Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol.9, No.2, December 1983

자유곡면 절삭을 위한 경제적인 CL 데이타 계산.

(Calculation of Economic CL Data for Sculptured Surface Machining)

김 대 현*
최 병 규*

Abstract

This paper describes a procedure of generating economic cutter-location (CL) data for the machining of sculptured surfaces on a multi-axis NC milling machine. Measures of economy are the machining time (cutter move distance) and the length of NC tape (number of CL data points). The presented procedure minimizes both the number of CL data and the total distance of cutter moves, for a given cutter (spherical end-mill) size and parameteric cutting direction, while satisfying given tolerance requirements.

The procedure has been implemented in FORTRAN for a smooth composite Bezier surface. The maximum allowable cutter size is calculated by the program so that a user can choose a cutter size. CL data can be generated in both parametric directions u and v. Experimental results show that there are significant differences between the parametric directions, and that cutter size should be as large as possible in order to minimize the cutting time and NC tape length.

*한국과학기술원

부 호 설 명

CL : Cutter Location 좌표
$\gamma(u, v)$: 자유곡면을 표현하는 Parameter 식
γ_{CL} : 자유곡면상에서의 CL데이타
γ_o : 자유곡면상에서 현재 Cutter 의 위치
γ_c : 자유곡면상에서 $\underline{\gamma}_o$ 에서 Check Surfcae 방향으로 $\epsilon(>0)$만큼 떨어진 위치
$\underline{U}(t)$: 절삭 경로를 나타내는 자유곡면상의 곡선
$\underline{N}$: 곡면에 수직인 벡터(Surface Normal Vector)
T_o : Drive Surface 방향으로의 접선 벡터
T_i : Check Surface 방향으로와 접선 벡터
$\underline{P}$: Cutter 축을 나타내는 벡터
KN 1 : Check Surface 방향으로의 곡률
R : Cutter 의 반경
δ : 허용 오차
ρ : 곡률의 반경
h : Cusp 의 높이
L : Step Length
D : L을 접선에 투영한 길이
ℓ : 절삭 경로 간격
d : ℓ 을 접선에 투영한 길이
NPU : Parameter u 방향으로의 Patch 의 갯수
NPV : Parameter v 방향으로의 Patch의 갯수
TCD : 총 절삭 거리
NCL : CL 데이타의 총 갯수

1. 서 론

자유곡면을 절삭하기 위한 CL데이타를 NC테이프로 만드는 여러가지 CAD/CAM 시스템[1, 2, 3, 4]들이 개발되어 왔으나 계산되는 CL데이타에 대한 경제성은 고려되지 않았다. 여기서 경제성이란 자유곡면을 NC 기계에서 실제로 가공할 때 소요되는 절삭 시간과 NC테이프 길이를 의미한다. 자유곡면을 가공하는 경우 NC 테이프의 길이가 수백 미터에 달하는 경우가 많으며, 실제 절삭 시간도 단순한 형상의 가공에 비해 훨씬 많이 소요된다. 따라서 주어진 허용 오차를 만족시키면서 보다 빠른 시간에 가공할 수 있고 NC테이프 길이도 최소화시킬 수 있는 보다 경제적인 CL데이타를 계산하는 것이 매우 중요하다.

일반적으로 CL 데이타를 계산하려는 자유 곡면을 표시하는데 있어서 간단한 수식으로는 불가능하나, 바람직한 한 방법이 곡면을 Parameter u v 식으로 나타내는 것인데 이런 방법 중 매우 잘 알려진 것이 Bezier[5, 6]와 Ferguson[6] 그리고 Coons[5, 6] 의 방법이다. Ferguson 의 방법은 Surface Fitting 시스템이고 Bezier의 방법은 Surface Design 에 주로 이용되는데, 이 두 방법은 곡면 표시 데이타를 서로 전환할 수도 있다.[7]

본 논문에서는 자유곡면 가공을 위한 CAD/CAM 시스템을 개발함에 있어서 경제적인 CL 데이타를 계산하는 문제를 다루고 있으며, 적용 예로서 각 Patch 들 간의 Tangent Continuity 가 유지되는 Bezier Surface 를 절삭하기 위한 CL 데이타를 계산하는 경우를 다루고 있다.

경제적인 CL 데이타를 계산하기 위해서는 주어진 허용 오차 내에서 Step Length 를 최대화 하며 절삭 경로간의 골의 높이(Cusp) 를 넘지 않는 최대 절삭 경로 간격(Path Interval)을 유지한다. 그리고 이 간격을 계산하는 공식이 Cusp 높이와 Cutter 의 반경 및 곡면의 곡률을 고려하여 유도되어 진다.

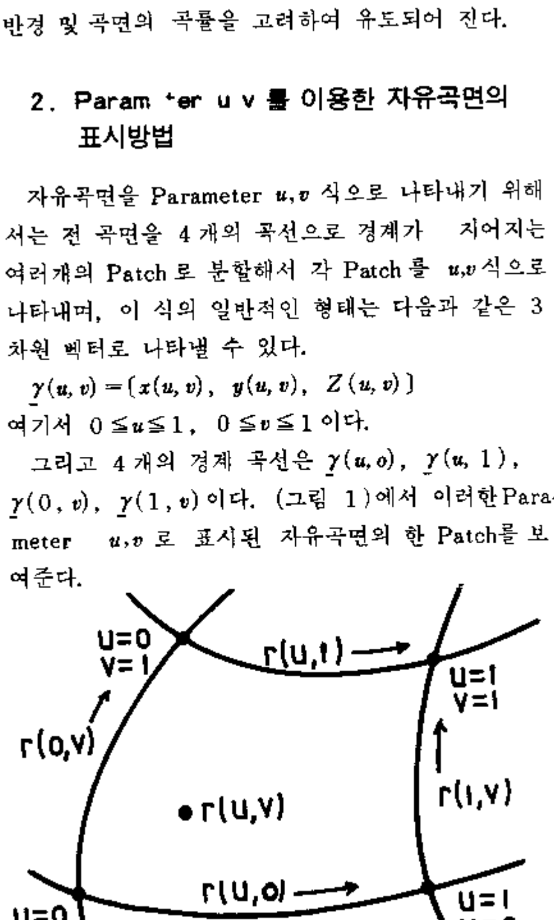
2. Param ·er u v 를 이용한 자유곡면의 표시방법

자유곡면을 Parameter u, v 식으로 나타내기 위해서는 전 곡면을 4 개의 곡선으로 경계가 지어지는 여러개의 Patch 로 분할해서 각 Patch 를 u,v 식으로 나타내며, 이 식의 일반적인 형태는 다음과 같은 3 차원 벡터로 나타낼 수 있다.

$$\underline{\gamma}(u, v) = [x(u, v),\ y(u, v),\ Z(u, v)]$$

여기서 $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$ 이다.

그리고 4 개의 경계 곡선은 $\underline{\gamma}(u, o)$, $\underline{\gamma}(u, 1)$, $\underline{\gamma}(0, v)$, $\underline{\gamma}(1, v)$ 이다. (그림 1)에서 이러한 Parameter u, v 로 표시된 자유곡면의 한 Patch를 보여준다.



(그림 1)

일반적으로 각 Patch의 Parameter 식은 uv 방향에 대한 3차식(Bi—Cubic)이 계산상의 효율성 때문에 널리 쓰인다.

이 논문의 실례 분석에서 고려하는 Bezier Patch 식은 다음과 같다.

$$\underline{\gamma}(u,v)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} B_{ij}\binom{3}{i}\binom{3}{j}(1-u)^{3-i}u^{i}(1-v)^{3-j}$$

$$v' = \underline{U}MBM^{T}\underline{V}^{T}$$

여기서 $\underline{U}=(1, u, u^2, u^3)$

$\underline{V}=(1, v, v^2, v^3)$

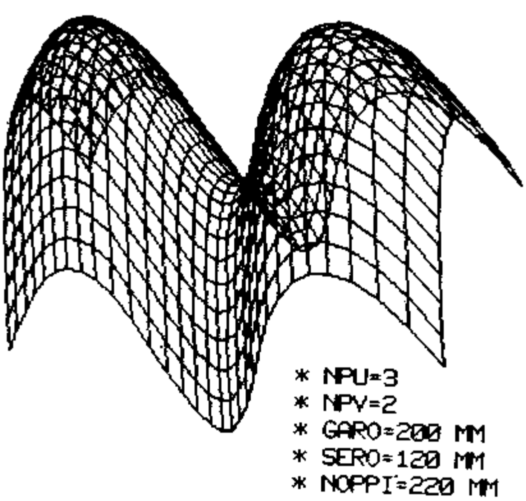
$$M=\begin{pmatrix} 1 & \phi & \phi & \phi \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix}$$

$0 \leq u \leq 1,\ 0 \leq v \leq 1$

B_{ij}는 Bezier Control Point들이다.

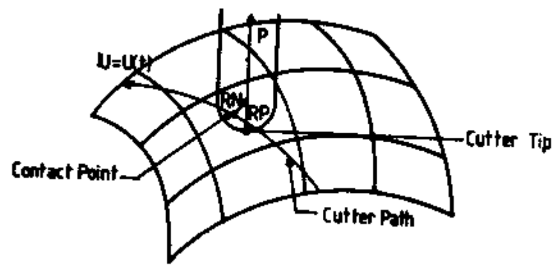
(그림 2)는 u방향으로 3개, v방향으로 2개의 Bezier Patch로 구성된 자유곡면이다.



(그림 2)

3. 자유곡면의 절삭 방법

자유곡면을 절삭할 때 사용할 수 있는 바람직한 공구는 Spherical End Mill인데, 이때 Cutter가 지나야할 경로는 절삭 방향을 결정하는 Drive Surface와 곡면 $\underline{\gamma}(u,v)$가 만날 때 생기는 곡선($\underline{U}(t)$)이다. 이 곡선을 따라가는 Cutter 끝의 좌표는(그림 3) 에서 처럼 Cutter 반경이 R인 경우에 다음과 같이 나타낼 수 있다.



(그림 3)

$$\underline{\gamma}_{CL}(\underline{U}(t))=\underline{\gamma}(\underline{U}(t))+R(\underline{N}-\underline{P})$$

여기서 $\underline{N}$은 곡면에 수직이 벡터,

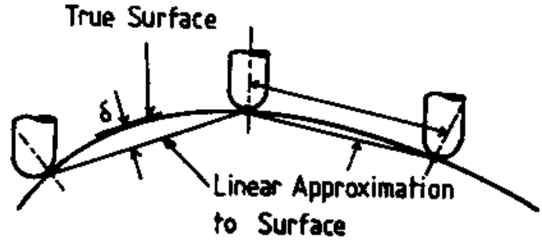
$\underline{P}$는 Cutter 축 방향의 벡터,

R은 Cut ter 의 반경,

$\underline{U}(t)=(u(t),\ v(t))$,

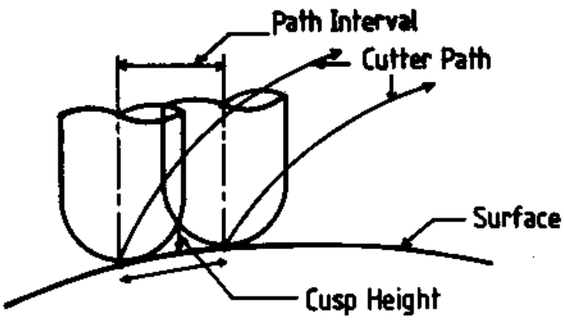
$\underline{\gamma}(\underline{U}(t))$는 절삭 경로상의 접촉점(Contact Point)이다.

이렇게 계산된 전 곡면상의 $\underline{\gamma}_{CL}(\underline{U}(t))$가 CL 데이타 이다. 그리고 Cutter의 이동은 항상 직선이므로 절삭 경로곡선 $\underline{U}(t)$를 정확하게 추적할 수는 없고 그 곡선의 곡률과 허용 오차(δ)에 의해서 길이가 정해지는 선분으로써(그림 4)처럼 근사적으로 따라간다. 이때 한 선분의 길이는 Cutter의 현재 점에서 이동해야할 그 다음 점까지의 직선 거리인데 이것이 Cutter의 한 Step Length이다.



(그림 4)

Cutter의 경로 사이에는 (그림 5) 처럼 Cusp이 생기게 되며, 이 Cusp의 높이는 곡면상에서 Check Surface 방향으로의 곡률(KN 1)과 Cutter 의 반경(R)에 따라 같은 절삭 경로 간격에서도 변한다. 그러므로 Cusp 의 높이를 오차 한계로 지정하면 Cutter 경로 간격은 KN 1 과 R에 따라 변하게 된다. 이러한 Step Length 나 절삭 경로 간격을 유지하면서 계산된 CL 데이타에 의하여 자유곡면이 절삭된다.



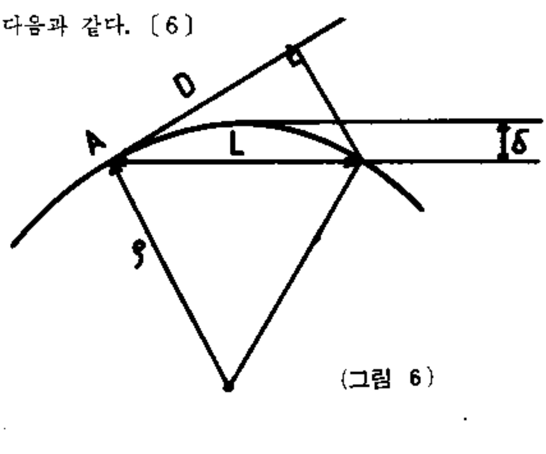
(그림 5)

4. 경제적인 CL데이타 계산을 위한 고려 사항

경제적인 CL 데이타를 계산하기 위해서는 지정된 절삭 방향으로 주어진 허용 오차를 만족하는 최대의 Step Length 와 절삭 경로 간격을 유지하는 것이 필요하다. 그리고 절삭 방향에 따른 CL 데이타 갯수나 절삭 거리의 차이를 비교하여 경제적인 절삭 방향을 결정하는 것이 중요하다.

4. 1 Step Length 계산

(그림4) 에서 처럼 절삭 방향으로 주어진 허용오차가 δ일 때 이것을 만족하는 최대 Step Length는 Cutter 경로 곡선의 한 구간을 그 구간의 시작점에서의 곡률을 갖는 원으로 근사화시켜(그림 6)과 같이 구한다. Step Length L과 이것을 A점에서 Drive Surface 방향으로의 접선에 투영한 길이 D의 계산식은 다음과 같다. [6]



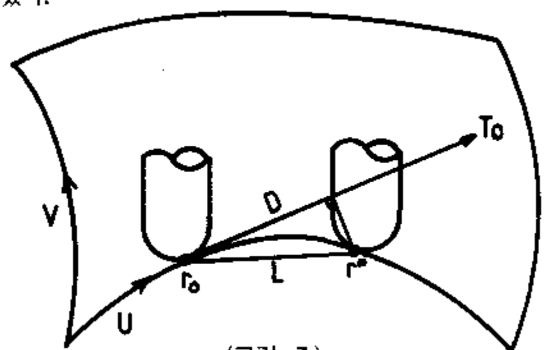
(그림 6)

$$L = 2\sqrt{2\rho\delta - \delta^2} \quad \cdots\cdots (1)$$

$$D = L(1 - \delta/\rho) \quad \cdots\cdots (2)$$

여기서 ρ는 A 점에서의 곡률의 반경이다.

실제 자유곡면 $\underline{\gamma}(u, v)$ 상에서 여기서 구한 L과 D에 해당되는 다음 점을 (그림 7) 에서 보여주고 있다.



(그림 7)

절삭 방향이 Parameter u 방향인 경우에는 식 (3) 에서 다음 점 $\underline{\gamma}^* = \underline{\gamma}(u^*, v_o)$가 계산된다.

$$(\underline{\gamma}(u, v_o) - \underline{\gamma}_o) \cdot T_o = D \quad \cdots\cdots (3)$$

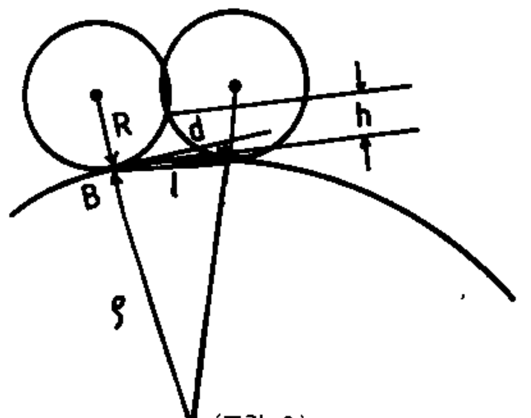
여기서 $\underline{\gamma}_o$는 현재 점이고

T_o는 현재 점에서 u 방향으로 접선 벡터이다. [6]

4. 2 절삭 경로 간격 계산

Step Length 계산의 경우와 같은 가정하에서, 이번에는 Chcek Surface 와 곡면이 만날때 생기는 곡선상에서의 곡률 KN 1 과 Cutter 반경을 고려하여 지정된 Cusp 높이를 갖는 절삭 경로 간격을 계산할 수 있다. (그림 8)에서 이 과정을 보여준다.

절삭 경로 간격 ℓ과 이것을 Check Surface 방향으로의 접선에 투영한 길이 d를 계산하는 식은 다음과 같다.

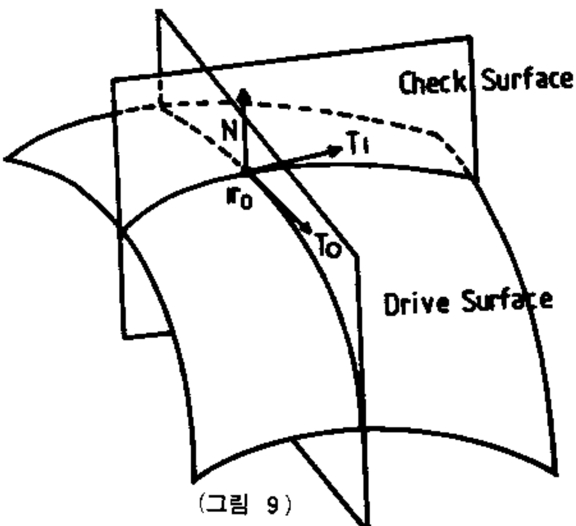


(그림 8)

$$\ell = \frac{\rho\sqrt{4(R+\rho)^2(h+\rho)^2-\{\rho^2+2R\rho+(h+\rho)^2\}^2}}{(R+\rho)\ (h+\rho)}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (4)$$

$$d=\ell\ \sqrt{4\rho^2-\ell^2}\ /(2\rho)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (5)$$

여기서 ρ는 B 점에서의 곡률 반경이며 R은 Cutter 의 반경, h는 Cusp의 높이 이다. 식(4), (5)를 유도 하는 과정은 부록에 기술되어 있다. 이 경우에 있어서 곡률 KN 1 은 곡면 $\gamma(u, v)$와 Check Surface 가 만날 때 생기는 곡선을 나타내는 수식을 얻기가 어려우므로 정확한 값을 구할 수는 없으나 다음과 같은 절차에 의하여 근사값을 구할 수 있다.



(그림 9)

(그림 9)에서 T_0는 Drive Surface 방향으로의 접선 벡터이고$\underline{N}$은곡면에 수직되는 벡터이며 T_1은 Check Surface 방향으로의 접선 벡터이다.

$$\underline{T}_1=\underline{N}\times\underline{T}_0$$

$$\gamma(u, v)\cdot T_0=\gamma_0\cdot T_0 \qquad (6)$$

$$(\gamma(u, v)-\gamma_0)\cdot T_1=\varepsilon \qquad (7)$$

식(7), (8)에서 어떤 작은 $\varepsilon\ (>0)$에 대하여 $\gamma_\varepsilon=\gamma(u_\varepsilon,\ v_\varepsilon)$을 구할 수 있다.

그러면 곡률 KN1은 식(8)에서 근사 적으로 구할 수 있다. [6]

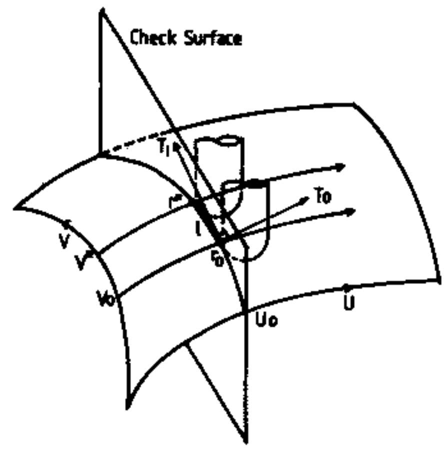
$$KN1 \cong \frac{2\,\underline{N}\cdot(\gamma_\varepsilon-\gamma_0)}{|\gamma_\varepsilon-\gamma_0|^2} \qquad (8)$$

실제 곡면상에서 절삭 경로 간격 ℓ에 해당되는 다음 절삭 경로를 구하는 절차는 다음과 같다.

i) 식(8)에서 곡률 KN 1을 계산한 다음 식(4), (5)에서 절삭 경로 간격 ℓ과 ℓ을 접선 T_0에 투영한 길이 d를 구한다. ((그림 10) 참고)

ii) $$\gamma(u, v)\cdot\underline{T}_0=\gamma_0\cdot\underline{T}_0 \qquad (9)$$

$$(\gamma(u, v)-\gamma_0)\cdot T_1=d \qquad (10)$$



(그림 10)

식(9), (10)에서 u^*, v^*를 구한다.

여기서 절삭 경로가 u방향인 경우에는 다음 절삭 경로가 $\gamma(u, v^*)$이고, v방향인 경우에는 다음 절삭 경로가 $\gamma(u^*, v)$이다.

4. 3 경제적인 절삭 방향 결정과 허용 오차및 Cutter 반경의 변화에 따른 영향

이 논문에서 비교하는 절삭 방향은 Parameter u v두 방향인데, 이 두 방향 중에서 총 절삭 거리(TCD)와 CL데이타의 갯수(NCL)를 기준으로 보다더 경제적인 절삭 방향을 결정한다. 총 절삭 거리는 절삭 시간으로 환산되며 CL데이타의 갯수는 NC테이프 길이를 결정한다. 그리고 Cutter 반경과 허용 오차에 따라 절삭 경로 간격 및 Step Length가 변하므로 CL 데이타 갯수와 절삭 거리가 변하게 된다. 이것에 대한 민감도를 CL데이타를 계산하는 FORTRAN 프로그램으로부터 얻어진 정보에 의하여 실례분석(6장)에서 비교하고 있다.

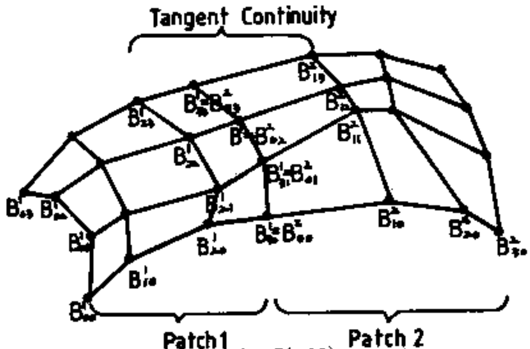
그리고 Cutter 의 절삭 경로를 Tektronix Graphic Terminal을 이용하여 그려본 것이 6장에 실려 있다.

5. 프로그램 설명

이 논문에서 고려한 경제적인 CL 데이타를 계산하는 프로그램은 Tangent Continuity 가 만족되는 Bezier Patch 들로 구성된 자유곡면을 절삭하기 위한 것이다.

5. 1 입력 데이타와 결과치

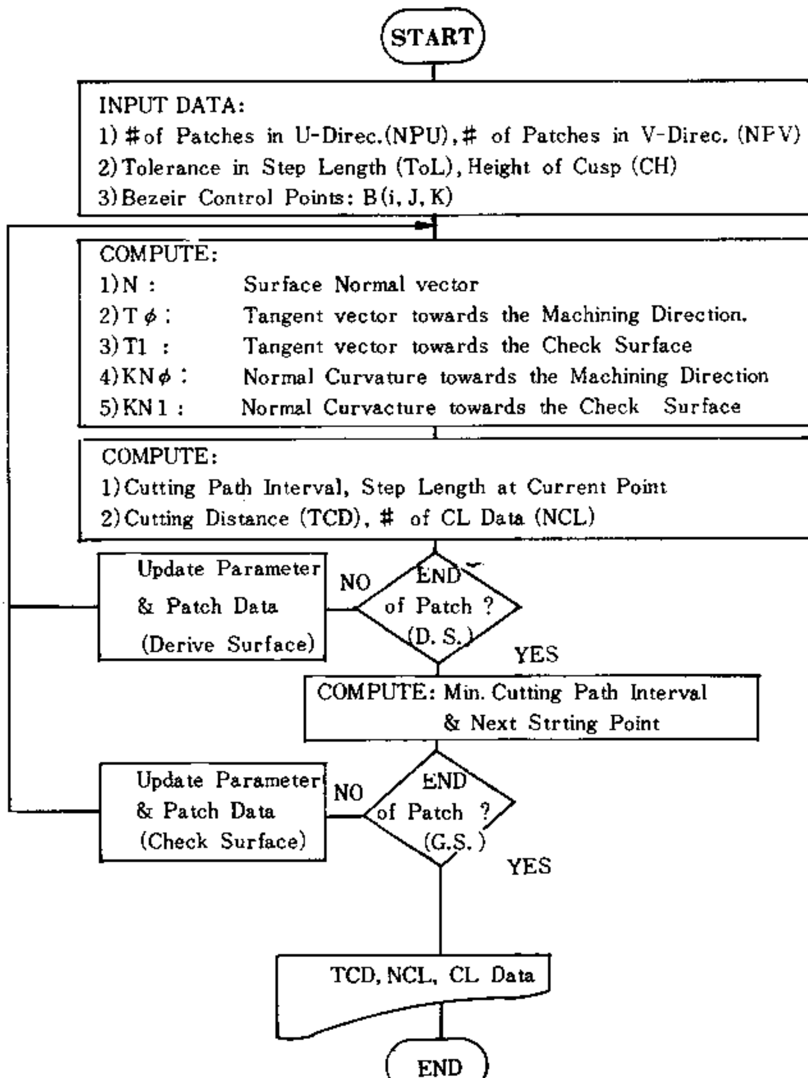
이 프로그램의 입력 데이타는 각 Patch를 나타내는 Bezier Control Point B 와 u 방향으로의 Patch의 갯수 NPU와 V 방향으로의 Patch 의 갯수 NPV그리고 허용 오차 δ와 Cusp의 높이, Cutter 의 반경이다. 절삭하려는 자유곡면상에서 사용할 수 있는 최대 Cutter 반경이 이 프로그램의 첫번째 부프로그램에서 계산되는데, 입력되는 Cutter 의 반경은 이 최대 Cutter 반경보다 작은 값이어야 된다.



(그림 11)

(그림 11)은 Patch 들 사이에 Tangent Continuity가 만족되는 Bezier Control Point들을 나타낸다.

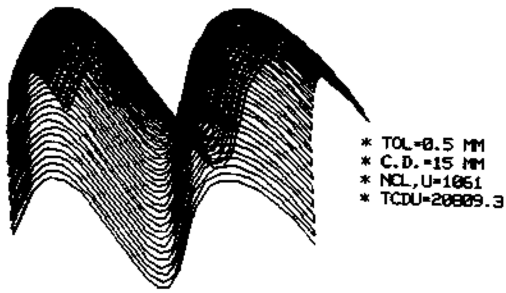
이 프로그램의 결과치는 절삭하려는 자유곡면상에서 사용할 수 있는 최대의 Cutter 반경, 각 Parameter u v 방향으로의 CL 데이타 갯수(NCL)와 총 절삭거리(TCD)이다. 그리고 이 프로그램의 개괄적인 흐름도표(Flow Chart)는 다음과 같다.



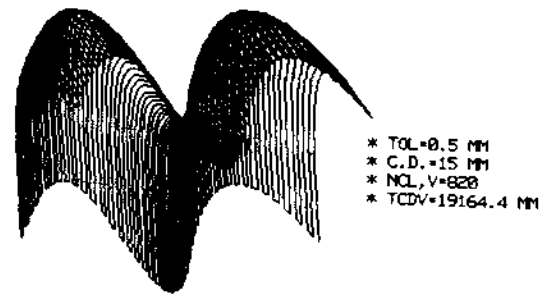
6. 실례 분석

(그림 2)의 Bezier 곡면을 절삭하기 위하여 계산된 CL데이타를 이 장에서 비교 분석을 한다.

아래 그림은 허용 오차가 0.5mm이고 직경이 15mm인 Cutter를 사용했을 때 계산된 절삭 경로상의 접촉점(Contact Point)들을 Cutter가 지나는 순으로 연결하여 그린 것이다. (그림 12)는 u방향으로의 절삭 경로이고 (그림 13)은 v 방향으로의 절삭 경로이다.



(그림 12)



(그림 13)

허용 오차와 Cutter 반경이 지정되었을 때 u방향과 v방향 사이의 CL데이타 갯수와 총 절삭거리의 차이와 이들의 오차와 반경이 변했을 때 변화를 다음 표에서 나타낸다. (표 1)에서는 CL데이타 갯수를 비교하고(표 2)에서는 총 절삭 거리를 비교한다.

D:Cutter 직경 δ: 허용오차

δ(mm)	D	10mm	감소율 (u, v)	15mm	감소율 (u, v)	20mm	감소율 (u, v)	감 소 율 (반경10, 20)
1.	u	650		525		450		
	v	487	25%	384	27%	348	23%	29%
0.5	u	1313		1061		917		
	v	1009	23%	820	23%	712	22%	29%
0.2	u	3278		2679		2309		
	v	2349	28%	1931	28%	1661	28%	29%

(표 1) NCL 비교 단위 : 개, 감소율$= \dfrac{\max\{NCL\} - \min\{NCL\}}{\max\{NCL\}}$

D:Cutter 직경 δ: 허용 오차

δ(mm)	D	10mm	감소율 (u, v)	15mm	감소율 (u, v)	20mm	감소율 (u, v)	감 소 율 (반경10, 20)
1.0	u	18271.3		14796.4		12708.5		
	v	16878.2	8 %	13404.9	9 %	12181.0	4 %	28%
0.5	u	25699.9		20809.3		18015.1		
	v	23509.5	9 %	19164.4	8 %	16683.1	7 %	29%
0.2	u	40488.4		33134.7		28579.5		
	v	36363.9	10%	29949.3	10%	25808.0	10%	29%

(표 2) TCD 비교 단위 : mm, 감소율$= \dfrac{\max\{TCD\} - \min\{TCD\}}{\max\{TCD\}}$

위 표에서 보는 바와 같이 (그림 2)의 자유곡면을 v 방향을 따라서 절삭하는 것이 u 방향의 경우 보다 NC 테이프 길이에 있어서 약 25% 정도 줄어들며 절삭 시간에 있어서도 약 8% 정도 경제적이다. 그리고 v 방향을 따라서 절삭하는 경우에도 Cutter 직경을 10㎜에서 20㎜로 늘이면 약 29% 정도 경제적인 CL 데이타를 얻을 수 있다.

7. 결 론

지금까지의 자유곡면을 절삭하기 위한 CAD/CAM 시스템들은 절삭 경로상에서는 허용 오차를 고려한 Step Length를 계산하고 있으나 절삭 경로간의 간격은 충분히 세밀하게 하거나 잘 고려를 못한 상태여서 절삭 시간이나 NC 테이프 길이가 불필요 하게 길어졌다. 이 논문에서 유도한 절삭 경로 간격을 계산하는 식(4), (5)를 이용하면 이 문제를 해결할 수 있다. 그리고 실례분석(6장)에서 본 바와 같이 절삭 방향도 uv 방향을 비교해봄으로써 28%의 경제적인 CL 데이타를 얻을 수 있으며((표1)에서 δ=0.2㎜인 경우), Cutter 반경에 따른 차이도 Cutter 반경을 2배로 늘였을 때 약 29%의 경제성을 얻을 수 있다((표1), (표2)). 이와 같은 비교가 (그림 2)의 형상에 국한된 것이긴 하지만 일반적인 자유곡면 절삭의 경우에도 이러한 차이는 발생할 수 있다.

다음에는 절삭 방향에 대한 CL 데이타의 경제성 비교를 Cartesian 절삭 방향으로까지 확장시키면 보다더 경제적인 CL 데이타를 얻을 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

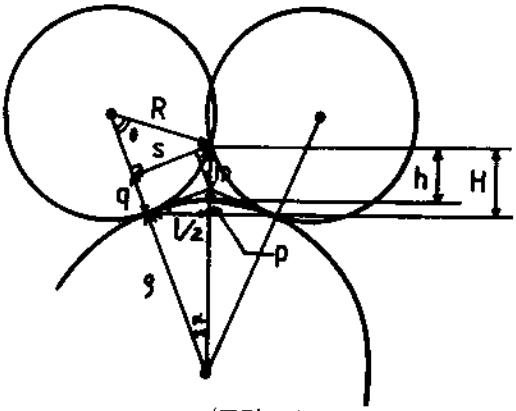
1. Flutter A.G., "The Ploysurf System," *Proc. Computer Languages for Numerical Control*, J. Hatvany ed. North-Holland Pub. Co., pp. 403-415, 1973.
2. Yoshihiro Hyodo, "HAPT-3D: A Programming for Numerical Control," *Proc. Pomputer Languages for Numerical Control*, J. Hatvany ed., North-Holland Pub. Co., pp. 439-460, 1973.
3. Gould S. S., "Surface Programs for Numerical Control," *Proc. Curved Surfaces in Engineering*, Churchill College, Cambridge, England, I. J. Brown ed., IPC Science and Technology Press, Ltd. March, pp. 14-18 1972.
4. Hajimu Kishi, "CAD/CAM for the Diemaking Industry," *Manufacturing Engineering*, November, pp. 90-912, 1981.
5. Rogers D. F., *Mathematical Elements for Computer Graphics*, Mac Graw-Hill, Inc. pp. 157-187, 1976.
6. Faux I.D. & Partt M. J., *Computational Geometry for Design and Manufacture*, Ellis Horwood Limited, 1979.
7. Sadehi M. M. & Gould S. S., "A Comparison of Two Paramentric Surface Patch Methods," *Computer Aied Design*, V. 6, N4, October, pp. 217-220, 1974.
8. Forrest A. R., "On Coons and Other Methods for the Representation of Curved Surfaces," *Computer Grophics and Image Processing*, pp. 341-359, 1972.

〈부 록〉

Cutter 반경과 자유곡곡면상에서 Check Surface 방향으로의 곡률, 그리고 지정된 Cusp 높이에 해당되는 절삭 경로 간격을 계산하는 공식을 다음과 같이 유도할 수 있다.

(그림 14)에서 ρ는 곡률의 반경이고 R은 Cutter

의 반경, h는 Cusp의 높이이다. 여기서 곡률을 K라 하면 $\rho=1/|K|$ 이다.



(그림 14)

$$\frac{\ell}{2}=\rho\sin\alpha,\ \ P=\frac{\ell}{2}\tan\alpha=\rho\sin\alpha\tan\alpha$$

$$q=m\cos\alpha=(H-P)\cos\alpha=H\cos\alpha-\rho\sin^2\alpha$$

$$S=(\rho+q)\tan\alpha=(H+\rho\cos\alpha)\sin\alpha \quad \cdots\cdots\cdots\ (11)$$

다음에는 S를 R과 θ로 나타내면;

$$S=R\sin\theta,\ \cos\theta=(R-q)/R,\ \sin\theta=\sqrt{2q/R-q^2/R^2}$$

$$\therefore S=\sqrt{2Rq-q^2}$$

$$=\sqrt{2R(H\cos\alpha-q\sin^2\alpha)-(H\cos\alpha-q\sin^2\alpha)^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

식(11)과 (12)를 같게 놓고 정리하면 식(13)이 얻어진다.

$$(\rho^2+2R\rho)\sin^2\alpha-2RH\cos\alpha+H^2=0 \quad \cdots\cdots\cdots\ (13)$$

여기서 $H=h+(\rho-\rho\cos\alpha)$, 이것을 식(13)에 대입하여 정리하면;

$$\rho^2+2R\rho+(h+\rho)^2-2(R+\rho)(h+\rho)\cos\alpha=0\cdots(14)$$

$\sin\alpha=\ell/(2\rho)$, $\cos\alpha=\sqrt{4\rho^2-\ell^2}/(2\rho)$, 이것을 식(14)에 대입하여 ℓ에관해서 풀면;

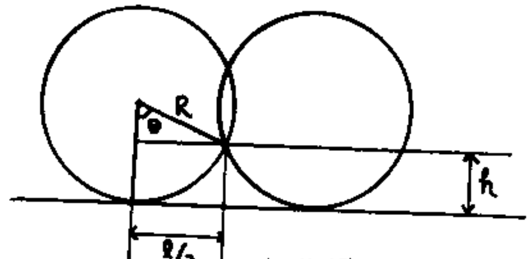
$$\ell=\frac{\rho\sqrt{4(R+\rho)^2(h+\rho)^2-\{\rho^2+2R\rho+(h+\rho)^2\}^2}}{(R+\rho)\ (h+\rho)}$$

$$\rightleftharpoons \ell=$$

$$\frac{\rho\sqrt{(8Rh-4h^2)\rho^2+(8R^2h+4Rh^2-4h^3)\rho+4R^2h^2-h^4}}{(R+\rho)\ (h+\rho)}$$

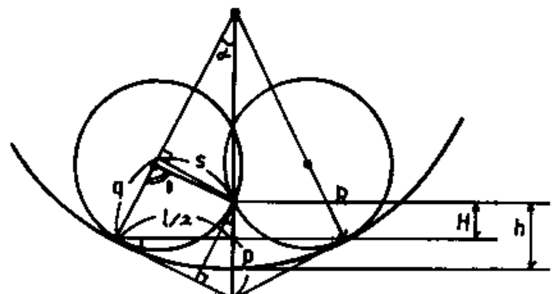
이 식에서 곡률 K가 ϕ이 되면 ρ는 ∞값을 갖게 되어(그림 15)처럼 평면에서의 간격이 된다.

식(15)에서, $\lim\limits_{\rho\to\infty}\ell=\sqrt{8Rh-4h^2}=2\sqrt{2Rh-h^2}$



(그림 15)

다음에는 곡면이 Check Surface 방향으로 오목한 경우에도 (그림 16)처럼 ρ대신에 $-\rho$를 대입하면 같은 공식을 유도할 수 있다.



(그림 16)

$$\frac{\ell}{2}=-\rho\sin\alpha,\ p=-\rho\sin\alpha\tan\alpha,\ q=H\cos\alpha-\rho\sin^2\alpha$$

$$S=-(H+\rho\cos\alpha)\sin\alpha \qquad (16)$$

$$S=R\sin\theta=\sqrt{2qR-q^2}=\sqrt{2R(H\cos\alpha-\rho\sin^2\alpha)-(H\cos\alpha-\rho\sin^2\alpha)^2} \qquad (17)$$

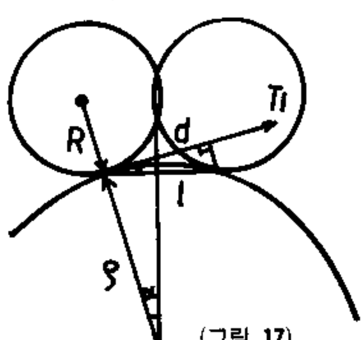
식(16)과 (17)을 같게 두고 앞의 경우와 같은 방식으로 정리하여 ℓ을 구하면 다음 식과 같다.

$$\ell=\frac{|\rho|\sqrt{4(R+\rho)^2(h+\rho)^2-\{\rho^2+2R\rho+(h+\rho)^2\}^2}}{(R+\rho)\ (h+\rho)}$$

그리고 ℓ을 Check Surface 방향으로의 접선에 투영한 길이 d는 다음과 같이 구할 수 있다.

(그림 17)에서 $d=\ell\cos\alpha$, $\sin\alpha=\ell/2\rho$

$$\therefore d=\frac{\ell\sqrt{4\rho^2-\ell^2}}{2\rho}$$



(그림 17)