Journal of the KSQC
Vol. 11, No. 1, 1983

製品 寿命 試験의 應用과 擴張
—Expansions and Applications of Item Life-time Testing—

李 昌 鎬*

ABSTRACT

This paper studies item-life test plans with the specified item mean life T_1(MTBF) – Producer's risk α and item mean life T_2 (MTBF, $T_2 < T_1$) – Consumer's risk β when the probability of item survival follows the Weibull distribution (known shape parameter) as a expansion of [1].

And Operating Characteristic Curves and Average Life-testing Times of item-life test plans are computed for this paper and [1]. Cost analysis procedures are same as [1].

These results are computed by using computer program written in Level II Basic for Apple II Plus Micro-computer.

Both this paper and [6] reduce the life-testing time for Weibull distribution in comparision with Exponential distribution, but results of [6] were computed for different criterions from this paper.

1. 서 론

이제는 품질관리(Quality Control)라고 하면 기업체에 종사하는 최고 경영자에서 공정의 모든 작업자에게 누구에게나 개념과 방법론 등을 알 수 있게 되었다. 이에서 한 걸음 더 나아간다면 품질보증, 사용에 따른 신뢰성의 제고 등에 대해서 앞으로는 더욱 관심을 집중시켜야 될 때이다.

본 연구에서는 이러한 신뢰성 문제 중의 한 분야인 제품의 평균수명시간에 대해서 다루어 보았다. [1]에서는 제품수명시간이 지수분포(Exponential distribution)를 따를 때, T_1(생산자 위험 평균수명) — α(생산자 위험), T_2 (소비자 위험 평균수명) — β(소비자 위험)에 의해서 평균수명시간을 보장해 줄 수 있는 수명시험계획을 샘플링 검사(Sampling inspection)이론에 입각해서 구하여 보았다. [1]의 연구결과를 제품의 수명이 Weibull slope(혹은 Shape parameter) 값을 알고 있는 Weibull 분포를 따를 때의 수명시험계획에로 확장한 것을 본 연구에서는 다루어 보았다. 이의 확장은 Weibull 분포와 지수분포의 관계식에 의해서 유도되었다.[2]

어떤 제품의 수명시간이 Weibull 분포를 따름을 보일 수 있는 방법은 다음을 들 수 있겠다.[3]

첫번째로 χ^2 (Chi-square)검사와 같은 통계

*仁荷大學校 産業工學科 助敎授

적 방법 등이 있으나 많은 양의 검사 data가 필요하다.[4] 이 방법은 공학적인 문제들에 대해서는 한계가 있다.

두번째로 위의 통계적 방법을 적은 양의 data로 수행할 수 있게끔 변화시킨 중앙순위(Median rank) 개념에 의한 Weibull 확률용지 방법을 사용할 수 있겠다.[5]

위의 두번째 Weibull 확률용지 방법을 적용하면 몇 개(5개～30개)의 data만 이용하여 Weibull 분포를 따름을 확인할 수 있고 더 나아가서 Weibull slope 값을 추정할 수 있다. 이러한 Weibull분포가 다른 분포함수보다도 공학적인 문제에 훨씬 유용하게 많이 쓰이는 이유중의 하나는 Weibull 분포를 갖는 확률변수의 data들을 Weibull 확률용지에 찍어보면 직선으로 나타나며, 이 직선에 의해서 parameter값들을 결정할 수 있으며, 이와 관련된 많은 문제의 해를 얻을 수 있다. 다른 이유는 순간고장률(Failure rate)이 실제로 많은 제품의 특성인 시간에 대한 Power function(Failure rate $\propto t^n$)으로 표시된다는 점이다. 특히, Weibull 분포는 기계의 Bearing과 같은 사용에 따라 마모하는 부품의 수명특성을 잘 표현하며, 이러한 부분품의 집합체인 System의 수명특성은 지수분포로 표시하는 것이 일반적이다.

또한, [1]의 연구결과 이외에 다음을 유도하여 계산했다.

(1) 지수분포나 Weibull 분포이거나 수명시험 계획과 관계있는 검사특성곡선(Operating Characteristic Curve; OC curve)을 구하여 보았으며, 이는 검사에 제시되는 제품의 평균수명 변화에 따른 수명시험계획에서의 채택확률 변화를 보여주는 것이다.

(2) 각 수명시험 계획에 의해서 수명시험에 임했을 때, 검사에 제시되는 제품의 평균수명의 변화에 따른 그 제품의 Lot가 채택·기각될 때까지의 평균 수명시험시간(Average life-testing time; ALTT)의 변동을 살펴보았다.

[1]에서 시도해 보았던 비용분석(Cost Analysis) 문제는 이번 연구에서도 같은 방법으로 적용하였다. [1], [7]

지수분포에 대한 지금까지의 연구는 [1]의 참고문헌에 나와 있으며, Weibull 분포에 대해서는 [6]에 일례가 나와있다. [6]에서는 지수분포에 대한 수명시험 계획은 마감시간이 많이 걸려서 출하나 납기에 맞추지 못하든지, 많은 비용이 든다는 난점을 들어서 Weibull slope가 1보다 작을 때에는 수명시험 시간의 마감시간을 줄일 수 있다는 결론을 내리고 있다. 다만, 본 연구와 [6]의 연구가 다른 점이라면 본 연구에서는 $T_1-\alpha$, $T_2-\beta$를 고려하지만 [6]에서는 신뢰수준 90%로 MTBF보증과 $t=10^3$(Hr)에서는 순간고장률 λ를 보증하려 한다는 점이다. 본 연구와 [6]에서는 수명시험 계획에 의해서 만족시키려는 관점만 다르고 공통적으로 Weibull분포에 적용시키고 결론은 Weibull slope가 1보다 작은 경우는 지수분포에 비해 훨씬 수명시험 시간을 단축시킬 수 있다는 점을 들 수 있겠다. 또한, [8]에서 Meeker와 Nelson은 Weibull 분포에 대해서 가속화 된 수명시험(Accelerated Life-tests)을 다루고 있다.

2. 수명시험 계획

제품의 수명이 Parameter가 λ인 지수분포를 따르면 고장밀도함수 $f(t)$와 신뢰성 $R(t)$는 다음과 같다.

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0 \qquad (1)$$

$$R(t) = e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0 \qquad (2)$$

이러한 지수분포의 고장률 λ는 시간에 관계없이 일정하며, $[0, t]$시간 사이에 발생되는 고장수 m의 분포는 Parameter가 λt인 Poisson 분포임을 알 수 있는 바 이를 이용하여 [1]의 결과가 유도되었다.

제품의 수명이 Weibull 분포를 따를 때 고장밀도함수 $f(t)$와 신뢰성 $R(t)$는 다음과 같다.

$$f(t) = abt^{a-1} \cdot e^{-bt^a}, \quad t \geq 0 \qquad (3)$$

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - \int_0^t abx^{a-1} \cdot e^{-bx^a} dx$$

$$= e^{-bt^a}, \quad t \geq 0 \qquad (4)$$

여기서 a는 Weibull slope(혹은 Shape parameter)

b는 Scale parameter이다.

또한 고장률 $h(t) = f(t)/R(t) = abt^{a-1}$과 같이 시간에 대해서 power function으로 표시된다.

지수분포와 Weibull분포 사이의 관계는 다음과 같다. 고장밀도함수 (1)과 (3)에서 알 수 있듯이 Weibull분포의 특수한 경우($a=1$)로서 지수분포를 나타낼 수 있다.

또한, 확률변수 X가 shape parameter a, scale parameter b인 Weibull분포를 따르면 변수변환과정을 통하여서 확률변수 $Y = X^a$는 parameter가 b인 지수분포를 따르게 된다.

즉, $P(X \leq x) = e^{-bx^a}$

또는, $P(Y = X^a \leq x^a) = e^{-bx^a}$가 된다.

그러므로 (4)식에 의해서 주어진 식은 시간 축적을 약간 변화시켜 주면 (2)식에 의해서 쉽게 구해질 수 있다.

이번 연구의 과정도 이러한 Weibull분포와 지수분포의 관계식을 이용한다. Shape parameter를 아는 Weibull분포를 따르는 제품 수명을 Weibull 확률변수 X로 하고 생산자 위험(Producer's risk) α, 이때의 제품 평균수명 T_1(MTBF), 소비자 위험(Consumer's risk) β, 이때의 제품 평균수명 T_2(MTBF)가 주어졌다 하자. 이러한 Weibull 확률변수를 지수확률변수 $Y = X^a$로 변화하면 생산자 위험 α, T_1^a, 그리고 소비자 위험 β, T_2^a로 변화시켜서 생각할 수 있겠다. 이상을 (1)의 과정에 적용시키면 다음과 같다.

$$P(\text{MTBF}_1 = T_1)$$

$$= \sum_{m=0}^{c} e^{-t \cdot \lambda_1} \cdot (t \cdot \lambda_1)^m / m!$$

$$= \sum_{m=0}^{c} e^{-t/T_1^a} \cdot (t/T_1^a)^m / m! \quad \cdots\cdots (5)$$

$$= 1 - \alpha$$

$$P(\text{MTBF}_2 = T_2)$$

$$= \sum_{m=0}^{c} e^{-t/T_2^a} \cdot (t/T_2^a)^m / m! \quad \cdots\cdots (6)$$

$$= \beta$$

여기서 c는 합격판정 갯수(Acceptance number), t는 수명시험시간(Life-Testing Time)을 나타낸다. (5)와 (6)식을 만족하는 합격판정 갯수 c와 수명시험시간 t를 결정하면 (T_1, α), (T_2, β) 조건에 의한 수명시험계획을 수립할 수 있다. 본 연구에서는 (5), (6) 식을 만족하는 c와 t를 구할 때, [1]의 방법을 사용하였다.

3. 검사특성곡선(Operating Characteristic Curve)

2.의 과정에서 구하여진 수명시험에 대한 검사특성 곡선을 구하여 보면 다음과 같다. 평균수명(MTBF)이 t인 제품이 수명시험을 통과할 확률은

$P(t) = \sum_{m=0}^{c} P_m(t)$로 구할 수 있다.

여기서 $P_m(t)$는 평균수명이 t인 제품이 수명시험시간 동안 m개의 고장이 발생할 확률이다.

(1) 지수분포의 경우

$$P(t) = \sum_{m=0}^{c} P_m(t)$$

$$= \sum_{m=0}^{c} e^{-T/t} \cdot (T/t)^m / m! \quad --- (7)$$

단, T는 수명시험시간
C는 합격판정갯수

(2) Weibull분포의 경우

$$P(t) = \sum_{m=0}^{c} P_m(t)$$

$$=\sum_{m=0}^{c} e^{-T/t^{a}} \cdot (T/t^{a})^{m} / m! \quad (8)$$

단, a는 Weibull 분포의 Weibull slope
이러한 검사특성곡선을 여러 수명시험계획에 대해서 계산·비교·검토하여 요구하는 품질수준 즉, 평균수명에 대한 여러 가지 정보를 얻을 수 있겠다.

4. 평균수명 시험시간(Average life testing time)

2회 또는 다회 샘플링 검사에서 계산할 수 있는 평균검사갯수(Average sample number)와 같은 개념으로서 수명시험계획에 대해서 평균수명 시험시간(Average life testing time: ALTT)를 정의할 수 있겠다.

ALTT를 계산하는데 있어서 본 연구에서는 수명시험을 다음과 같이 수행한다고 가정한다.

i) 수명시험시간 T, 합격판정갯수 C에 의해서 수명시험을 수행한다.

ii) 수명시험시간 T 이전에 $(C+1)$개 이상의 고장이 발생하면 그 시점에서 시험을 중단하고 제출된 제품을 기각한다.

iii) 수명시험시간 T까지 C개 이하의 고장이 발생하면 제출된 제품을 받아들인다.

(1) 지수분포의 경우

위의 시험조건 하에서 수명시험을 수행할 때, 제품 평균수명이 t인 경우의 ALTT(t)를계산하면 다음과 같다.

ALTT(t) = {T까지 시험해서 채택되는 경우} + {T 이전에 기각이 되는 경우}

$$= T \cdot \sum_{m=0}^{c} P_m(t)$$

$$+\frac{1}{T}\int_0^T x \cdot \left[1-\sum_{m=0}^{c} P_m(t)\right] dx \quad (9)$$

$$= T \cdot \sum_{m=0}^{c} \frac{e^{-T/t} \cdot (T/t)^m}{m!}$$

$$+\frac{1}{T}\int_0^T x \cdot dx$$

$$-\frac{1}{T}\int_0^T x \left\{\sum_{m=0}^{c} \frac{e^{-x/t} \cdot (x/t)^m}{m!}\right\} dx$$

여기서

$$A=\int_0^T x \cdot \left\{\sum_{m=0}^{c} \frac{e^{-x/t} \cdot (x/t)^m}{m!}\right\} dx$$

$$=\sum_{m=0}^{c} \int_0^T x \frac{e^{-x/t} \cdot (x/t)^m}{m!} \cdot dx$$

$$=\sum_{m=0}^{c} \frac{t}{m!} \cdot \int_0^T e^{-x/t} \cdot (x/t)^{m+1} dx \quad (10)$$

Gamma 분포에서

$$\int_0^x f_X(t; r, \lambda) dt$$

$$=\int_0^x \frac{\lambda}{\Gamma(r)} \cdot (\lambda t)^{r-1} \cdot e^{-\lambda t} dt$$

$$= 1-\sum_{j=0}^{r-1} e^{-\lambda x} \cdot (\lambda x)^j / j!$$를

이용하면, 위의 (10)식은 다음과 같다.

$$A=\sum_{m=0}^{c} \frac{t}{m!} \cdot \frac{\Gamma(m+2)}{1/t} \cdot$$

$$\left[1-\sum_{j=0}^{m+1} \frac{e^{-T/t} \cdot (T/t)^j}{j!}\right]$$

$$=\sum_{m=0}^{c} \frac{t^2 \cdot \Gamma(m+2)}{m!} \cdot$$

$$\left[1-\sum_{j=0}^{m+1} \frac{e^{-T/t} \cdot (T/t)^j}{j!}\right]$$이 된다.

여기에서 $\Gamma(t)$는 Gamma 함수로서

$\Gamma(t)=\int_0^\infty x^{t-1} \cdot e^{-x} dx$, $t>0$이며, 또한,

n가 정수일 때에는 $\Gamma(n+1)=n!$이다.

그러므로

$$\mathrm{ALTT}(t) = T \cdot \sum_{m=0}^{c} \frac{e^{-T/t} \cdot (T/t)^m}{m!}$$

$$+ \frac{1}{2} T - A/T \quad \text{------------ (11)}$$

에 의해서 계산된다.

(2) Weibull 분포의 경우

(9)식에 Weibull 분포의 과정을 같은 방법으로 적용하면 다음과 같이 ALTT(t)에 대한식을 얻을 수 있다.

$$\mathrm{ALTT}(t) = T \cdot \sum_{m=0}^{c} \frac{e^{-T/t^a} \cdot (T/t^a)^m}{m!}$$

$$+ \frac{1}{2}T - \frac{1}{T} \cdot \sum_{m=0}^{c} \frac{t^{2a}\, \Gamma(m+2)}{m!}$$

$$\times \left[1 - \sum_{j=0}^{m+1} \frac{e^{-T/t^a} \cdot (T/t^a)^j}{j!} \right] \quad \text{---------------- (12)}$$

5. Weibull 분포에의 적용에와 OC곡선과 ALTT

Weibull 분포에 대한 수명시험 계획, 그에 대한 OC곡선과 ALTT를 다음에 대해서 구해 보았다.[9]

생산자 위험 $\alpha = 10\,\%$, 이때의 평균수명 (MTBF)은 10,000 (hr)

소비자 위험 $\beta = 5\,\%$, 이때의 평균수명 (MTBF)은 1,820 (hr)

위의 조건을 만족시키는 수명시험계획을 Weibull slope가 0.7일 때의 Computer program 수행 결과가 [Table 1]에 주어졌고.

[Table 1]

```
==========================================
GIVEN DATA
==========================================
MEAN LIFE OF PRODUCER'S RISK IS 10000
PRODUCER'S RISK(I.E. ALPHA) IS .1
***SHAPE PAR. OF WEIBULL DIST.(BETA)=.7***
MEAN LIFE OF CONSUMER'S RISK IS 1820
CONSUMER'S RISK(I.E. BETA) IS .05
THE RANGE OF ACCEPT PROB OF EACH RISK IS 5
TEST COST/HR IS 100WON
PART UNIT COST IS 50WON
TEST FIXTURE COST/UNIT IS 500WON
============================================================================
 #  ACCEPT-#  TEST-HR      BETA          ALPHA        OPT-NO  OPT-COST
============================================================================
 1      0        IT DOESN'T EXIST THE EXPERIMENT DESIGN
============================================================================
 1      1        IT DOESN'T EXIST THE EXPERIMENT DESIGN
============================================================================
 1      2        IT DOESN'T EXIST THE EXPERIMENT DESIGN
============================================================================
 1      3        IT DOESN'T EXIST THE EXPERIMENT DESIGN
============================================================================
 1      4        IT DOESN'T EXIST THE EXPERIMENT DESIGN
============================================================================
 1      5     2000     .0519627501   .101993728     19     20976.3159
 2      5     2050     .0446138103   .111073304     19     21239.4737
============================================================================
```

Weibull slope 값을 0.4에서 1까지 변화시켰을 때 얻어진 결과가 〔Table 2〕에 나와 있다.

본 연구의 결과와 [6]에서 다른 관점으로부터 얻어진 결과를 비교하기 위해서 다음 〔Table 3〕에 [6]의 결과를 나타냈다.

본 연구에서 얻어진 각 시험계획에 대한 검사특성곡선과 평균 수명시험시간의 한 예가 〔Table 4〕에 주어져 있다.

$x-y$ 좌표 상에서 횡축은 제품의 MTBF, 종축은 〔Table 4〕의 값을 나타내면 OC curve와 ALTT curve를 얻을 수 있다.

〔**Table 2**〕 Summary of Computer Program results when Weibull slope varies from 0.4 to 1.0 (i.e. exp. distribution).
Producer's risk (α) = 10%, MTBF of Producer's risk = 10,000 (hr)
Consumer's risk (β) = 5%, MTBF of Consumer's risk = 1,820 (hr)

Weibull slope	Acceptance #	Test-hr	β	α	Opt.#of Items	Opt. Cost
0.4	16	480 - 490	0.049-0.06	0.104-0.119	9	10283-10394
	17	505 - 520	0.044-0.059	0.093-0.113	10	10550-10700
	18	530 - 545	0.043-0.058	0.083-0.101	10	10800-10950
	19	565 - 570	0.043-0.047	0.085-0.099	10	11150-11200
	20	595	0.042	0.081	10	11450
0.5	10	710 - 720	0.052-0.058	0.106-0.113	11	12505-12595
0.6	7	1160 - 1220	0.041-0.059	0.097-0.119	15	15983-16383
	8	1300 - 1340	0.041-0.051	0.088-0.099	15 - 16	16917-17175
0.7	5	2000 - 2050	0.045-0.053	0.102 0.111	19	20976-21239
0.8	4	3600 - 3850	0.04-0.059	0.08 - 0.1	26	28146-29107
0.9	3	6450 - 6900	0.041-0.059	0.082-0.098	34 - 35	37671-38964
1.0	2	11500	0.049	0.11	46	50300

〔**Table 3**〕 Results from [6]
(1) Life testing time that significance level is 0.1 at each MTBF. (Acceptance # = 1)
(2) Life testing time that a failure rate $\lambda(t)$ is assured at $t = 10^3$ (hr). (Acceptance # = 1)

Weibull slope	MTBF (hr)			λ (%/10^3 hr)		
	10^4	10^5	10^6	5	1	0.5
1/3	6×10^3 (hr)	12×10^3 (hr)	22×10^3 (hr)	$\frac{77}{3}\times10^3$ (hr)	$\frac{390}{3}\times10^3$ (hr)	$\frac{778}{2}\times10^3$ (hr)
1/4	10×10^3	28×10^3	90×10^3	$\frac{77}{2}\times10^3$	$\frac{390}{2}\times10^3$	$\frac{778}{2}\times10^3$
1	38×10^3	390×10^3	3891×10^3	77×10^3	390×10^3	778×10^3

〔**Table 4**〕 Example of OC curve and ALTT curve values Weibull slope = 0.7
$\alpha = 0.1$, MTBF = 10,000 (hr) ; $\beta = 0.05$, MTBF = 1,820 (hr)

```
=========================================
INPUT DATA
=========================================
PRODUCER'S RISK IS .101993728
CONSUMER'S RISK IS .0519627501
ACCEPTANCE # IS 5
REQUIRED TEST TIME IS 2000
=========================================
```

ITEM-MTBF	ACCEPT-PROB	ALTT
1000	1.49973125E-03	836.866933
2000	.0759090006	742.474353
3000	.256782609	904.130116
4000	.442491395	1142.55315
5000	.599776737	1353.0882
6000	.697397264	1514.86379
7000	.774294458	1633.91271
8000	.829277101	1720.68169
9000	.86897063	1784.18027
10000	.888006272	1831.10255
11000	.918549023	1866.1913
12000	.935750997	1892.76087
13000	.948121649	1913.12925
14000	.9576702	1928.92921
15000	.965132577	1941.32268

6. 결 론

본 연구의 결과를 연구 (1)의 결과와 비교하여 보면, 지수분포의 수명시험 계획과 Weibull 분포의 수명시험 계획의 차이점은 같은 α, T_1, β, 그리고 T_2의 조건하에서 수명시험시간이 Weibull slope 값이 1보다 작아짐에 따라 크게 작아짐을 들 수 있겠다. 또한, 검사특성 곡선과 평균수명시험시간 곡선을 검토하여 여러 수명시험계획 중에서 수명시험시간이나 수명시험에 필요한 제품의 갯수 등에 따른 비용과 납기에 맞추어야 된다는 필요성에 의한 시간 그리고 생산자와 소비자의 주 관심대상인 α, MTBF : β, MTBF 등의 관점에 의해서 주어진 조건에 적합한 수명시험 계획을 선택할 수 있겠다.

끝으로 본 연구를 위해서 연구비를 지원해 준 인하대학교 산업과학기술연구소에 감사한 마음을 표한다.

국 문 요 약

본 연구에서는 제품의 수명시험을 수행하는 데 있어서 수명이 지수분포를 따를 때의 결과를 〔1〕 제품의 MTBF가 T_1인 경우, 검사에 통과될 확률 $1-\alpha$ (α는 생산자 위험), 제품의 MTBF가 T_2인 ($T_1 > T_2$) 경우, 검사에 통과될 확률 β (β는 소비자 위험)로 하여 수명이 Weibull 분포 (Shape Parameter를 알고 있을 때)를 따를 때에로 확장하였다. 또한, 수명시험과 관계있는 검사특성곡선(OC curve)과 평균수명시험시간(Average Life Testing Time)을 구해 보았다. 비용분석은 〔1〕의 과정을 그대로 활용하였다. 위의 전 과정은 Level Ⅱ Basic Language로 Programming 하여 Micro-Computer를 이용하여 계산하였다. 본 연구와는 다른 관점에서 Weibull 분포의 수명시험계획을 다루었던 〔6〕의 결과는 모두 같은 방향 - 지수분포에 비해 수명시험시간의 절감 - 으로 귀결되었음을 알 수 있다.

參 考 文 獻

1. 李昌鎬, "생산자 위험 α와 소비자 위험 β를 고려한 수명시험계획과 비용분석(I)", 인하대학교 산업과학기술연구소 논문집 제 10집, 1982. 6, pp. 59 ~ 66.
2. Cox D.R., Renewal Theory, Methuen and Co., Ltd., London, 1961, pp 20-22.
3. 박경수, 신뢰도 공학 및 정비이론, 탑출판사, 1978. pp. 173 ~ 203.
4. Mood A.M., Graybill F.A., and Boes D.C., Introduction to the theory of Statistics, 3rd ed, McGraw-Hill, 1974, pp. 442-448.
5. Kapur K.C., and Lamberson L.R., Reliability in Engineering Design, John Wiley and Sons, 1977, pp. 291-340.
6. 鹽見弘(한국규격협회 역), 신뢰성입문, 1976, pp. 173 ~ 176.
7. Taub T.W., "Minimizing Life Test Cost", IEEE Trans. on Rel., Vol. R-20, No. 2, May, 1971, pp. 84-85.
8. Meeker W.Q., and Nelson W., "Optimum accelerated Life-Tests for the Weibull and Extreme Value Distributions", IEEE Trans. on Rel., Vol. R-24, No. 5, Dec., 1975, pp. 321-332.
9. 李昌鎬, , "APPLE II-PLUS Micro-Computer Level II Basic Programming", Unpublished note, 1983.