 공장 및 사무실 자동화, 우주탐사, 원격탐사 또는 tele-conferencing 등 이루 헤아릴 수 없다. 영상처리는 일반적으로 영상코우딩 및 전송, restorator/unhancement, 영상 이해 및 인식(image analysis and mnderstanding), 그리고 영상처리 시스템등 4 가지 분야로 나눌 수 있다<sup>[1]</sup>. 그러나 robot vision 및 공장 및 사무실 자동화 등을 위하여 최근에는 영상 이해 및 인식 분야에 연구가 활발한게 현 추세이다.

지금까지 많은 영상처리 기법이 소개되어 있으나, 대부분의 영상처리 기법은 FIR 필터에 의한 디지털 필터링을 필요로 하고 있다. Blur 나 잡음의 영향을 줄이기 위한 restoration/enhancement나 edge 등 영상 이해 및 인식에 필요한 영상 feature를 얻는데 디지털 필터링이 기본 처리기법이다. 2-D 필터링은 2-D 컨버루션(convolution)을 설치(implementation)하는 것을 의미한다. 설치된 소프트웨어, 즉 컴퓨터 프로그램이나, 하드웨어에 의해 신호처리 알고리즘을 푸는 것을 의미한다. 지금까지 영상처리에서는 2-D 컨버루션을 대형 또는 중형 컴퓨터에 의한 프로그램에 의해 설치되어 왔으나 항상 계산시간이 많이 걸리는게 문제였다. 영상은 기본적으로 2-D 신호이며 또한 고해상을 위하여 크기가 큰, 예를 들면 1024×1024, 영상이 보편화되어 있어 2-D 컨버루션은 엄청난 계산량을 요구하고 있기 때문이다. 그러나 최근 VLSI 및 고속 디지털 소자가 값싸게 공급되어 하드웨어에 의한 2-D 컨버루션을 경제적으로 설치 가능하게 되었다.<sup>[2]</sup> 물론 플로우팅-포인트 어레이 프로세서를 사용할 수

있으나 대단히 비싼 것이 단점이다. 하드웨어에 의한 2-D 컨버루션 설치는 또한 실시간(real-time) 동작이 가능하다는 데 있다. 그러므로 최소의 하드웨어로써 실시간 2-D 컨버루션이 가능한 알고리즘이 개발이 필요하게 되었다. 그러므로 본 글에서는 이런 목적으로 개발된 순차(sequential) 컨버루션 기법에 대해 고찰하려고 한다. 참고로 이 순차 컨버루션 기법은 미국 Compression Lab.에서 개발한 영상처리 시스템에 채택되어 사용중에 있다.

### 2. 일반적인 2-D 컨버루션 기법

만일  $F(j, k)$ 를  $N \times N$  입력영상,  $H(j, k)$ 를  $L \times L$  FIR 필터라고 하면, 출력영상  $G(j, k)$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$G(j, k) = F(j, k) \otimes H(j, k) \quad (1)$$

$$= \sum_m \sum_n F(m, n) H(j_r m+1, k-n+1)$$

이때 출력영상 크기는  $(N+L-1) \times (N+L-1)$  이며 심볼 " $\otimes$ "는 2-D 컨버루션을 의미한다.

만일 2-D 컨버루션을 식(1)처럼 직접 설치(direct implementation)하면 필요한 곱하기 수는  $N^2 L^2$  이다. 그러므로  $N$ 이나  $L$ 값이 크면 막대한 계산량이 필요하다. 그러나 식(1)은 spatial 영역이 아닌 Fourier 영역에서 계산할 수 있다. 즉 식(1)을 2-D DFT(discrete Fourier transform)하면

$$G(u, v) = F(u, v) H(u, v) \quad (2)$$

가 된다. 여기서  $G(u, v)$ ,  $F(u, v)$ ,  $H(u, v)$ 는  $G(j, k)$ ,  $F(j, k)$ ,  $H(j, k)$ 의 각각 DFT이다. 그러므로 복잡한 컨버루션 계산이 Fourier 영역에서는 단지 스칼라 곱하기가 된다. 원하는 출력  $G(j, k)$ 는  $G(u, v)$ 를 역DFT 하여 얻는다. 이와 같이 컨버루션은 DFT를 이용하여

반직접적으로 계산할 수 있는 데, DFT 계산은 FFT를 사용하므로 결국 많은 계산량을 절감할 수 있다.<sup>[3]</sup> FFT를 이용하면 2-D 컨버루션에서 ( $N^2 + 4N^2 \log_2 N$ )의 곱하기가 필요하다. 그러므로 필터의 크기가  $10 \times 10$  이상이면 FFT 기법이 직접 설치 방법보다 효율적이다. 아울러 FFT 기법의 효율성은 영상에서 오우버랩-애드나 오우버랩-세이프 방법으로 더욱 증가시킬 수 있다.<sup>[4]</sup> 그러나 아직까지도 FFT 설치를 위한 하드웨어는 복잡하고 비싸다. 특히 저렴한 가격으로 영상처리 시스템을 개발할 때는 FFT 기법은 적당하지 못한 실정이다.

III. 순차 컨버루션 기법

순차 컨버루션은  $L \times L$  필터를 여러 개의 크기가 작은 필터로 분해(decompose)하여, 크기가 작은 필터로 여러번 반복 컨버루션하는 필터링 기법이다. 크기가 작은 필터를 SGK(Small Generating Kernel) 필터라고 부르며, 보통 사용하는 크기는  $3 \times 3$  또는  $3 \times 1$ 이다.

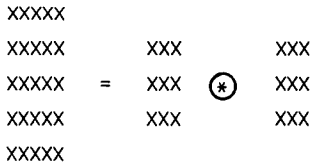


그림 1. 2개의  $3 \times 3$  SGK 필터 컨버루션

그림 1에 보인 것과 같이  $3 \times 3$  SGK 필터를 다른  $3 \times 3$  SGK 필터와 컨벌브하면  $5 \times 5$  필터가 된다. 이와같이 순차적으로  $3 \times 3$  SGK 필터로 컨벌브시켜 나가 원하는 출력 영상을 얻는다. 더 부연하면  $(2P+1) \times (2P+1)$  SGK 필터를 Q번 컨벌브하면,  $(2PQ+1) \times (2PQ+1)$  필터로 컨벌브시킨 결과와 같을 것이다. 이런 순차 컨버루션 기법은 하드웨어에 의한 설치시 유리한 점이 많다. 일반적으로 하드웨어의 가격과 복잡성은 필터의 크기에 비례한다.

그러나  $3 \times 3$  SGK 필터를 이용한 순차 컨버루션 기법은  $3 \times 3$  SGK 필터 하드웨어만 필요하다(그림 2 참조). 왜냐하면 매번 컨벌브할 때마다 필터의 계수만 바뀌면 되기 때문이다. 그러나 문제는 어떻게  $L \times L$  필터를 Q개의  $3 \times 3$  SGK 필터로 분해 하느냐에 있다.

1-D에서는 이 문제는 간단하다.  $H(z)$ 를 1-D FIR 필터의 Z-변환이라 하면  $H(z)$ 는 다음과 같다.

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) z^{-k} \quad (3)$$

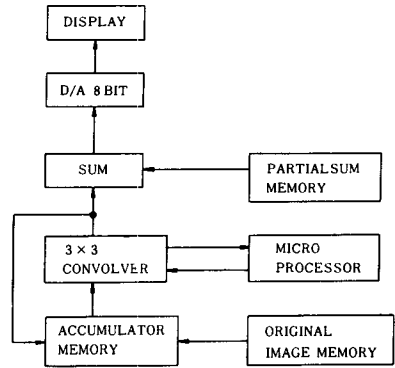


그림 2. SGK 필터를 이용한 영상처리 시스템 구성도

그러나  $H(z)$ 는 식(4)와 같이 Q개의 2차 FIK 필터로 분해할 수 있다.

$$H(z) = \prod_{i=1}^Q H_i(z) \quad (4)$$

여기서

$$H_i(z) = a_{i-1}' z^{-1} + a_i + a_{i2} z$$

식(4)와 같이 1-D FIR 필터를 설치하는 것을 cascade 설치라고 한다.<sup>[6]</sup> Cascade 설치는 고정숫자점 연산시 round-off error에 대한 민감도가 직접 또는 병렬형 설치보다 낮다는 잇점이 있다. 그러나 2-D에서는 이론적으로  $L \times L$  필터를  $3 \times 3$  SGK 필터로 분해하는 것은 특수한 경우를 제외하고는 불가능하다.<sup>[5]</sup> 2-D 전달 함수  $H(z_1, z_2)$ 는 변수가 2개인 다항식인데, 이런 다항식은 무한개의 근을 가지고 있기 때문이다. 그러므로 2-D에서는 어떻게 하면  $H(z_1, z_2)$ 를  $3 \times 3$  SGK 필터로 분해 하느냐가 중요한 문제이다.

지금까지 알려진 몇가지 방법을 소개하면 다음과 같다.

1. McClellan 변환 방법

McClellan 변환<sup>[7]</sup>은 다음과 같이 정의된다.

$$\cos w = A \cos u + B \cos v + C \cos u \cdot \cos v + D \quad (5)$$

여기서 A, B, C 그리고 D는 상수이다. McClellan 변환을 사용하면 대칭 1-D FIR 필터를 대칭 2-D FIR 필터로 변환시킬 수 있는데, Mersereau 등이 McClellan 변환을 좀더 일반화시키고<sup>[8]</sup>, 또한 이 변환 방법을 이용해서 얻어진 2-D FIR 필터는 순차 컨버루션이 가능하다고 밝혔다. 즉  $b(n)$ 과  $H(e^{j\omega})$ 를 1-D FIR 필

터의 임펄스 함수 및 전달함수라고 하면 그 관계는 다음과 같다.

$$H(e^{j\omega}) = b(0) + \sum_{k=1}^Q 2b(k) \cos \omega k \quad (6)$$

그러나 식(6)은 다시 식(7)로 표시 할 수 있다.

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^Q h(k) [\cos \omega]^k \quad (7)$$

다음, 식(7)에 McClellan 변환, 식(6)을 대입하면 2-D FIR 필터 전달함수를 얻는다.

$$H(z_1, z_2) = \sum_{i=0}^Q h(i) [H_f(z_1, z_2)]^i \quad (8)$$

여기서

$$H_f(z_1, z_2) = \sum_{i=-1}^1 \sum_{j=-1}^1 h_{ij} z_1^{-i} z_2^{-j} \quad (9)$$

즉  $H_f(z_1, z_2)$ 는  $3 \times 3$  SGK 필터이다. 그러므로 식(8)에 주어진 2-D FIR 필터는 그림 3처럼 순차 컨버루션에 의해 설치가 가능하다. 즉 그림 3에서 q번째 출력  $O_q(z_1, z_2)$ 는

$$O_q(z_1, z_2) = O_{q-1}(z_1, z_2) + h(q) A^q(z_1, z_2)$$

이고  $A_q(z_1, z_2)$ 는

$$A_q(z_1, z_2) = A_{q-1}(z_1, z_2) H_f(z_1, z_2) \quad (11)$$

이다.

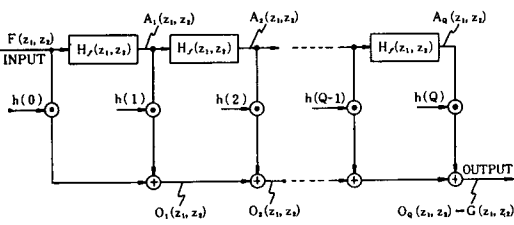


그림 3. McClellan 변환을 이용한 설치구성도

McClellan 변환을 이용한 순차 컨버루션은 출력영상 1개당  $10Q$ 의 곱하기가 필요하다.

이 밖에 Chebyshev 구조 설치 방법이 있으니 참고문헌[9]을 읽어 보기 바란다. 그러나 McClellan 변환을 이용한 순차 컨버루션은 반드시 2-D FIR 필터가 McClellan 변환을 통해 설계되어야 하기 때문에 일반적인 기법이 되지 못한다.

## 2. 근사(Approximation) 방법

2-D FIR 필터가 McClellan 변환 필터가 아닌 경우 순차 컨버루션은 다음과 같은 근사 문제로 정의된다. 즉 어떤 필터 전달함수  $H(z_1, z_2)$ 가 주어질 때, 근사 전달함수  $A(z_1, z_2)$ 와 차가 최소화되는 변수  $\{h(k)\}$ ,  $k=0, 1, 2, \dots, Q$ 와 SGK 필터계수  $\{h_{ij}\}$ ,  $-1 \leq j, i \leq 1$ 를 구하는 문제이다. 근사 전달함수  $A(z_1, z_2)$ 는

$$A(z_1, z_2) = \sum_{i=0}^Q h(i) [H_k(z_1, z_2)]^i \quad (12)$$

여기서

$$H_k(z_1, z_2) = \sum_{i=-1}^1 \sum_{j=-1}^1 h_{ij} z_1^{-i} z_2^{-j} \quad (13)$$

이다. 그러므로 이 문제는 MSE(mean square error)나 Chebyshev 오차 criterion를 최소화시켜 구할 수 있으나, 해를 구하는 방법이 복잡하고 계산량이 많은 것이 단점이다. 그림 4에 이 방법에 의한 순차 구성도의 한 예를 보였다.

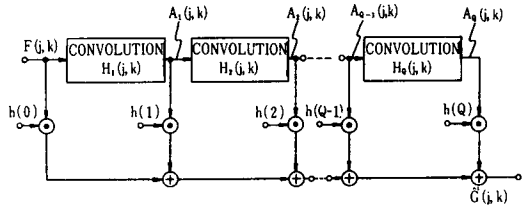


그림 4. SGK 필터를 이용한 설치구성도

좀더 상세한 내용은 참고문헌[10]에서 알아 볼 수 있을 것이다.

## 3. 특성치 분해(Singular Value Decomposition) 방법

특성치 분해는 선형대수학에서는 오랜 역사를 가지고 있으나, 최근 영상 restoration,<sup>[11]</sup> 디지털 필터<sup>[12]</sup> 제어 등 많은 분야에서 광범위하게 응용되고 있다. 어떤 행렬  $H(L_1, L_2)$ 가 주어졌을 때, 특성치 분해는 다음과 같이 정의된다.<sup>[13]</sup>

$$\underline{U}^T \underline{H} \underline{V} = \underline{\Delta}^{\frac{1}{2}} \quad (14)$$

여기서  $\underline{U}$ 는  $L_1 \times L_2$  unitary 행렬,  $\underline{V}$ 는  $L_2 \times L_1$  unitary 행렬이다. 또 행렬  $\underline{\Delta}^{\frac{1}{2}}$ 는 대각 행렬로써

$$\underline{\Delta}^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \sqrt{\lambda_R} & & \\ & & & & & 0 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

이다. R은 행렬  $\underline{H}$ 의 rank이다. 식(15)의  $\sqrt{\lambda_r}$ 는 행렬  $\underline{H}$ 의 특성치이고, 특성치는 행렬  $\underline{H} \cdot \underline{H}^T$ 나  $\underline{H}^T \cdot \underline{H}$ 의 고유치(eigenvalue)를  $\sqrt{\quad}$ 해서 얻는다.

그러나 식(14)는 다음과 같은 형태로 바꿔 쓸 수 있다.

$$\underline{H} = \sum_{j=1}^R \underline{H}_j \quad (16)$$

$$\underline{H}_j = \sqrt{\lambda_j} \underline{u}_j \cdot \underline{v}_j^T$$

$\underline{u}_j, \underline{v}_j$ 는 행렬  $\underline{U}, \underline{V}$ 의  $j$ 번째 column이다. 그러므로 특성치 분해에 의하면 rank R인 행렬은 R개의 rank 1인 행렬로 분해할 수 있다. 특성치 분해법에 의한 2-D FIR 필터 설치 구성도를 그림 5에 보였다. 그러나 식(16)의 행렬  $\underline{H}_j$ 는 separable하므로  $\underline{H}_j$ 에 의한 2-D 컨버루션은 column, row의 1-D 컨버루션이 된다.<sup>[11]</sup> 또한 1-D FIR 필터는 여러개의  $3 \times 1$  FIR 필터로 분해할 수 있으므로, 결국 2-D 컨버루션은 1-D  $3 \times 1$  SGK 필터에 의한 반복 컨버루션이 된다. 그림 6에 SVD/SGK 필터 설치 구성도를 도시하였다. 또한 가지 특기할 사실은 2-D FIR 필터를 행렬로 보고 특성치 분해할때, 반드시 R항으로 분해할 필요없이, 만일 특성치 값  $\sqrt{\lambda_r}$ 가 어떤 기준치 값보다 작으면 무시할 수가 있다는 것이다. 즉

$$\underline{H} = \sum_{j=1}^k \underline{H}_j = \sum_{j=1}^k \sqrt{\lambda_j} \underline{u}_j \underline{v}_j^T \quad (17)$$

여기서  $k < R$  이고, 특성치는 크기순대로 배열하였다고 가정한다. 이렇게 하므로써 많은 계산량을 절감할 수가 있다.<sup>[14]</sup> 보통 행렬에서  $\sqrt{\lambda_{\max}} / \sqrt{\lambda_{\min}}$ 의 비율 행렬의 조건치(condition-number)라고 부르는데, 조건치가 크면, 행렬이 ill-condition이라고 한다. 그러므로 행렬이 ill-condition할수록 k의 값을 적게 하면서 조사오차를 줄일 수 있다. 이런 SVD/SGK 기법은 전향에서 설명한 조사방법과 비교하여 SGK 필터 설계가 아주 간단해지는 잇점이 있으나 요구되는 곱하기 수는 증가되는 단점이 있다. SVD/SGK 컨버루션으로 실제 얻은 영상의 예를 그림 7에 보였다. 사용한 영상의 크기는  $256 \times 256$ 이고 2-D FIR 필터의 크기는  $15 \times 15$ 이다. 2-D FIR 필터를 특성치 분해하여  $k=3$ 으로 하였으며 이때 H와  $\hat{H}$ 의 NMSE(normalized mean square error)는 0.6%였다. 그림 7에서 i)는 입력영상, ii)는  $15 \times 15$  FIR 필터로 직접 설치해서 얻은 영상이고, iii)는 SVD/SGK( $k=3$ ) 순차 컨버루션으로 얻은 영상이다. 이때 영상 ii)와iii)의 NMSE는 0.068%이었다.

영상 iv)는 영상 ii)와 iii)의 차에다 상수 200을 곱해서 얻었다.

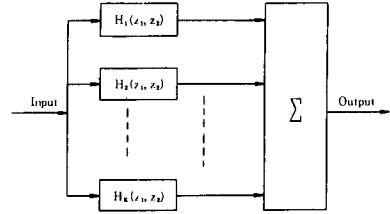


그림 5. 특성치 분해를 이용한 설치 구성도

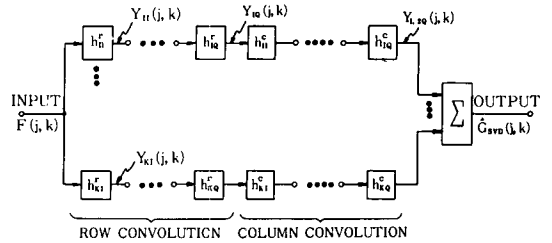


그림 6. SVD/SGK 필터 설치 구성도

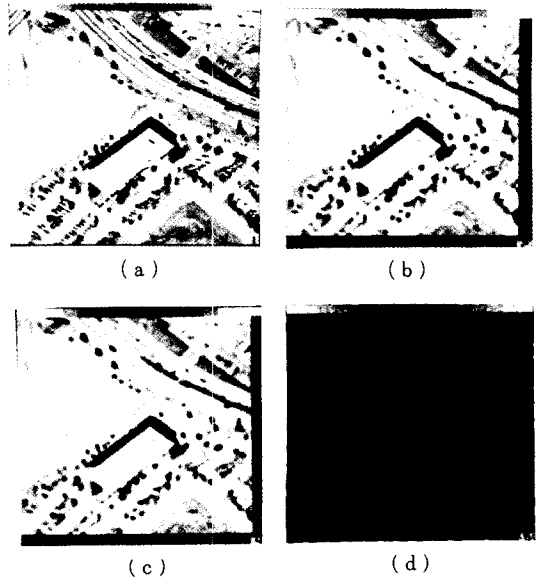


그림 7. SVD/SGK의 필터를 이용한 순차 컨버루션의 순서도의 예

#### IV. 결 론

지금까지 영상처리를 위한 몇 가지 순차 컨버루션 기법에 관해 기술하였다. 순차 컨버루션 기법은 하드

웨어의 구성을 최소화하며 2-D 컨버루션을 실시간 설치할 수 있어 소위 "user-interactive" 영상처리 시스템에 활용할 수가 있다. 그러나 고정숫자점 연산시 발생하는 FWL (finite-word-length)의 영향이나, cascade 구조설치시 각 SGK 필터의 ordering 문제등, 몇 가지 문제는 해결되어야 되겠다. 또한 2-D FIR 필터를 여러 개의 SGK 필터로 분해하는 간단하고, 효율적인 알고리즘 개발도 아울러 필요하다.

끝으로 우리나라에서도 영상처리에 대한 여러 가지의 연구가 활발히 진행되었으면 하는 마음 간절하다.

참 고 문 헌

[1] W.K. Pratt, *Digital Image Processing*. Wiley-Interscience, New York, 1978.

[2] W.K. Pratt, "An intelligent image processing display terminal," *Proc. SPIE Tech. Symp.*, San Diego, Calif., vol. 27, August 1979.

[3] T. G. Stockham, Jr., "High speed convolution and correlation," *Proc. Spring Joint Computer Conference*, PP. 229-233, 1966.

[4] S.K. Mitra and M.P. Ekstron, "Two-dimensional digital signal processing," *Benchmark Papers in Electrical Engineering and Computer Science*.

[5] J.F. Abramatic and C.F. Faugeras, "Design of two-dimensional FIR filters from small generating kernels," *Proc. IEEE Conf. on PRIP*, Chicago, May 1978.

[6] A.V. Oppenheim and R.W. Schafter, *Digital Signal Processing*. Prentice-Hall, New Jersey, 1975.

[7] J.H. McClellan, "The design of two-dimensional digital filters by transformation," *7th annual Princeton Conference on Information Science and Systems*, PP. 247-251. March 1973.

[8] R.W. Mersereau and et al, "McClellan transformations for two-dimensional digital filtering : II-implementation," *IEEE Trans. CS*, vol. CAS-23, no. 7, PP. 414-422, July 1976.

[9] J.H. McClellan and D.S.K. Chan, "A 2-D FIR filter structure derived from the Chebyshev systems," *IEEE Trans. CS*, vol. CAS-24, no. 7, July 1977, PP. 372-378.

[10] J.F. Abramatic and O.D. Faugeras, "Sequential convolution techniques for image fitting," *IEEE Trans. ASSP*, vol. ASSP-30, no. 1, PP.1-10, Feb. 1982.

[11] H.C. Andrews and B.R. Hunt, *Digital Image Restoration*. Prentice-Hall, New Jersey, 1977.

[12] S. Treitel and J. L. Shanks, "The design of multistage separable planar fitters," *IEEE Trans. GE*, vol. GE-9, no. 1, PP. 10-27, Jan. 1971.

[13] P. Lancaster, *Theory of Matrices*. Academic Press, New York, 1969.

[14] S.U. Lee and J.F. Abramatic, "Singular value decomposition of images," *Proc. IEEE I. CASSP*, PP. 749-752, April 1980. \*\*\*

略 語 解 說

PHM (phase modulation ; 位相變調 (傳送))  
 搬送波의 位相을 信號에 따라 變化시키는 變調方式으로 變調된 搬送波를 位相變調波라고 한다.  
 PH SHFT (phase shifting equipment ; 位相變換裝置 (課金))  
 K 방식에 있어서 遞倍 펄스受信局에서 位相變換을

하는데 사용하는 裝置로, 遞倍 펄스 受信裝置로부터의 펄스를 받아 이를 1秒 펄스 또는 0.5秒 펄스를 사용하여 所要位相의 펄스를 送出한다. 位相變換은 K 리피터에서 送出되는 登算 펄스의 리피터相互間的 同時送出을 逐格하여 增壓電源의 負荷를 輕減시키는 수단이다.