

# 寫眞測定技法을 利用한 斜面的 傾斜와 走向決定에 관한 理論的 考察

## Theoretical Research on Photogrammetric Dip and Strike Determination of Inclined Surfaces

柳	福	模*
Yeu,	Bock	Mo
朴	雲	龍**
Park,	Un	Yong
楊	寅	台***
Yang,	In	Tae

### Abstract

During engineering projects, land use and geologic investigations, topographic information by means of Photointerpretation and Photographic Survey often plays an important role. As some recent methods of Dip and Strike determination were used without considering the characteristics of the geometrical conditions of photography, it is necessary to present an accurate and rapid formula.

In this paper, Dip and Strike determination using photogrammetric method was theoretically approached with geometrical and mathematical models using trigonometric formula and plane equation, respectively.

### 要 旨

土木設計, 土地利用調査 및 地質調査에 있어서, 寫眞測量과 寫眞判讀에 의한 地形情報은 計劃樹立에 重要な 役割을 한다. 從來에 發表된 傾斜와 走向決定方法들에서는 寫眞의 幾何學的인 條件에 대한 特性을 精確하게 考慮하지 못하였기 때문에, 이를 補完하는 올바른 公式誘導가 必要하게 되었다.

이에 本 論文에서는 三角法에 의한 幾何學的인 모델과 平面方程式에 의해 誘導되는 數學的인 모델의 두가지 側面에서 理論的으로 考察하므로써, 傾斜진 面의 傾斜와 走向決定에 寫眞測定方法을 利用하는 하나의 技法을 提示하고자 한다.

\* 正會員 · 延世大學校 工科大學 土木工學科 教授

\*\* 正會員 · 東亞大學校 工科大學 土木工學科 助教授

\*\*\* 正會員 · 江原大學校 工科大學 土木工學科 專任講師

## 1. 緒 論

土木設計 및 計劃에서 設計前後의 地形 및 地質構造를 포함한 地形情報은 計劃樹立에 있어 重要한 役割을 한다. Brunton 콤파스나 클리노미터를 使用하는 地質調査方法과 從來의 一般測量方法은 對象地域이 넓고 복잡할 境遇 많은 時間과 經費가 所要되고 있다<sup>(1)</sup>. 넓은 地域에서의 寫眞測定의 經濟성과 正確성은 이미 여러 論文에서 밝혀진 바 있다<sup>(2,3)</sup>.

資源 및 土地利用調査 등을 위한 寫眞判讀時, 兩像의 垂直寫眞으로부터 簡單하고 빠른 方法에 의한 傾斜진 地形의 傾斜角測定은 種種 特別한 關心事가 될 수 있다. 특히 地質學에서 成層(Bedding), Fracture, 또는 接觸面(Contact plane)과 같은 構造面(Structural surfaces)의 傾斜와 走向에 대한 正確한 測定은 매우 重要하며, 山岳地形에서의 傾斜度測定은 土地利用과 軍事의 側面에서 매우 重要한 役割을 한다<sup>(4,5,6)</sup>.

따라서 野外에서 클리노미터나 콤파스로 簡單히 測定하듯이, 寫眞判讀者가 立體視하는 동안 傾斜까지도 測定할 수 있는 正確하고도 簡單한 方法이 必要하다. 그러나 그동안 發表된 方法에서는 寫眞을 中心投影이 아닌 正射投影으로 考慮하고 誘導하였기 때문에 誤差를 수반하고 있었다<sup>(7)</sup>. 또한 컴퓨터에 입력된 3次元座標로서 路線選定, 地形모델을 만드는 오늘날의 地形解析에 必要한 數學的인 알고리즘 開發이 必要하다.

이에 本 論文에서는 傾斜진 地形에서의 傾斜와 走向決定에 寫眞測定技法을 利用하는 方法에 대한 考察로서, 두가지 側面에서 傾斜와 走向을 決定하는 方法을 誘導하려고 한다. 첫번째 方法은 寫眞判讀과 동시에 考慮할 수 있도록 視差公式와 三角法에 基礎를 둔 幾何學的인 모델이며, 두번째 方法은 Computer Program 適用을 위한 平面方程式에 의한 數學的인 모델이다.

클리노미터나 콤파스는 地形의 表面方向測定에 限定되어 있으나, 寫眞測定方法은 Fracture의 間隔, 層의 두께와 地形의 形狀까지도 測定할 수 있으며, 調査, 判讀 및 計劃樹立에 더 많은 時間을 提供해 줄 수 있다<sup>(8)</sup>.

## 2. 地形의 傾斜와 走向決定에 관한 理論解析

### 2.1. 幾何學的인 모델에 의한 方法

#### 2.1.1. 基本公式 및 假定事項

寫眞測定의 基本理論으로서, 寫眞判讀 및 寫眞地質學에서 種種 言及되는 正射投影과 中心投影과의 差異點, 寫眞基線(Photobase)과 視差差를 測定하는 方法에 대한 說明은 本 論文에서 省略한다.

寫眞은 中心投影이므로 基準面에 대한 임의의 點  $K$ 의 起伏에 따른 寫眞上의 變位가 생기며, 그 公式은 다음과 같다.

$$\Delta r = \frac{h_p}{H} r = \frac{h}{f} r \quad (1)$$

여기에서  $\Delta r$ 은 起伏變位,  $r$ 은 寫眞主點으로부터 寫眞上의  $K$ 點까지의 距離,  $h_p$ 는  $K$ 點의 實際 높이,  $h$ 는 寫眞縮尺으로 환산된  $K$ 點의 높이,  $H$ 는 撮影高度,  $f$ 는 사용된 寫眞機의 焦點距離이다.

$K$ 點과 基準面에 내린 垂線의 발  $A$ 點 사이의 높이를 計算하기 위한 視差公式은 다음과 같다<sup>(9)</sup>.

$$h = \frac{f \cdot |\Delta p|}{b \pm |\Delta p|} \quad (2)$$

여기에서  $|\Delta p|$ 는  $A$ 와  $K$ 點사이의 視差差의 絕對값,  $b$ 는  $A$ 點에 대한 寫眞基線길이이며,  $+$ 符號는  $K$ 가  $A$ 보다 높을 때,  $-$ 符號는  $A$ 보다 낮게 位置할 境遇에 適用된다.

走向(Strike)은 假想의 水平面과 地表面이 교차하는 直線의 方位로 定義되며, 이 線의 horizontality는 中心投影을 통해 走向의 不變性을 左右한다. 반면에 傾斜角(Dip angle)은 假想의 水平面으로부터 傾斜진 地表面의 最大傾斜線에 대한 高低角으로써, 中心投影에 의해 一般的으로 달라진다.

立體鏡(Stereoscope)으로 똑바로 내려다 볼 때 立體모델의 中心에 나타나는 傾斜地形의 寫眞像은, 一般的으로 過高感과 中心投影에 의한 두가지 變形에 의해 影響을 받는다. 따라서 立體모델上에서 視覺評價에 기초한 傾斜角 決定方法은 이들 變形에 대해 신중히 考慮하여야 한다.

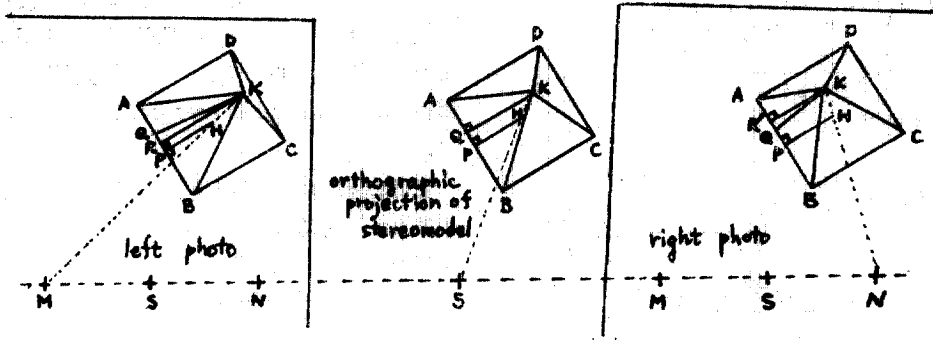


그림 1. Photographic images of a pyramid on a stereopair and corresponding stereoscopic image.

本 論文에서는 寫眞上에는 傾斜(Tilt)가 없는 것으로 假定하고, 攝影基線은 horizontality를 유지한다고 假定하여 公式을 誘導하였다.

2.1.2. 從來方法에서의 誤差分析

既發表된 傾斜를 決定하는 여러 方法<sup>(10,11,12,13)</sup> 중에서 共通的으로 소홀했던 첫번째 事項은 立體모델上에서의 傾斜진 面에 대한 最大傾斜線이 實際의 最大傾斜線과 一致한다고 假定한 것으로 이 假定은 投影의 歪曲 때문에 모순이 생긴다.

이 모순점을 具體的으로 說明하기 위해 그림 1 과 같이 피라밋의 面 AKB를 考慮하면, K는 頂點의 像이고, Q는 K로부터 走向線 AB에 내린 垂線의 발이므로, KQ가 AKB面에 대한 假象의 最大傾斜線이 된다. 그러나 實際의 最大傾斜線은 邊心距離 KP이다.

피라밋의 높이를 傾斜角 즉  $\angle HPK = \alpha$ 에 대한 垂直距離라 하면, 走向線 AB에 따라 基準面에 대한 起伏變位를 補正한 K의 點으로 H를 나타낼 때 垂直距離에 대응되는 水平距離로써 HP가 된다. 따라서 K와 Q가 같은 最大傾斜線에 있다는 點이 HP 대신에 HQ를 잘못 使用하고 있었던 理由가 된다.

두번째 事項은 實際의 最大傾斜線으로, K로부터 走向線 AB에 垂直으로 내린 KR 또는 KR'를 택한 事實이다. R과 R'는 AB線上的 다른 두 點이며, 왼쪽 寫眞에서 KR이 中心 M으로부터 放射狀일 때 또는 오른쪽 寫眞에서 KR'가 中心 N으로부터 放射狀일 때에만 實際 最大傾

斜線과 一致한다.

세번째 事項은 寫眞의 投影關係를 中心投影으로 考慮하지 않은 것으로서, 여기에 대해서는 (2.1.4)에서 具體的으로 論하려 한다.

2.1.3. 數式的 解析方法

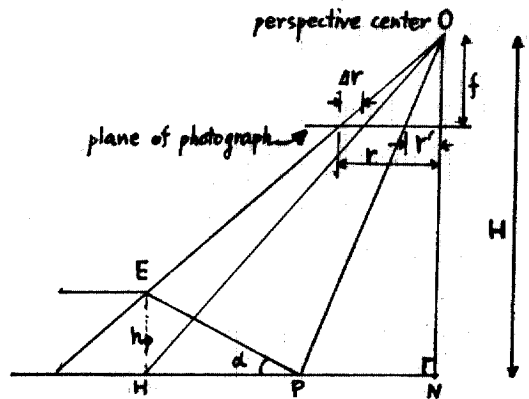


그림 2. Basic geometry of Photograph.

그림 2에서 傾斜진 地形의 傾斜角  $\alpha$ 를 구하기 위해서는 우선 HP의 正確한 길이를 알아야 한다. 寫眞上에는 나타나있지 않는 E點에 대한 垂線의 발 H는 起伏變位를 考慮함으로써, 그 位置를 얻을 수 있다.

$$HP = HN - PN = (r - \Delta r - r') \frac{H}{f}$$

위식에 (1)식을 代入하면,

$$HP = \left( r - \frac{h}{H} r - r' \right) \frac{H}{f}$$

가 되며, 여기에 (2)식을 代入하면

$$HP = \left( r - \frac{|Δp|}{b + |Δp|} r - r' \right) \frac{H}{f}$$

$$= \left( \frac{br}{b + |Δp|} - r' \right) \frac{H}{f} \quad (3)$$

이 된다. 따라서

$$\tan(\alpha) = \frac{EH}{HP} = \frac{\frac{|Δp|}{b + |Δp|} H}{\left( \frac{br}{b + |Δp|} - r' \right) \frac{H}{f}}$$

$$= \frac{|Δp|}{b(r - r') - r' \cdot |Δp|} f$$

가 된다. 여기에서 E와 P의 寫眞上에서의 距離 즉  $(r - r')$ 를  $d$ 라 놓으면, 위 식은 다음과 같이 된다.

$$\tan(\alpha) = \frac{|Δp|}{bd - r'|Δp|} f \quad (4)$$

따라서 傾斜角  $\alpha$ 는

$$\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{|Δp|}{bd - r'|Δp|} f \right) \quad (5)$$

가 된다.

식(5)는 P가 H와 N 사이에 있을 경우이며, P가 H밖에 위치할 경우도 같은 方法으로 誘導 된다.

따라서 傾斜角을 구하는 一般公式은

$$\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{|Δp|}{bd \pm r'|Δp|} f \right) \quad (6)$$

(여기에서 +符號는  $PN < HN$ 일 때이며, -符號는  $PN > HN$ 일 때이다.)

이 된다.

#### 2. 1. 4. 圖式的 解析方法

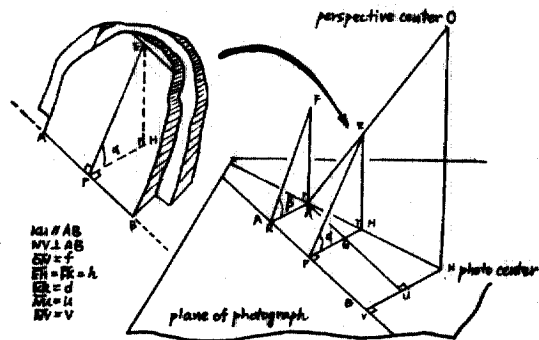


그림 3. Spatial relationships between real angle  $\alpha$  of dip of a inclined surface and its corresponding photographic perspective angle  $\beta$ .

그림 3에서  $\angle EPH = \alpha$ 는 實際傾斜角이며, P點에서 HP에 直角인 水平線 AB는 走向이다. 寫眞面에서 K는 三角形 EPH의 頂點 E의 中心 投影된 點을 나타내며, 이 때의  $\angle FRK = \beta$ 를 投影傾斜(photographic perspective dip)이라 부른다.

實際傾斜  $\alpha$ 와 投影傾斜  $\beta$ 와의 關係를 幾何學的으로 誘導하면,  $\Delta KGH$ ,  $\Delta KUN$ 과  $\Delta EHK$ ,  $\Delta ONK$ 의 닮음꼴로부터

$$\frac{GH}{NU} = \frac{HP - KR}{NU} = \frac{EH}{ON}$$

$$\text{즉 } \frac{HP}{EH} = \frac{KR}{EH} + \frac{NU}{ON}$$

가 된다.

$\cot \alpha = \frac{HP}{EH}$ ,  $\cot \beta = \frac{KR}{EH}$  이므로 NU를  $u$ 라 표기하면, 上式은

$$\cot \alpha = \cot \beta + \frac{u}{f}$$

가 된다.

寫眞上에서  $\Delta EHP$ 의 位置와 方向, 또한 頂點 E의 基準面에 대한 上下位置關係를 고려하여 위 식을 다시 쓰면

$$\cot \alpha = \cot \beta \pm \frac{u}{f} \quad (7)$$

가 된다. 여기에서 +符號는  $\vec{NU}$ 方向과 같은 方向에  $\vec{KR}$ 이 있을 때이며, -符號는  $\vec{NU}$ 方向과 반대방향으로  $\vec{KR}$ 이 位置할 경우이다.

$KR = d$ 라 놓고, 視差公式인 (2)式을  $\cot \beta$  값에 代入하면,

$$\cot \alpha = \frac{d}{\frac{|Δp|}{b \pm |Δp|} f} \pm \frac{u}{f}$$

$$= \frac{1}{f} \left( \frac{bd}{|Δp|} \pm (d + u) \right) \quad (8)$$

가 된다. (8)식에서  $(d + u) = v$  이므로 傾斜角  $\alpha$ 는

$$\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{f}{\frac{bd}{|Δp|} \pm v} \right) \quad (9)$$

이 된다. 이 식은 數式的으로 유도된 식(6)과 같으며, 두 식 모두다 初期에 알아야 할 값은 오직 焦點距離 뿐으로, 그 값은 寫眞의 가장자리에 記錄되어 있다.

(2.2.1.)에서 세번째 誤差事項으로 考慮한 中心投影인 寫眞의 投影關係를 正射投影으로 看做하여  $\beta$ 를 實際의 傾斜角으로 가정했을 때 發生하는 誤差는 (7)式으로부터 알 수 있다.

위에서 誘導된 式은 單寫眞에 대한 公式이지만,  $\beta$ 角이 Stereoscopic perspective angle 과 같을 경우 즉 立體모델에서 假想의 角에 생기는 過高感을 補正한 角과 같은 경우와  $\vec{NU}$  대신에 그림 1 에서 立體모델의 S 點으로부터 K 點을 통하는 走向線까지의 距離 즉 SH를 使用할 경우에는 立體모델에 대해서도 成立한다.

2.2. 數學的 모델에 의한 方法

2.2.1. 絶對座標 處理方法

한 쌍의 立體寫眞은 각기 寫眞의 光軸이 거의 平行하고 基線에 直交되는 露出點을 가져야만 되는데, 이 경우 데이터處理에는 두가지의 技術的인 方法이 있다<sup>(1)</sup>.

1) 半解析的 方法

여기서는 한쌍의 立體寫眞이 精密立體圖化機上에서 相互標定을 거쳐 3次元立體모델座標로 測定된다. 다음에 렌즈歪曲收差, 필름伸縮, 扁平度 등을 補正하기 위한 變換方程式은 다음의 觀測方程式을 利用한다.

$$\begin{aligned} X' &= x' + a_1 + a_2x' + a_3y' + a_4x'y' + a_5x'^2 \\ &\quad + a_6y'^2 + a_7x'y'^2 + a_8x'^2y' \\ Y' &= y' + b_1 + b_2x' + b_3y' + b_4x'y' + b_5x'^2 \\ &\quad + b_6y'^2 + b_7x'y'^2 + b_8x'^2y' \\ Z' &= z' + c_1 + c_2x' + c_3y' + c_4x'y' + c_5x'^2 \\ &\quad + c_6y'^2 + c_7x'y'^2 + c_8x'^2y' \end{aligned} \quad (10)$$

여기에서  $X', Y', Z'$ 는 調整된 모델座標  $x', y', z'$ 는 測定된 모델座標  $a_1 \dots, b_1 \dots b_8, c_1 \dots c_8$ 은 計算해야 할 係數이다.

基準點座標가 8點 以上이라면, 이 方程式은 원하는 모델 係數를 이끌어내는 最小제곱법을 適用하므로써 解를 구할 수 있다.

모든 點들에 대한 絶對座標를 얻기 위해서는 다음의 3次元 相似變換이 이루어져야 한다.

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

여기에서  $X, Y, Z$ 는 絶對座標

$X', Y', Z'$ 는 調整된 모델座標

$X_0, Y_0, Z_0$ 는 변이백터량

S는 縮尺

$a_{11}, \dots, a_{33}$ 는 3×3 標定 matrix의 要素이다.

모델에서 3次元 空間座標를 얻은 후, 가장 適切한 平面을 얻기 위해 最小제곱법이 利用되는 데, 다음의 一般平面方程式이 觀測方程式으로 利用된다.

$$P_1X + P_2Y + P_3Z = 1$$

여기에서  $P_1, P_2, P_3$ 는 計算되어질 係數

$X, Y, Z$ 는 空間座標이다.

2) 解析的 方法

이 解法은 精密座標測定機로 모든 基準點座標와 標定點座標를 測定한 후 寫眞座標로 變換한다. 다음에 單寫眞 Resection program이 각 露出點의 外部標定要素( $\omega, \phi, \kappa, X_0, Y_0, Z_0$ )를 計算하는 데 適用된다.

空間 Resection에 대해서는 여러가지 數學的인 解法이 있으나, 基準點들이 寫眞上의 작은 部分에 偏在되어 있을 때 最適의 解法으로 인정되는 "Cosine"法이 주로 利用된다<sup>(15)</sup>.

마지막 段階는 각 모델點들에 대한 絶對座標를 空間 Intersection program을 利用하여 구한다. 이 絶對座標로부터 平面式의 係數는 半解析的인 方法에서와 같은 方式으로 구한다.

2.2.2. 平面方程式으로부터 傾斜, 走向公式의 誘導

走向은 水平面과 傾斜面에 관한 接觸線의 方位이며, 傾斜는 傾斜面과 水平面에 의한 最大高度角이다.

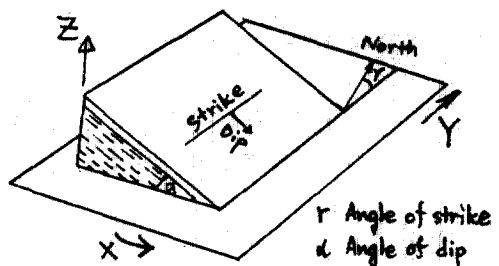


그림 4. Orientation of inclined surface.

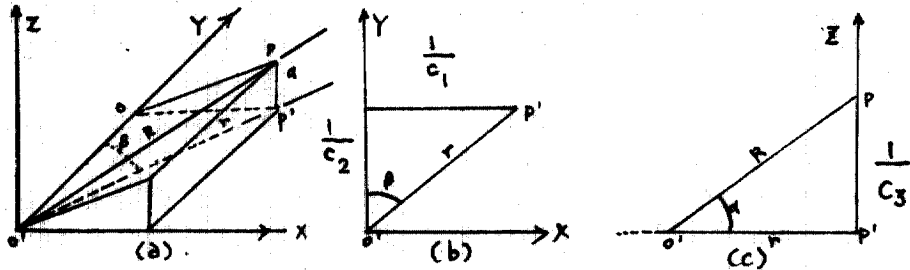


그림 5. 3-dimensional analysis of inclined surface.

平面的 一般式은 다음과 같이 表現된다.

$$AX+BY+CZ+D=0$$

$$\text{또는 } P_1X+P_2Y+P_3Z=1 \quad (12)$$

여기에서  $P_1, \dots, P_3$ 는 係數로서 絕對標定을 거친 基準點座標를 代入하여 最小제곱법으로 구한다.

그림 5. (a)에서 3次元座標( $X, Y, Z$ )를 갖는  $P$ 點을 택하면, 그 때의 벡터  $\vec{R}$ 은  $Z=0$ 인  $x, y$  平面에 벡터  $\vec{r}$ 로 投影된다.

(12)式에  $Z=0$ 를 代入하면,

$$P_1X+P_2Y=1$$

이 되며  $P$ 點의  $x, y$  값을 구하기 위해  $x=0, y=0$ 를 代入하면

$$x=0 \text{ 일 때 } y=\frac{1}{P_2}$$

$$y=0 \text{ 일 때 } x=\frac{1}{P_1}$$

이 된다.

따라서 그림 5. (b)에서 走向은

$$\tan \beta = \frac{1/P_1}{1/P_2} = \frac{P_2}{P_1}$$

$$\beta = \tan^{-1} \left( \frac{P_2}{P_1} \right) \quad (13)$$

가 된다.

(13)式은 子午線이  $y$ 축과 일치하다고 假定한 것으로, 實際觀測에서는  $y$ 축의 方位角을 알아야 한다.

다음에는 傾斜角을 구하기 위해 그림 5. (c)에서 3角形  $PO'P'$ 를 考慮하면  $z$  값은  $\frac{1}{P_3}$ 이므로,

$$\tan(\alpha) = \frac{\frac{1}{P_3}}{|\vec{r}|} = \frac{1}{P_3} \times \frac{P_1P_2}{(P_1^2+P_2^2)^{1/2}}$$

따라서

$$\text{傾斜}(\alpha) = \tan^{-1} \left[ \frac{P_1P_2}{P_3} (P_1^2+P_2^2)^{-1/2} \right] \quad (14)$$

이 成立된다.

### 3. 結 論

本論文은, 傾斜진 面의 傾斜와 走向을 決定하는 데 있어서 寫眞測定技法을 導入하는 理論的 考察로서, 誘導된 公式에는 다음과 같은 特徵이 있다.

1. 3角法에 의한 幾何學的 모델은 判讀과 동시에 視差測定機와 Scale로써 簡單히 傾斜度를 測定할 수 있어, 航空寫眞에 의한 넓은 地域의 判讀時 效果的이다.

2. 平面方程式에 의한 數學的 모델은 標定過程을 거친 3次元座標들을 입력하여 傾斜와 走向을 計算할 수 있으므로, 모든 地形條件에 可能하며 地上寫眞測量的 活用 및 DTM에 效果的으로 利用될 수 있다.

3. 本論文에서 考察된 幾何學的 및 數學的 모델에 의한 傾斜地形의 解析方法은 地質, 土地 利用調查 및 路線과 같은 土木計劃은 물론이고 防災工學 및 軍事的인 側面에서도 效用성이 매우 클 것으로 思料된다.

### 參 考 文 獻

1. Brandow, V.D., Karara, H.M., Damberger, H. H., & Krausse, H.F., "A Non-Metric Close-Range Photogrammetric System for Mapping Geologic Structures in Mines", *P.E. & R.S.*, Vol. 42, No.5, 1976, pp.637~648.
2. Soliman, A.H., "Accuracy and Application", *P.E.*, Vol. 37, No.8, 1971, pp.879~884.

3. Ghosh, S.K., *Analytical Photogrammetry*, Pergamon Press, 1979, pp.126~130.
4. Zhalkov, S.I., *Military Topography Manual*, Military Publication No. 5-4947, 1973, pp.98~118.
5. Rogers, B.W., *Terrain Analysis*, Department of the Army, FM 21-33, 1978.
6. Attewell, P.B., & Farmer, I.W., *Principles of Engineering Geology*, Chapman and Hall, 1976, pp.720~813.
7. Ricci, M., "Dip Determinations in Photogeology", *P.E. & R.S.*, Vol. 48, No.3, 1982, pp.407~414.
8. Lattman, L.H., & Ray, R.G., *Aerial Photographs in field Geology*, Holt, Rinehart and Winston, 1965, pp.148~161.
9. Hadjitheodorou, C., "Elevation from Parallax Measurements", *P.E.*, Vol.29, No.1, 1963, pp.840~849.
10. Allum, J.A.E., "Proofs and uses of some formulae for the measurement of height differences and dips on aerial photographs by elementary methods", *Trans. Instn. Min. Metall.*, 78:B, 1969, pp.108~113.
11. A.S.P., *Manual of Photographic Interpretation*, 1960, p.280.
12. A.S.P., *Manual of Remote Sensing*, Vol.2, 1975, p.1191.
13. Bent, E., "Dip estimation for photogeology", *P.E.*, Vol.35, No.12, 1969, pp.1225~1227.
14. Karara, H.M., *Handbook of Non-Topographic Photogrammetry*, A.S.P., 1979, pp.75~96.
15. Veress, S.A., "Measurement of Structural Deformation of Electric Transmitting Towers", *FIG, International Congress*, Montreux, Switzerland, 1981, pp.604. 1/1-10.
16. Jassem, K.I., & Scherz, J.P., "Terrestrial Photogrammetry as a Tool for Archaeoastronomical Investigation", *ACSM-ASP Fall Convnetion*, 1982, pp.221~230.

(接受 : 1983. 8. 23)