

# $\bar{X}$ -chart의 經濟的 파라메터 設定에 관한 研究 —A Study on determination of the economic Parameter in $\bar{X}$ -control chart—

韓 柄 敦\* 黃 義 徹\*\*

## ABSTRACT

The main factors of determining the Control Line of the Control Chart can be classified as follows: 1) sample size ( $n$ ), 2) the factor that determines the spread of Control Limits ( $B$ ), (3) sampling frequency ( $h$ ). The determination of these factors can be explained according to the extent that occurrences of assignable cause should be detected.

The purpose of this paper are two: one is for composing a model of which use should be designated for economic decision on the size of these factors leading to the Control Line of the Control Chart, the other is about what influence increasing or decreasing condition, according to changeability of the size of these factors, of expect cost can have on the economy when the Control Chart is used.

## I. 序 論

管理圖는 W. A. Shewhart 박사가 창안하여 論文으로 그 理論을 발표한 이래 品質管理에 있어 가장 效果가 큰 技法의 하나로 사용되어 왔다.

Shewhart 박사는 自然現象의 관찰을 통해 統計的 現象인 散布 (fluctuation)와 分布 (distribution)에 대한 概念을 確立하고, 이를 바탕으로 하여 工程에서 採取된 品質 데이터의 變動을 正常的인 것과 非正常的인 것으로 구분할 수 있는 管理限界的 설정을 可能하게 하였다.

Shewhart 박사가 창안한 管理圖는 주로 工程의 統計的 安定狀態의 確認과 工程의 連續的 管理를 유지하기 위해 사용된다.

管理圖의 管理線(中心線과 管理限界線)을 결정하는 要素로는 샘플의 크기( $n$ ), 管理限界的 幅을 결정하는 要素( $B$ ), 샘플링頻度( $h$ ) 등이 있는데, Shewhart 박사는 이 要素들에 대한 적정 범위를 다음과 같이 提示하였다.

- 1) 샘플의 크기: 4 ~ 5개 ( $\bar{X}-R$  Chart에 있어)
- 2) 管理限界線:  $3\delta$ 의 넓이
- 3) 샘플링頻度: 管理圖 사용자에 임의로 결정

그러나 최근 管理線을 결정하는 이들 要素에 대해 管理圖 작성의 目的, 사용에 있어서의 經濟性 등의 측면에서 여러 가지 研究가 활발히

\* 大邱工業專門大學 講師

\*\* 漢陽大學校 工科大學 産業工學科 教授

진행되고 있다.

本 研究의 一次의 目的은  $\bar{x}$ -chart의 파라미터(parameters, 管理線을 결정하는 要素를 의미한다)의 결정을 經濟的 측면에서 考察하는데 두었다. 研究의 方法은 우선 管理線을 決定하는 要素에 대해 몇 가지 假定을 세우고, 이들의 假定에 입각하여 파라미터 결정모형을 確立하고 컴퓨터 처리에 의해 이 모델로부터 목적의 해답을 찾는 方法을 취하려고 한다.

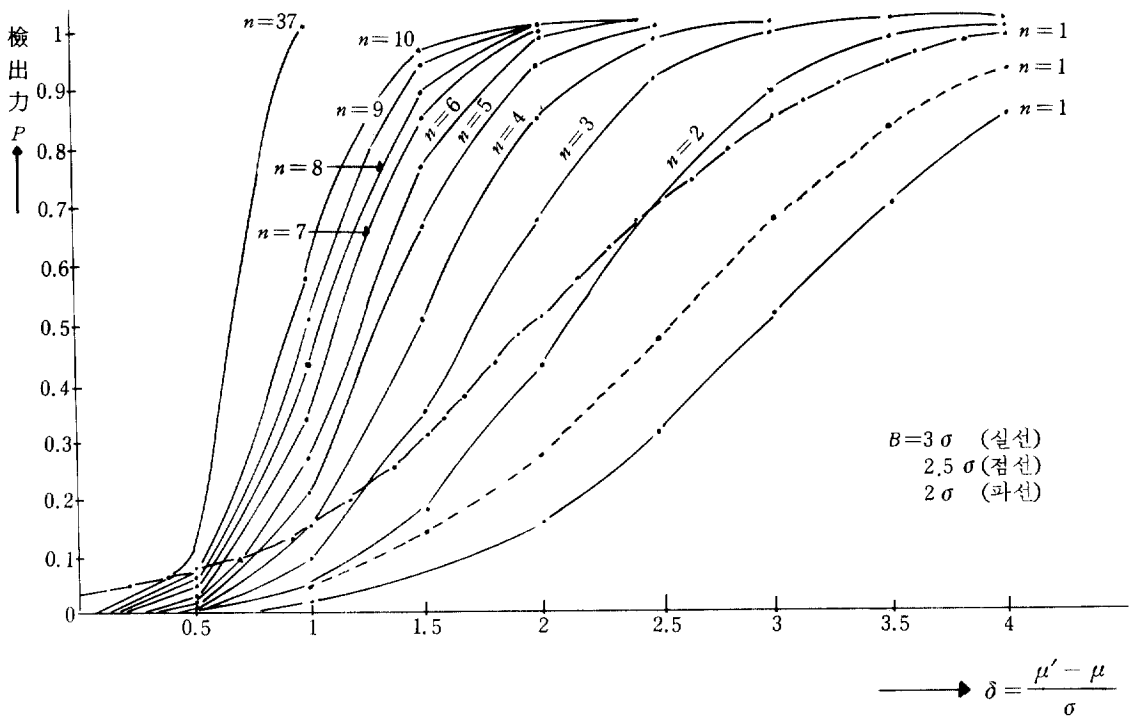
管理線 決定要素에 대한 假定 :

- (i) 異常原因發見의 檢出力을 최대로 한다.
- (ii) 管理圖 作成에 드는 費用을 최소로 한다.
- (iii) 제 1종, 제 2종의 과오(error)를 최소로 한다.

## II. 管理圖의 理論的 背景

品質管理에 있어서 管理圖의 技能은 工程이 統計的으로 安定狀態에 있는가 또는 그렇지 않은가를 “工程 파라미터가 管理값과 같다”는 歸無假說(null hypothesis)을 週期的으로 檢定함으로써 수행된다.

檢定過程은 工程으로부터 採取된 樣本の 品質特性을 測定하여 管理限界와 比較함으로써 이루어지게 된다. 다시 말해서 樣本の 品質特性(예컨대 각 로트를 대표하는  $\bar{x}$ )이 檢定臨界領域(test critical region)에 있게 되면 工程은 統計的으로 不安定狀態에 있다고 판단하고 그렇지 않으면 工程은 統計的으로 安定狀態에 있다고 판단한다.



<Fig.1>  $\bar{x}$ -Chart에 있어 樣本의 크기 n과 檢出力과의 관계

어떤 假說檢定에도 2 種類의 過誤가 發生한다. 第 I 種의 過誤 (Type I Error)는 工程이 安定狀態에 있음에도 불구하고 歸無假說이 棄却되어 버리는 過誤를 말하며, 第 II 種의 過誤 (Type II Error)는 工程이 不安定狀態에 있음에도 불구하고 歸無假說을 採擇하는 過誤를 말한다. 管理圖를 사용하는데 있어서 前者는 可避原因을 찾기 위한 불필요한 工程調査로 인한 損失費用과 可避原因을 찾는 동안 工程을 정지시켰을 때 製品을 生産하지 못하는 데서 오는 損失費用을 發生시키며, 後者는 可避原因의 發生이 檢出될 때까지 不良品을 계속 발생시키게 하므로써 損失을 가져오게 한다.

管理圖를 활용하는 데 있어 第 I 種의 過誤로 인한 費用은 檢定臨界領域의 크기를 줄임으로써 減少될 수 있는데, 이것은 歸無假說이 참일때 採擇하는 確率이 增加되기 때문이다. 그러나 반면에 檢定臨界領域이 좁아지면 第 II 種의 過誤로 인한 費用이 增加하게 된다. 따라서 이들 두 종류의 過誤를 最小로 할 수 있는 點에다 檢定臨界領域을 설정한다면 過誤로 인한 工程管理上的 損失費用이 最小가 될 것이다.

Fig. 1은  $\bar{x}$ -chart에 있어 샘플의 크기  $n$ 에 따른 檢出力曲線을 플로팅(plotting)한 것으로서, 여기서 알 수 있는 바와 같이 샘플의 크기  $n$ 을 增加시키므로써 檢出力  $P$ 는 더욱 增加한다. 그러나  $n$ 이 대체로 10 이상이 되면 檢出力  $P$ 는 매우 근소한 증가를 함을 알 수 있다. 한편  $n$ 을 1로 고정시키고  $B$ 를  $3\delta$ ,  $2.5\delta$  및  $2\delta$ 로 했을 때 이에 대응하는 檢出力은 점점 감소되고 있다. 이상을 종합하여 볼 때 샘플링費用 第 I, II 種의 過誤로 인한 費用, 檢出力 등을 고려하여  $n$ ,  $B$ 를 구하면 管理圖 사용에 있어서의 總期待費用의 最少化를 얻을 수 있다는 確信을 가질 수 있다.

### III. 管理圖 사용에 수반되는 發生費用모 델의 設定

管理圖 사용에 따른 總發生費用  $TC$ 는 다음과 같이 세 가지 費用要素에 의해 構成된다고 假定한다.

여기서, 總發生費用

$$TC = C_s + C_a + C_p \dots\dots\dots (1)$$

$C_s$  = 샘플링 檢査費用

$C_a$  = 第 I 種의 過誤로 인한 總期待 損失費用

$C_p$  = 工程損失費(工程에 可避原因이 發生했는데도 이를 발견하지 못한데서 오는 期待損失費用)

단, 工程에 대해 다음과 같은 假定을 세운다.

(i) 母標準偏差는 변하지 않고 母平均 만이 변화한다. 즉,  $N(\mu, \sigma^2)$ 이  $N(\mu', \sigma^2)$ 이 된다.

(ii) 변화된 工程平均  $\mu'$ 는  $\mu' > \mu$ 이다.

(iii) 工程의 平均移動은  $\delta = \frac{\mu' - \mu}{\sigma}$  로 한다.

다.

費用모델 設定에 앞서 상기 3가지 要素費用에 대해 설명한다.

(1) 샘플링 檢査費用  $C_s$

샘플링 檢査費用 즉,  $C_s$ 는 다음과 같이 두 가지 費用要素로 이루어진다.

$$C_s = C_1 + nC_2 \dots\dots\dots (2)$$

여기서  $C_1$ 은 檢査準備費

$nC_2$ 는 製品檢査費

( $n$ 은 샘플의 크기,  $C_2$ 는 單位當 檢査費)

$C_s$ 와  $n$ 은 線型(linear) 관계를 갖고 있으며,  $n$ 에 따라 單調增加한다.

(2) 工程損失費  $C_p$

工程損失費는 工程에 可避原因이 發生하였는데도 그것을 적시에 檢出하지 못함으로 인한 期待損失費用이다.

$$C_p = C_3 \cdot (1 - P) \text{로 가정한다.}$$

여기서,  $C_3$ : 工程에 可避原因이 발생하였는데도 그것을 적시에 檢出하지 못함으로 인한 單位損失費用

$P$ : 檢出力

考察:  $\bar{x}$ -chart의 管理限界는

$$\left. \begin{aligned} \text{UCL} &= \mu + B \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ \text{LCL} &= \mu - B \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

工程이 正規分布를 한다고 했을 때 母平均 만 이 變化할 경우 檢出力 P는

$N(\mu, \sigma^2) \rightarrow N(\mu', \sigma^2)$ 에서

$$P = Pr \{ \bar{x} \leq \text{LCL} \mid \mu', \sigma \}$$

$$+ Pr \{ \bar{x} \geq \text{UCL} \mid \mu', \sigma \}$$

$$= Pr \{ \bar{x} \leq \mu - B \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \mid \mu', \sigma \}$$

$$+ Pr \{ \bar{x} \geq \mu + B \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \mid \mu', \sigma \} \dots\dots\dots(4)$$

여기서

$$u = \frac{\bar{x} - \mu'}{\sigma/\sqrt{n}}$$

으로 變換하면  $\mu - B \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} & \frac{(\mu - B \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) - \mu'}{\sigma/\sqrt{n}} \\ &= -B + \frac{(\mu - \mu') \sqrt{n}}{\sigma} \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

여기서  $\mu$ 의 變化를

$$\delta = \frac{\mu' - \mu}{\sigma} \text{로 나타내면 (5)式은 } -B - \delta\sqrt{n}$$

이 된다.

$\mu + B \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 도 마찬가지로 되며 (4)式은

$$P = Pr \{ \mu \leq -B - \delta\sqrt{n} \}$$

$$+ Pr \{ \mu \geq B - \delta\sqrt{n} \} \dots\dots\dots (6)$$

와 같이 된다.

그런데 變數  $u$ 는 規準化된 것이므로  $N(\cdot, 1^2)$ 에 따라 그 確率密度는

$$\phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \text{이므로}$$

$$P = \int_{-\infty}^{-B - \delta\sqrt{n}} \phi(u) du + \int_{B - \delta\sqrt{n}}^{\infty} \phi(u) du \dots\dots\dots (7)$$

로 된다.

$$\text{또 } \Phi(u) = \int_{-\infty}^u \phi(u) du \text{라 하면}$$

(7)式은 다음과 같이 된다.

$$P = \Phi(-B - \delta\sqrt{n}) + \Phi(-B + \delta\sqrt{n}) \dots\dots\dots (8)$$

$B, n$ 에 실제값을 부여함으로써 正規分布表를 利用해서 간단히  $P$ 를 구할 수도 있다.

工程에 可避原因이 발생했는데도 이를 檢出하지 못한 確率의 크기는  $1 - P$ 이므로 이것에다  $C_3$ 를 곱하면 工程損失費가 됨을 쉽게 이해할 수 있을 것이다.

$$\text{즉, } C_p = C_3 \cdot (1 - P)$$

$$= C_3 \cdot \left\{ 1 - \left( \int_{-\infty}^{-B - \delta\sqrt{n}} \phi(u) du \right. \right.$$

$$\left. \left. + \int_{B - \delta\sqrt{n}}^{\infty} \phi(u) du \right) \right\}$$

$$= C_3 \cdot \int_{-B - \delta\sqrt{n}}^{B - \delta\sqrt{n}} \phi(u) du \dots\dots (9)$$

(참고 1 : (9)식을 FORTRAN으로 Programming 하기 위해 Error Function 을 利用하였음)

(3) 第 I 種의 過誤로 인한 總期待損失費用  $C_a$

$C_a$ 는 工程이 安定狀態에 있을 때 管理圖 사용에 있어서 第 I 種의 過誤로 인한 總期待損失費用이다.

$\bar{x}$ -chart에 있어 第 I 種의 過誤를 일으킬 確率  $\alpha$ 는

$$\alpha = Pr \left\{ \bar{x} \leq \mu - \frac{B}{\sqrt{n}} \sigma^2 \mid \mu, \sigma \right\} + Pr \left\{ \bar{x} \geq \mu + \frac{B}{\sqrt{n}} \sigma \mid \mu, \sigma \right\} \dots (10)$$

$u = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ 로 變換을 하면,

$$\mu - \frac{B}{\sqrt{n}} \sigma \text{는}$$

$$\frac{(\mu - B\sigma/\sqrt{n}) - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = -B \dots (11)$$

이 되며,  $\mu + \frac{B}{\sqrt{n}} \sigma$ 도 마찬가지로 방법으로  $+B$

가 된다.

그러므로 (10)식은

$$\alpha = Pr \{ u \leq -B \} + Pr \{ u \geq B \} \dots (12)$$

(7)식과 마찬가지로

$$\alpha = \int_{-\infty}^{-B} \phi(u) du + \int_B^{\infty} \phi(u) du \dots (13)$$

$$\alpha = 2 \int_B^{\infty} \phi(u) du \dots (14)$$

가 된다.

그러므로  $C_a$ 는

$$C_a = C_4 \cdot 2 \int_B^{\infty} \phi(u) du \dots (15)$$

이 된다. 여기서  $C_4$ 는 第 I 種의 過誤로 인한 單位損失費用이다.

이상의 결과를 종합하여 식(1)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$TC = C_1 + C_2 n + C_3 \cdot \int_{-B-\delta\sqrt{n}}^{B-\delta\sqrt{n}} \phi(u) \cdot du + 2 \cdot C_4 \int_B^{\infty} \phi(u) du \dots (16)$$

本費用式 (16)에서 각각의 費用과 確率의 값을 二項分布로 바꾸어 준다면  $P_n$ -chart에도 적용시킬 수 있다.

#### IV. 費用모델의 解析

前節에서 提示한 費用모델로부터  $n, B$ 의 最適 값을 구하고  $n$ 과  $B$ 의 값의 變化에 따라 總發生費用의 變化를 檢討하기 위해 다음과 같은 方法을 사용한다.

(16)식을 간단히 표시하기 위해 제 3항의

$$\int_{-B-\delta\sqrt{n}}^{B-\delta\sqrt{n}} \phi(u) du \text{를 } PR_1 \text{으로, 제 4항의}$$

$$2 \cdot \int_B^{\infty} \phi(u) du \text{를 } PR_2 \text{로 대치하면 (16)식은}$$

다음과 같이 표시된다.

$$TC = C_1 + C_2 n + C_3 PR_1 + C_4 PR_2 \dots (17)$$

그리고  $TC$ 의 部分費用으로서

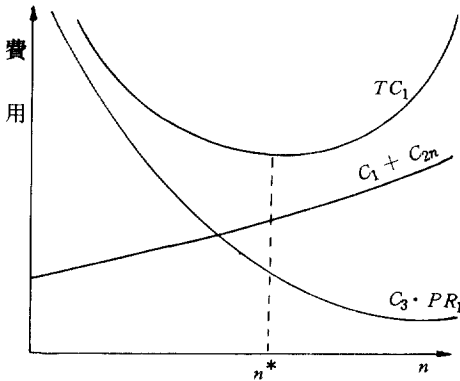
$$TC_1 = C_1 + C_2 n + C_3 \cdot PR_1 \dots B \text{를 고정}$$

시켰을 때의  $TC$ 의 값

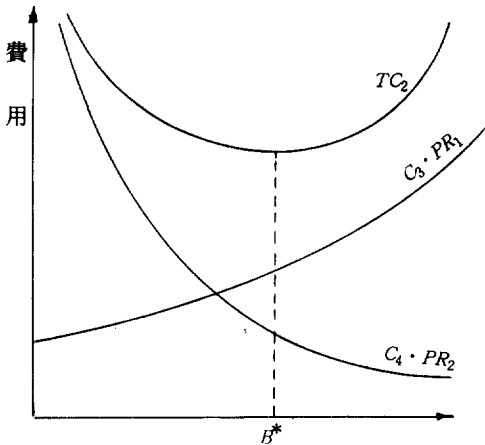
$$TC_2 = C_3 \cdot PR_1 + C_4 \cdot PR_2 \cdots n \text{을 고정시}$$

켰을 때의  $TC$ 의 값

Ⅲ장의 費用分析의 結果에 의해  $C_3 \cdot PR_1$ 은 單調減少하며  $C_1 + C_2 \cdot n$ 은 單調增加함을 알 수 있으므로  $TC_1$ 의 最小點에서 취한  $n^*$ 가 임의의  $B$ 를 固定시켰을 때의 가장 작은 샘플의 크기가 된다.<Fig. 2>.



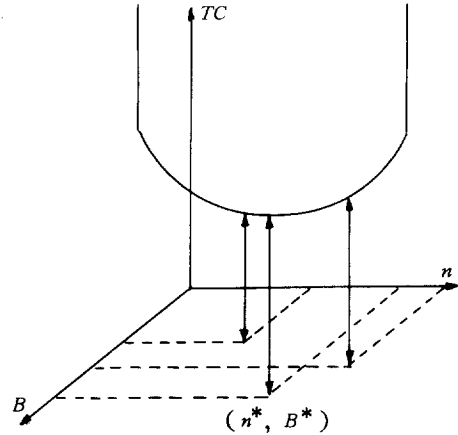
<Fig. 2>  $B$ 를 固定시키고  $n$ 을 變化시켰을 때의  $TC_1$ 과  $n^*$



<Fig. 3>  $n$ 을 固定시키고,  $B$ 로 變化시켰을 때의  $TC_2$ 과  $B^*$

다음은  $TC$ 를 최소화 할 수 있는  $B$ 의 값을 구하기 위해 Fig. 3과 같이  $n$ 을 고정시키고  $C_3 \cdot PR_1$ 과  $C_4 \cdot PR_2$ 를 변화시켜  $TC_2$ 가 어떻게 변화되는가를 검토해 본다.  $TC_2$  曲線의 가장 낮은 點에서의  $B$ 의 값이  $TC_2$ 를 최소로 할 수 있는  $B$ 의 값이다.

위의 두 가지  $TC$ 의 部分費用의 分析 結果에 의해  $n$ 과  $B$ 의 可能한 變數領域 안에서  $n^*$ 과  $B^*$ 의 部分集合들이 定해진다면  $TC$ 를 最少로 하는  $n^*$ ,  $B^*$ 를 近似值로서 구할 수 있음을 알 수 있다.



<Fig. 4>  $TC$ 와  $n^*$ ,  $B^*$ 의 관계

$n$ 과  $B$ 의 近似最適값을 구하는 순서는 다음과 같다.

(i) 어느 정도의 變化를 檢出할 것인가를 決定하여  $\delta$ 를 選擇한다.

(ii)  $PR_1$ ,  $PR_2$ 에 영향을 미칠 수 있는 범위까지  $n$ 과  $B$ 를 區分한 다음,  $B$ 의 初期値이  $j = 1 \sim k$ 의  $B_1$ 을 택하여  $n$ 의 모든 領域이 걸쳐서 샘플링 檢査費用과 工程損失費의 合이 最少가 되는 點에서  $n$ 을 選擇하여  $n_1^*$ 로 定한다.

(iii)  $n_1^*$ 을 고정시키고  $B$ 의 모든 領域에 걸쳐서 工程損失費와 第 I 種의 過誤로 因한 費用의 合이 最少가 되는 點에서  $B$ 를 選擇하고 이것을  $B_1^*$ 로 定한다.

(iv)  $B_1 = B_1^*$ 이면  $(n_1^*, B_1^*)$ 를 하나의 近似解로 하고, 그렇지 않으면 解가 될 수 없으므로 버린다.

(v)  $B$ 를 1 ~ k번까지 바꾸어 본다.

(vi)  $B$ 가  $k$ 까지의 과정이 끝나면 近似解 總發生費用  $TC$ 를 最少로 하는  $(n_i^*, B_j^*)$ 를 近似解로 決定한다.

V. 管理線을 決定하는 要素에 대한 考察  
 샘플의 크기  $n$ 과 管理限界要素  $B$ 에 대한 檢  
 討

[Table 1]  $\delta$ 를 일정하게 하고 비용을 변화시키  
 는 경우( $\delta=2.0$ )

要素	$n^*$	$B^*$	檢出力	總發生費用
실험1	4	2.20	0.9641	363.7 (원)
실험2	7	2.78	0.9939	564.4 (원)

Table 1. 은 실험1과 실험2를 각각 本 研究  
 의 費用 모델에 적용시켜 얻은 결과이다(이때 실험  
 1은  $C_1 = 100, C_2 = 50, C_3 = 1,000, C_4$   
 $= 1,000$ 이며 실험 2는  $C_1 = 100, C_2 = 50$   
 $C_3 = 10,000, C_4 = 10,000$ 을 주었다). 이 결  
 과에서 실험1의 경우는 최적 ( $n^*, B^*$ ) =  
 (4, 2.20), 실험2의 경우는 최적 ( $n^*, B^*$ )=  
 (7, 2.78)로 나왔다.

[Table 2] 비용을 일정하게 하고  $\delta$ 를 변화시킬  
 경우 (실험 2의 비용)

(단위 : 원)

要素 $\delta$	$n^*$	$B^*$	檢出力	總發生費用
1.5	10	2.52	0.9869	848.2
2.0	7	2.78	0.9939	564.2
2.5	5	2.92	0.9962	422.9

Table 2. 는 비용이 일정하고, 검출하려는 평  
 균치의 變化가  $\delta = 1.5, 2.0, 2.5$ 로 변화하는  
 경우  $n^*, B^*$ 의 近似最適解와 이에 따른 檢出  
 力, 總發生費用을 Table로 만든 것이다. 이때  
 최적( $n^*, B^*$ )는 Table 2.와 같다.

VI. 結 論

이상의 本 研究의 결과로서 期待損失費用( $C_3,$   
 $C_4$ )이 작을 경우(실험1) 檢出力이 어느 정도  
 저하되더라도 샘플링費用과 管理圖 사용에 따른  
 總發生費用의 감소를 위해 管理限界線의 幅( $B$ )  
 와 샘플의 크기( $n$ )을 적게해야 하며, 期待損失  
 費用( $C_3, C_4$ )이 클 경우 (실험2)에서는 檢出

力의 증가를 위해  $n, B$ 를 증가시켜야 한다는  
 結論을 얻었다.

동일한 費用條件에서  $n = 4 \sim 5$ , 管理限界線  
 의 幅을  $3\sigma$ 로 한 종래의 방법보다  $n = 4, B$   
 $= 2.20$  또는  $n = 7, B = 2.78$ 로 하는 것이  
 管理圖 사용에 따른 總發生費用에 있어서 유리  
 하다는 것을 실험에 의해 판명되었다. 또 工程  
 의 平均移動  $\delta$ 가 2.5인 경우에는 종전의  $n =$   
 $4 \sim 5, B = 3$ 의 方法의 경우와 거의 비슷한 결  
 과를 보여준다. 한편 工程의 平均移動  $\delta$ 가 크  
 면 클수록 최적 샘플의 크기( $n^*$ )는 적어지고  
 최적 管理限界의 幅( $B^*$ )은 더 크게 되는 것이  
 管理圖 사용에 따른 總發生費用面에서 유리하  
 는 結論을 얻었다. 뿐만 아니라 檢出力에 있어  
 서도  $\delta$ 가 크면 클수록 檢出力은 점점 커짐을  
 알 수 있다.

參 考 文 獻

- 1) Chiu. W.K. (1975). "Economic design of attribute control charts," Technometrics, Vol. 17, No. 1, February.
- 2) Duncan A.J. (1971). "The economic design of  $\bar{X}$ -charts when there is a multiplicity of assignable causes." Journal of the American statistical association Vol. 66, No. 333, March.
- 3) Gibra. I.N. (1971). "Economically optimal determination of the parameters of  $\bar{X}$ -control chart." Management science, Vol. 17, No. 9, May.
- 4) \_\_\_\_\_, (1975). "Recent developments in control chart technique." Journal of quality technology. Vol. 7, No. 4.
- 5) Knappenberger H. A. (1969). "Minimum cost quality control tests." AIIE transactions, Vol. 1, No. 1, March.
- 6) 黃義徹, (1980), 最新品質管理, 博英社, pp. 305 ~ 373.
- 7) \_\_\_\_\_, (1982), 品質管理 텍스트, 漢陽大出版社, pp. 78 ~ 94.