線型 및 非線型計劃法을 위한 컴퓨터 소프트웨어의 紹介
— MINOS 및 MINOS/AUGMENTED

성 백 서*
안 병 훈*

1. 序 論

MINOS(Modular Incore Nonlinear Optimization System)/AUGMENTED[8]는 M. Saunders와 B. Murtagh 등의 여러 사람에 의해서, 美國, Stanford 대학교에서 개발된 일반적인 비선형계획법을 위한 소프트웨어 시스템으로, 특히 규모가 크고 Sparse한 문제에 잘 적용되도록 설계된 효과적인 시스템이다.

MINOS/A는 본래 線型制約條件下에서의 非線型問題를 풀기 위한 프로그램으로 개발되었던 MINOS를 非線型制約式에까지 확장시킨 것이다. MINOS는 그 解法上의 장점[5, 6]으로서 目的函數가 선형인 경우 자동적으로 Revised Simplex 方法을 사용하게 됨으로써, 非線型問題와 동시에 線型問題까지도 해결할 수 있으며, 특히 가장 최근에 개발된, 대규모의 Sparse한 행렬식을 효과적으로 다룰 수 있는 수치기법(Numerical Technique)들을 사용함으로써 규모가 큰 선형문제뿐 아니라 비선형문제일지라도 규모의 제약에 자유롭다는 장점을 갖고 있다.

최근 우리나라에서 사용되고 있는 선형계획법을 위한 기존의 상업적 소프트웨어로는 이 분야의 Standard of the art로서 認定받고 있는 것들로서 이미 APEX-Ⅱ(CDC), MPSX(IBM), XMP(University of Arizona) 혹은 UMPIRE 등 많이 있다. 이들 패키지들은 사용자 편의를 위해 데이타 입출력에 있어서 표준화된 MPS(Mathematical Programming Standards)을 사용하고 있으며, Dual Simplex方法이나 GUB 혹은 Parametric 분석등 많은 사용자 option을 가지고 있으며, 해법에 있어서도 Revised Simplex 方法의 효과적인 수치기법을 사용하고 있다. 그러나, 이들 패키지들은 기억용량을 줄이기 위해 모든 문제를 컴퓨터 core 내에서 처리하지 않도록 설계되어 있어 일련의 선형계획법 문제를 풀거나 선형계획법과 다른 기법과 동시에 사용하는 경우, 혹은 사용자 option으로서 주어지지 않은 분석을 행하고자 하는 경우에 대단히 복잡하고, 어려운 과정을 거쳐야 하는 어려움이 있어왔다.

MINOS/A는 모든 프로그램이 FORTRAN-Ⅳ 언어로 되어 있으며, 컴퓨터 기종에 따른 기계적 의존도를 줄이도록 각 副프로그램들이 구성되어 있고, 모든 문제해결을 컴퓨터의 core 내에서 처리하도록 설계되어 있어서, 어떤 컴퓨터에도 쉽게 설비될 수 있을 뿐 아니라, 문제해결에 있어서도 사용자의 필요에 따라 일련의 선형계획법문제를 푼다든가, 다른 기법과 연결하여 선형계획법을 이용한다든가, 혹은 GUB나 매개변수에 의한 민감도 분석, Column generation, Constraint addition 등을 쉽게 해결할 수 있도록 설계되어 있다. 또한, 사용자 편의 면에서도 MINOS/A의 입출력은 선형문제의 경우 MPS를 이용하여, 그 해법 자체도 대단히 효과적인 기법들을 사용하고 있어서 다른 기존의 패키지들에 비해 조금도 손색이 없다. 즉, 선형문제의 경우에 MINOS/A를 사용하는 것은 기존의 효과적인 패키지들에 대한 대체적인 역할이 아니라 오히려 확장된 사용개념을 가지고 있는 것이다.

MINOS/A의 이러한 특성은 선형계획법에만 국한되는 것이 아니라 비선형문제에도 똑같이 적용된다. 즉, MINOS/A는 비선형문제를 한번 푸는 경우뿐 아니라, 일련의 문제를 푼다든가, 비선형문제의 解가 다른 기법의 입력으로 사용되는 경우등 MINOS/A를 副프로그램으로 이용할 수도 있다.

MINOS/A에서 사용하고 있는 비선형문제의 해법 [7, 8, 12]은 규모가 큰 Sparse한 제약조건식을 가진 경

* 한국과학기술원 경영과학과

우(즉, 제약조건함수들의 Jacobian matrix가 sparse 한 경우)에 매우 효과적인 것으로, 초기해가 가능해(feasible solution)가 아니더라도 무방하며, 내장된기법이 Reduced Gradient 方法, Conjugate-Gradient 方法 등 다양하여 사용자의 모델 parameter 선택에 의해서, 문제해결 과정 도중에 자동적으로 가장 적절한 기법을 선택할 수 있다.

이와 같이 선형 및 비선형문제를 동시에 해결하면서, 사용자의 필요에 따른 제반 분석을 용이하게 할 수 있도록 잘 설계된 MINOS/A에 대해 일반에 널리 이해시키고, 보다 효과적인 사용에 도움을 주고자 하는 것이 이 소개의 목적이다.

본문의 구성은 제 2 장에서 MINOS/A의 프로그램의 구조에 대해서 살펴보고, 제 3 장에서는 앞서 언급한 MINOS/A의 특성을 간략한 해법의 소개와 더불어 부연 설명하고, 컴퓨터 소프트웨어로서 사용자를 위한 여러가지 MINOS/A의 프로그램상의 장점들을 살펴본 후, 간단한 결론을 맺고자 한다.

2. MINOS/A의 프로그램 구조

앞서 언급한 바와 같이 MINOS/A의 모든 Source code[14]는 FORTRAN-Ⅳ로 되어 있으며, 크게 3개의 副프로그램 그룹으로 나눌 수 있다. 그 첫번째 그룹을 HEAD file, 2번째 그룹을 BODY file, 마지막을 MOD file이라고 한다.

(1) HEAD file.

이 그룹에는 1개의 主프로그램과 8개의 副프로그램이 있다. 이들 각 프로그램들은 컴퓨터 기종에 의존하는 것들로서 크게 두 부분으로 나뉘어져 있다. 그 하나는 MAIN, GO, FOPEN, MINOS, CALCFG 및 CALCON이라는 이름의 副프로그램들로서 사용자의 기종에 따라 수정되어 질 수 있는 것이고, 나머지는 HASH, INITLZ 및 SPECS로서 수정할 필요가 없다.

예를 들면, MAIN이란 主프로그램에서는 모든 Work Space를 결정하며 기종에 따라 FORTRAN이 아닌 다른 code를 이용하거나 Run-time allocation을 할 수도 있다. GO는 MINOS/A가 사용하는 global file들("card reader", "line printer,", 혹은 "scratch" file 등)을 열고 MINOS에 Work Space를 넘겨주는 역할을 한다. FOPEN은 각 global file에 unit number를 지정해 주며 이것들은 기종에 따라 지정하는 방법들이 다르므로 수정을 요하는 것들이다.

MINOS란 副프로그램은 사용자가 선택한 모델 parameter 값들에 의거하여 필요한 계산 순서를 정해주는 것으로 다음의 BODY file에 있거나 MOD file에 있는 副프로그램들을 조합하여 사용자의 계산목적을 달성할 수 있도록 해준다. 만일, 사용자가 선형문제나 비선형문제를 한번만 풀고자 할 경우는 수정을 필요로 하지 않지만 앞서 설명한 바와 같이 여러가지 다른 작업을 할 경우 이 副프로그램을 수정하여 사용할 수 있으며, 여기서는 사용자가 작성한 어떤 다른 副프로그램도 "call"할 수 있다.

CALCFG와 CALCON은 비선형문제의 경우 목적함수와 제약조건식의 함수값과 Gradient를 구하는 것으로 선형의 경우 dummy이나 비선형의 경우 사용자에 의해서 작성되어 dummy의 것과 대체되어야 하는 것이다.

(2) BODY file

이 그룹은 60여개의 副프로그램들로서 선형문제의 primal simplex方法을 수행하기 위한 것들과 비선형문제를 위한 것들로 구성되어 있다. 이들 副프로그램들은 모델 parameter와 몇몇 중요 변수들은 "COMMON"에 의해서 연결되고, 나머지는 모두 subroutine argument에 의해서 연결되므로, 각각이 따로따로 사용될 수도 있는 것들이다. 이들의 각 기능은 MINOS system manual[13]을 참조한다.

(3) MOD file

이것은 MINOS, MATMOD, MKCOL, MODBND, MODELM 및 NMSRCH의 여섯개 副프로그램으로 구성되어 있으며, 이중 MINOS는 사용자의 목적에 따라 수정되어 HEAD file의 그것과 대체하여 사용하는 것이다. MATMOD는 column generation이나 constraint addition 등을 위한 것으로 사용자가 작성해서 dummy프로그램과 대체되어야 한다. 이외의 각 副프로그램들은 필요에 의해서 MINOS와 MATMOD에서 "call"할 수 있는 것으로 각 기능은 역시 MINOS system manual을 참조한다.

(4) MINOS/A의 입력 데이타

MINOS/A의 입력 데이타는 네가지로 나눌 수 있으며 그 첫째는 SPECS file이다. 이는 문제의 크기, 문제의 성격, 모델 parameter의 선택 등 문제 해결을 위한 제반 사항을 지정해 주는 것으로 대부분 경우 default 값들을 사용할 수 있다. 둘째로는 MPS file로서 모든 선형 데이타의 입력을 하며, 비선형 문제의 경우도 선형부분은 이것을 이용해서 입력하면 편리하다. MPS의 작성방법은 APEX-Ⅱ나 MPSX와 같다.

세째로는 副프로그램 CALCFG와 CALCON의 작성으로 이것은 HEAD file의 dummy와 대체되어야 한다. 마지막으로는 사용자가 CALCFG나 CALCON

에서 혹은 다른 副프로그램, 즉, 수정된 MINOS나 MATMOD 등에서 입력시키고자 하는 데이타가 그것이다.

3. MINOS/A의 특성

(1) MINOS/A의 해법과 그 특성

MINOS/A는 그 해법상 모든 기타의 비선형해법들이 그렇듯이 local optimal한 해를 찾는 것으로, 수식적으로는 다음과 같은 문제를 풀도록 설계되었다.

$$
\begin{aligned}
\text{最 小 化} \quad & f^0(x)+c^Tx+d^Ty \\
\text{制約條件} \quad & f(x)+A_1y \gtreqless b_1, \\
& A_2x+A_3y \gtreqless b_2, \\
& l \leq \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \leq u.
\end{aligned} \tag{1}
$$

여기서, $f(x)=[f^1(x), \cdots, f^{m_1}(x)]^T$는 vector함수로서 각 $f^i(x)$들은 부드러운(smooth)함수로서 gradient vector를 가지거나, 적어도 수치적으로 계산 가능한 함수이어야 한다. 또한, 각 제약조건식들은 범위(range)를 갖는 형태로도 주어질 수 있다.

(1)式을 푸는 과정은 제약식의 비선형 함수를 잠정해를 기준으로 선형화하여, 다음과 같은 선형제약식하에서의 비선형문제를 축차적으로 풀어나가는 것이다.

$$
\begin{aligned}
\text{最 小 化} \quad & f^0(x)+c^Tx+d^Ty-\lambda^T_k(f-\tilde{f})+ \\
& \frac{1}{2}\rho(f-\tilde{f})^T(f-\tilde{f}) \\
\text{制約條件} \quad & \tilde{f}+A_1y=b_1, \\
& A_2x+A_3y=b_2, \\
& l \leq \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \leq u.
\end{aligned} \tag{2}
$$

여기서 $\tilde{f} \triangleq f(x:x_k)=f(x_k)+J(x_k)(x-x_k)$

$$J(x_k) \triangleq \left[\frac{\partial f^i(x_k)}{\partial x_j}\right]$$

로서, 제약식은

$$\begin{bmatrix} J(x_k) & A_1 \\ A_2 & A_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1+J(x_k)\cdot x_k-f(x_k) \\ b_2 \end{bmatrix}$$

의 선형제약식이 된다. (2)式의 목적함수에서 λ_k는 Lagrangian parameter이고 ρ는 penalty parameter로서 이는 전체적으로 Lagrangian 함수에 기초한 해법으로 잠정해의 feasibility를 유지해주기 위해 penalty 방법을 가미한 것이다. [7, 8, 12]

MINOS/A에서는 위의 과정을 "major iteration"이라 하고, 각 (2)式의 문제를 푸는 과정을 "minor iteration"이라고 한다.

(2) 式, 즉, 선형제약식하에서의 비선형 문제를 푸는 과정[5, 6]은 선형계획법의 Revised Simplex 방법에 의거하여 각변수를 기저변수(basic variable: 주어진 bound 내에서 자유롭게 결정됨)와 비기저변수(non-basic variable: 주어진 bound 들에서 값이 결정됨)로 나누는 외에, 기저 변수가 아니면서도 bound 내에서 자유롭게 값을 가질 수 있는 "superbasic"이란 새로운 변수를 도입하여, 우선 reduced-gradient 혹은 conjugate-gradient 방법으로 "superbasic" 변수들의 값을 목적함수를 줄이는 방향으로 정한후, 나머지 system에 대해 revised simplex 방법에 의해 해를 구하는 것이다. 이때, 주어진 변수 분할이 더이상 목적함수의 개선을 가져오지 못하면, 비기저변수 중에서 하나 이상을 선택하여(이 과정은 simplex方法에서 비기저변수의 reduced-cost를 탐색하는 방법과 유사하다), 이를 superbasic 변수로 도입하여 위의 과정을 반복하되 기저변수나 superbasic 변수 중 bound에서 값을 갖는 것들을 비기저변수로 바꾸어 줌으로써 전체 기저 변수의 수는 제약조건식의 수와 같게 하고, superbasic 변수의 수를 하나 줄여주는 보정과정을 반복하는 것이다.

이 과정을 잘 살펴보면 선형계획법의 *simplex* 방법은 항상 superbasic 변수의 수가 1에서 0로, 다시 0에서 1로 반복되는 과정임을 쉽게 알 수 있다.

이러한 MINOS/A의 해법상 특성으로는 우선, 기저변수들에 해당하는 기저행렬을 Bartel-Golub[1] 등에 의하여 개발된 Sparse한 행렬식을 LU factorization을 통하여 수치적으로 안정성 있게 보정해나가는 방법을 사용하여 유지해 나감으로써, 순 선형문제를 푸는 경우에도 매우 효과적임과 동시에 규모가 크고 sparse한 문제를 쉽게 다룰 수 있다는 점이다.

둘째로는, 각변수에 주어진 bound들을 각각 다른제약조건식으로 다루지 않고도 해법논리상으로 자동적으로 처리할 수 있다는 점이다. 세째로는, 제약조건식의 비선형 정도가 적은 문제일수록 적용효과가 높은 점이다. 환언하면, 목적함수의 비선형 정도가 아무리 심해도 1차 미분만 구할 수 있다면 효과적으로 해를 구할 수 있으며, 특히 제약조건이 없는 경우(변수에의 bound는 제외)에는 그 효과 측면에서 기타의 어떤 해법에도 떨어지지 않는다는 점이 MINOS/A의 또 다른 장점이다. 이 장점을 살리기 위해서는 제약조건식의 비선형도가 높은 문제의 경우는 변수변환을 통하여 제약조건식의 비선형도를 목적함수에로 이전시키는 작업이 필요하다.

(2) MINOS/A의 프로그램상의 특성

앞서도 언급한 바와 같이 MINOS/A의 프로그램은 사용자의 편의를 위해 모든 선형 자료 즉, (1)式의 c, d, A_1, A_2, A_3, b_1, b_2 및 l, u vector 등을 입력시에 MPS·형태를 이용하여, 비선형 문제를 풀때의 적절한 사용

자 통제를 위해 여러가지 모델 parameter을 통한 option을 가지고 있다. 그 한 예로서, 비선형함수의 형태가 적분의 형태를 취하여 해석적으로 1차 미분을 구할 수 없는 경우에 수치적으로 이를 구하는 동시에, 사용자가 구한 해석적인 1차 미분을 수치적으로 비교, 검사하는 option을 가지고 있다.

또한, 해의 출력형태도 MPS를 사용하므로, 결과분석이 용이할 뿐 아니라, 충분한 error 및 diagnostic message를 제공하여 사용자로 하여금 이용하기 쉽게 구성되어 있다. 규모가 크고 오랜 시간이 걸리는 문제의 경우 중간 계산 결과를 dump했다가 다시 이를 이용하여 restart를 할 수 있는 option도 사용자에게는 크게 도움이 되는 MINOS/A의 중요 능력중의 하나이다.

마지막으로 MINOS/A의 가장 강력한 장점은 단순히 선형문제나 비선형문제의 해결만을 위한 프로그램이 아니라, 일련의 선형계획문제나 비선형계획 문제를 풀고, 다른 어떤 사용자 프로그램에도 쉽게 적용될 수 있도록 설계된 것이다. 특히, 사용자의 목적에 따라 column generation이나, constraint addition 혹은 문제의 data가 바뀌었을 경우에, 이를 전혀 새로운 문제로 다루지 않고서도 쉽게 해결할 수 있다[8, 10].

4. 結 語

이상에서 간략하게 살펴본 MINOS/A는 근래에 미국등지에서는 이미 그 효과성을 인정받아 널리 쓰이고 있는 바, 최근까지의 대표적인 사용예를 살펴보면 A.S. Manne이 미국의 에너지 정책분석을 위하여 구성한 선형계획 모델인 ETA[3]와 이를 경제성장 모델과 같이 고려한 비선형 계획 모델인 ETA-MACRO[4]를 푸는데 효과적으로 사용되었으며, 미국 국립연구소의 하나인 Brookhaven 연구소에서 개발한 에너지 수급 모형인 BESOM[2] 모델의 선형계획 부분을 해결하는데 많은 공헌을 하였다. 이밖에도 J. Rowse[11]에 의하면 MINOS/A는 비선형 정도가 높은 시장균형모델(특히, 농업생산물의 수급분석이나 수송문제, 교통 문제 등)을 해결하는데도 매우 효과적이다.

우리나라에서는 현재 한국과학기술원 경영과학과에서 MINOS/A의 응용이 활발히 진행되고 있으며, 이것은 비단 정책분석 모형, 시장균형 모델 등의 제반 이론적 연구에서 뿐만 아니라 일반적인 matrix/report generator 중의 하나인 PDS/MAGEN[9]과 동시에 사용하는 방법을 연구하고 있으며, 더 나아가 Vax system 등의 미니 혹은 마이크로 컴퓨터에서의 응용 가능성에 대해서도 추구하고 있다.

앞으로, 우리나라의 각 학교나 연구기관 혹은 일반 산업체에서도 선형계획법과 관련있는 제반 연구활동과 규모가 큰 정책분석 모델에서의 비선형 응용등 여러분야에서 MINOS/A의 적극적인 응용이 크게 기대되는 바이다.

참 고 문 헌

1. Bartels, R.H. and Golub, G.H., "The simplex method of linear programming using LU decomposition," Communications of ACM 12(1969), 266~268.
2. Cherniavsky, E.A., Brookhaven Energy System Optimization Model, Brookhaven National Laboratory Report, BNL 19569, (1974).
3. Manne, A.S., "ETA: a model for energy technology assessment," Bell Journal of Economics and Management Science 7(2), 379~406, (1981).
4. Manne, A.S., "ETA-MACRO: a user's guide," EPRI EA-1724, Electric Power Research Institute Report, February(1981).
5. Murtagh, B.A. and Saunders, M.A., MINOS User's Guide, Report SOL 77-9, Department of Operations Research, Stanford University, (1977).
6. ______ and ______, "Large-scale linearly constrained optimization," Math. Prog. 14, pp. 41~72, (1978).
7. ______ and ______, "The implementation of a Lagrangian-based algorithm for sparse nonlinear constraints," Report SOL 80-1, Department of Operations Research, Stanford University, (1980).
8. ______ and ______, MINOS/AUGMENTED User's manual, Report SOL 80-14, Department of Operations Reseanch, Stanford University, (1980).
9. PDS/MAGEN user information manual, Haverly Systems Inc., New Jersey, (1977).
10. Preckel, P.V., Modules for use with MINOS/AUGMENTED in solving sequences of mathematical programs, Report SOL 80-15, Department of Operations Research, Stanford

University, (1980).

11. Rowse, J., "On the solution of spatial equilibrium models," Decision Sciences, Vol. 13, 619 ~637, (1980).
12. Robinson, S.M., "A quadratically convergent algorithm for general nonlinear programming problems," Math. Prog. 3, pp. 145~156, (1972).
13. Saunders, M.A., MINOS system manual, Report SOL 77-31, Department of Operations Research, Stanford University, (1977).
14. ______, MINOS distribution documentation, Report SOL 80-100, Department of Operations Research, Stanford University, (1980).