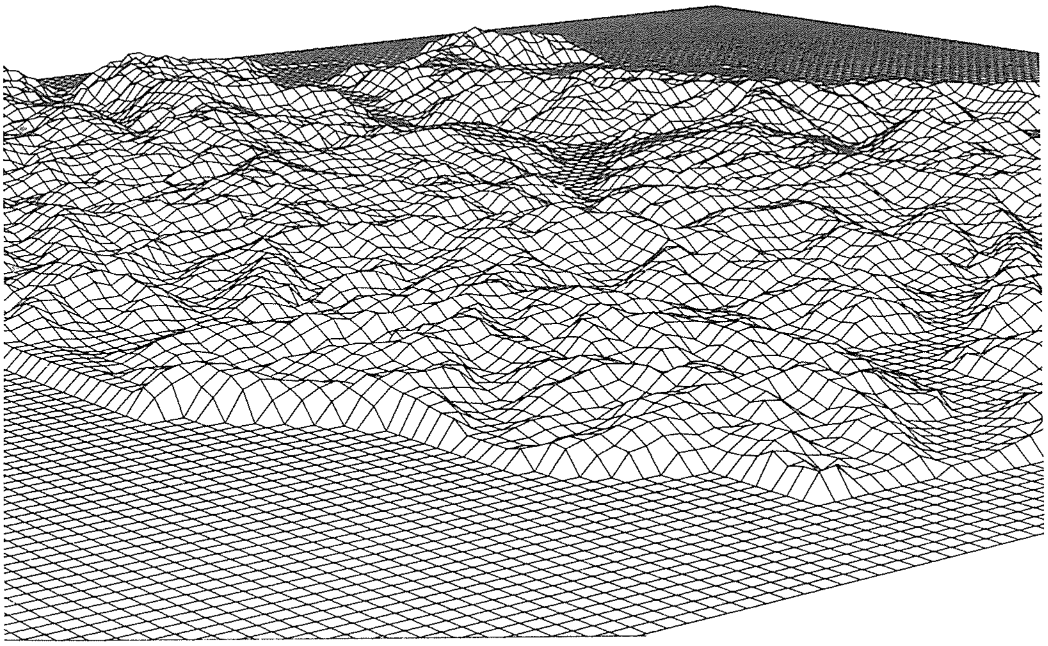
圖形을 計算한다 〈連載 3〉

〈資料：飯塚英雄 著・設計의 컴퓨터手法에서〉



1. 圖形을 취급하는 基礎

건축계획에 있어서는 언제나 形이 관련되어 있다. 또 건축 자체의 形이 아니더라도 표현상 그림으로 표시하는 편이 알기 쉽고 틀림없는 경우도 있다. 이와 같은 圖形에 관한 문제를 컴퓨터에서는 어떻게 취급하고 있는지, 기초적인 사항을 정리하면서 생각해 보기로 한다.

① 2点間의 거리

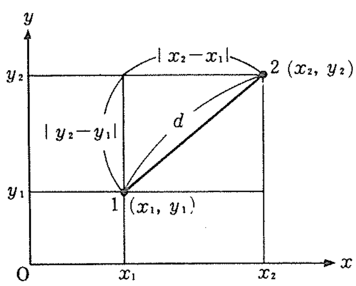


圖 3・1(a) 평면의 경우

점 1 $(x_1 \cdot y_1)$과 점 2 $(x_2 \cdot y_2)$의 거리 d는 이미 나와 있는 바와 같이

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \quad (3 \cdot 1)$$

이며 공간 내의 점 1 $(x_1 \cdot y_1 \cdot z_1)$과 점 2 $(x_2 \cdot y_2 \cdot z_2)$와의 거리 d는

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \quad (3 \cdot 2)$$

로 되며 컴퓨터 속에서 쉽게 계산된다.

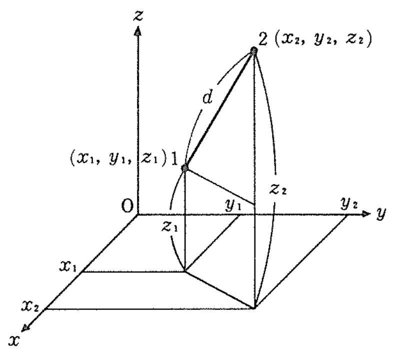


圖 3・1(b) 공간의 경우

② 線分의 方向

점 1 $(x_1 \cdot y_1)$로부터 점 2 $(x_2 \cdot y_2)$로의 직선이 x축과 이루는 角 A (方向角이라 부른다)를 구한다. 이것은 FORTRAN(JIS 수준 7,000상당의 경우)으로서 프로그램을 만들면 극히 간단하며 逆正接의 關数 프로그램을 사용하여

A=ATAN 2 (Y2−Y1・X2−X1) (3・3)

라고 쓰면 된다.

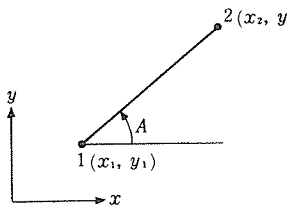


図3・2

③ 직선상의 점으로부터 거리 d 의 점

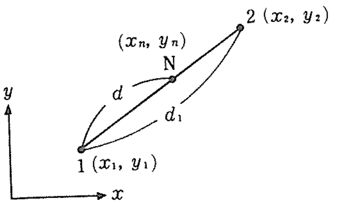


図3・3

점 1 $(x_1 \cdot y_1)$ 로부터 점 2 $(x_2 \cdot y_2)$ 로의 직선상에 점1로부터 거리 d 의 점 $N(x_n \cdot y_n)$ 을 구한다. 線分 1－2 의 길이 d_1은

$$d_1=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \quad (3 \cdot 4)$$

이므로 이것을 사용하면

$$\left.\begin{array}{l} x_n=x_1+\dfrac{d}{d_1}(x_2-x_1) \\ y_n=y_1+\dfrac{d}{d_1}(y_2-y_1) \end{array}\right\} \quad (3 \cdot 5)$$

前項에서 말한 바와 같이 컴퓨터에서 언제나 주의하지 않으면 안되는것이 나눗셈이며 식(3・5)에서 만약 d_1이 0 이었다면 이 계산은 성립되지 않는다. d_1, 즉 점 1과 점 2의 거리가 0 이라고 하는 것은 題意에서 말하면 상식적으로 있을 수 없는 일이다. 그러나 프로그램의 일부에 이 계산이 사용되고 간혹 d_1이 0 이 되는 것은 컴퓨터를 사용하는 사람들이 많이 경험하는 일이다. 긴 프로그램 속에서 한개소의 0 으로 나눌 때를 찾지 못해 고생하는 경우도 있다.

프로그램을 만들 때는 이러한 일이 생길 것인가 아닌가를 확인할 필요가 있다. 그렇기 때문에 컴퓨터 프로그램을 만든다고 하는 것은 단순히 数式에 따라 계산하는 일 이상으로 判別個所의 준비 등 많은 일손을 필요로 하는 일이 된다. 여기에서는 이와 같은 주의를 생략하는 경우가 있으나 실제로 컴퓨터 프로그램에 적용할 때는 上記와 같은 배려가 필요하게 된다.

④ 角 A방향의 거리 d 의 점

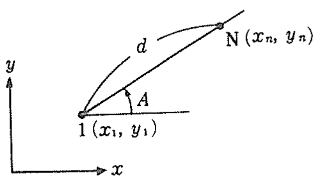


図3・4

점 1 $(x_1 \cdot y_1)$부터 x축에 대한 角 A의 방향에 거리 d의 점 $N(x_n \cdot y_n)$의 좌표를 구한다.

$$\left.\begin{array}{l} x_n=x_1+d \cos A \\ y_n=y_1+d \sin A \end{array}\right\} \quad (3 \cdot 6)$$

⑤ 직선과 x=一定과의 交点

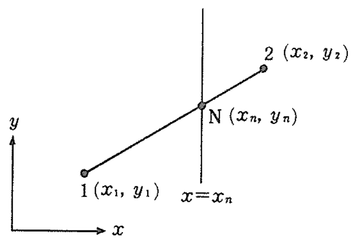


図3・5

점 1 $(x_1 \cdot y_1)$과 점 2 $(x_2 \cdot y_2)$를 연결하는 직선 1－2가 $x=x_n$(x_n은 一定)과 맞닿는 점$N(x_n \cdot y_n)$의 y 좌표를 구한다.

$x_1 \neq x_2$ 일 때

$$y_n=y_1+(y_2-y_1)(x_n-x_1)/(x_2-x_1) \quad (3 \cdot 7)$$

$x_1=x_2$ 일 때는 풀리지 않는다.

⑥ 직선과 y=一定과의 交点

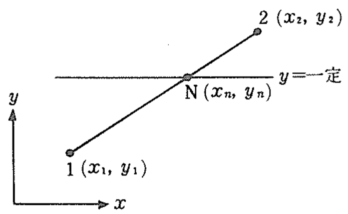


図3・6

점 1 $(x_1 \cdot y_1)$과 점 2 $(x_2 \cdot y_2)$를 연결하는 직선 1－2가 $y=y_n$(y_n은 一定)과 맞닿는 점 $N(x_n \cdot y_n)$의 x좌표를 구한다.

$y_1 \neq y_2$ 일 때

$$x_n=x_1+(x_2-x_1)(y_n-y_1)/(y_2-y_1) \quad (3 \cdot 8)$$

$y_1=y_2$ 일 때는 풀리지 않는다.

⑦ 직선으로부터 角 A 방향의 거리 d 의 점

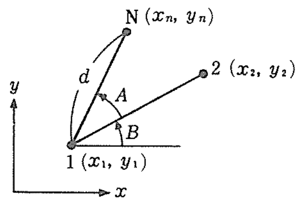


図3・7

점 1 $(x_1 \cdot y_1)$로부터 직선 1－2에 대한 각 A의 방향에 거리 d의 점 $N(x_n \cdot y_n)$의 좌표를 구한다.

JIS 의 수준 7,000 상당의 FORTRAN語로 프로그램을 만든다면 직선 1－2 의 方向角 B는 〈②線分의 방향〉에서 기술한 바와 같이

B=ATAN 2(Y2−Y1・X2−X1) (3・9)

로 쓸 수 있으므로 이것을 사용하면

$$\left.\begin{array}{l} x_n=x_1+d \cos (A+B) \\ y_n=y_1+d \sin (A+B) \end{array}\right\} \quad (3 \cdot 10)$$

로 된다.

⑧ 3 点이 이루는 角

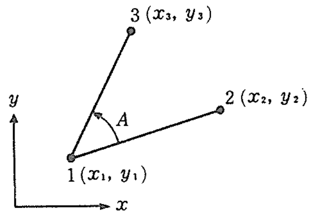


図3・8

점 1 $(x_1 \cdot y_1)$, 점 2 $(x_2 \cdot y_2)$, 점 3 $(x_3 \cdot y_3)$을 주어서 점 1을 정점으로 하는 角 A=角 2−1−3을 구한다.

線分 1−2, 1−3이 x축과 이루는 方向角은 식(3・3)에 의하여 얻어지므로

A=ATAN 2(Y3−Y1・X3−X1)
−ATAN 2(Y2−Y1・X2−X1) (3・11)

와 같이 프로그램으로 쓸 수 있다. 각 A를 正의 값으로 구하면 A가 負일 때 2π를 加해 놓으면 좋다.

⑨ 점으로부터 직선에의 垂線

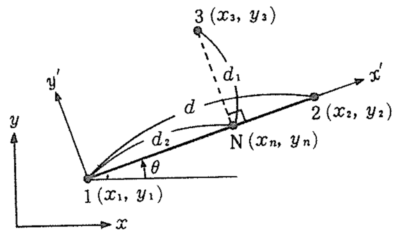


図3・9

점 3 $(x_3 \cdot y_3)$으로부터 직선 1－2에 垂線을 내린 점 N $(x_n \cdot y_n)$과 垂線의 길이 d_1과 점 1로부터의 거리 d_2를 구한다.

점 1로부터 점 2로의 거리 d는

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \quad (3 \cdot 12)$$

이므로 점 1로부터 점 2로의 方向角을 θ로 하면

$$\left.\begin{aligned} \cos\ \theta &= (x_2-x_1)\ /\ d \\ \sin\ \theta &= (y_2-y_1)\ /\ d \end{aligned}\right\} \quad (3 \cdot 13)$$

점 1을 원점으로 해서 점 2의 방향에 x'축을 잡아 점 3의 좌표를 생각하면[좌표변환의 식(2·8) 참조]

$$d_1 = |-(x_3-x_1)\ \sin\ \theta + (y_3-y_1)\cos\ \theta|$$

$$d_2 = (x_3-x_1)\ \cos\ \theta + (y_3-y_1)\ \sin\ \theta \quad (3 \cdot 14)$$

점 N은 신좌표계에서는 $(d_2 \cdot 0)$의 점이므로 원래의 좌표계에 되돌리는 데 식(2·7)을 사용하면

$$\left.\begin{aligned} x_n &= d_2\ \cos\ \theta + x_1 \\ y_n &= d_2\ \sin\ \theta + y_1 \end{aligned}\right\} \quad (3 \cdot 15)$$

가 된다.

⑩ 2직선의 交点

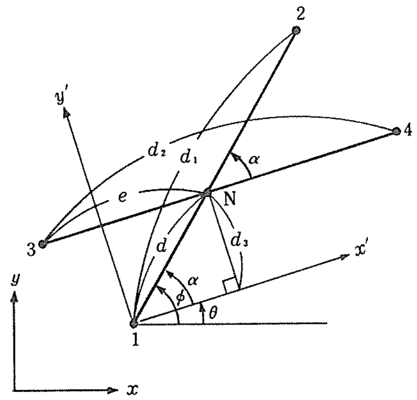


図3·10

점 1$(x_1 \cdot y_1)$과 점 2$(x_2 \cdot y_2)$를 연결하는 직선과, 점 3$(x_3 \cdot y_3)$과 점 4$(x_4 \cdot y_4)$를 연결하는 직선과의 交点 N$(x_n \cdot y_n)$을 구한다.

이것은 간단한 것 같으면서도 의외로 어려우며 다음과 같이 생각하면 컴퓨터의 계산에 쉽게 올릴 수가 있을 것이다.

점 1을 원점으로 해서 線分 3−4에 평행하게 x'축을 잡는 신좌표계를 생각한다. 線分 1−2의 길이를 d_1, 또는 선분 3−4의 길이를 d_2, x' 축의 x축에 대한 方向角을 θ로 하면

$$\left.\begin{aligned} \cos\ \theta &= (x_4-x_3)\ /\ d_2 \\ \sin\ \theta &= (y_4-y_3)\ /\ d_2 \end{aligned}\right\} \quad (3 \cdot 16)$$

이므로 신좌표계에서의 점 3의 y' 좌표를 식(2·8)을 사용하여 구하면

$$d_3 = -(x_3-x_1)\ \sin\ \theta + (y_3-y_1)\ \cos\ \theta \quad (3 \cdot 17)$$

가 된다. 점 1로부터 文点 N까지의 거리 d는 $\sin\ d \neq 0$ 이면

$$d = d_3 / \sin\ d \quad (3 \cdot 18)$$

단, 角 d는 직선 1−2의 方向角 ϕ로부터 직선 3−4의 방향각 θ를 뺀 것으로 한다. 그러므로 $\sin\ d$는 다음 식으로 계산된다.

$$\sin\ d = \sin\ (\phi-\theta) = \sin\ \phi\ \cos\ \theta - \cos\ \phi\ \sin\ \theta \quad (3 \cdot 19)$$

방향각ϕ에 대하여도 θ와 같이

$$\left.\begin{aligned} \cos\ \phi &= (x_2-x_1)\ /\ d_1 \\ \sin\ \phi &= (y_2-y_1)\ /\ d_1 \end{aligned}\right\} \quad (3 \cdot 20)$$

으로 표시할 수 있다. 식(3·16)을 식(3·17)에 대입하고, 식(3·20)을 식(3·19)에 대입해서 얻어진 d_3과 $\sin\ d$의 식을 식(3·18)에 대입·정리하면

$$\frac{d}{d_1} = \frac{(y_3-y_1)(x_1-x_3)-(x_3-x_1)(y_4-y_3)}{(y_2-y_1)(x_4-x_3)-(x_2-x_1)(y_4-y_3)} \quad (3 \cdot 21)$$

이 된다. 交点 N의 좌표는 점 1로부터 점 2의 방향으로 거리 d의 점이므로

$$\left.\begin{aligned} x_n &= x_1 + (x_2-x_1)\ d\ /\ d_1 \\ y_n &= y_1 + (y_2-y_1)\ d\ /\ d_1 \end{aligned}\right\} \quad (3 \cdot 22)$$

로 정리한다.

똑같이 생각하여 점 3으로부터 交点까지의 거리를 e로 하면

$$\frac{e}{d_2} = \frac{(y_3-y_1)(x_2-x_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)}{(y_2-y_1)(x_4-x_3)-(x_2-x_1)(y_4-y_3)} \quad (3 \cdot 23)$$

이므로 식 (3·21)과 합하여 d/d_1이 0으로부터 1의 범위의 값을 취할 때는 交点이 線分 1−2 위에 있으며, e/d_2가 0으로부터 1의 범위의 값을 취할 때는 교점이 선분 3−4의 위에 있다는 것을 알게 되고 線分끼리의 교점이 있는지 어떤지, 図形 문제에서의 중요한 判定에 이 관계를 이용할 수가 있다.

더우기 $Sin\ d=0$ 따라서

$$(y_2-y_1)(x_4-x_3)-(x_2-x_1)(y_4-y_3)=0 \quad (3 \cdot 24)$$

의 경우는 交角이 0, 즉 2개의 선분이 평행할 때나 혹은 일치해 있을 때인 것이다. 컴퓨터의 계산에서는 有効数字가 보통 6~7행, 특별한 경우 20행 정도이므로 식(3·24)과 같은 경우 左辺이 꼭 0이 되는 것은 드물다. 식의 값이 0이 되느냐 어떻게 되느냐의 판정은 0에 가까운, 비교적 작은 수보다 작아질 것인가를 행하는 것이 일반적이다.

⑪ 직선과 원의 交点

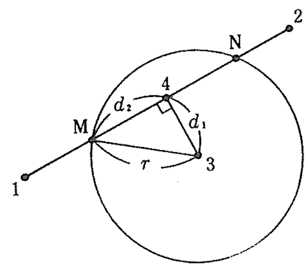


図 3·11

점 1$(x_1 \cdot y_1)$과 점 2$(x_2 \cdot y_2)$를 지나는 직선과, 점 3$(x_3 \cdot y_3)$을 중심으로 하는 반경 r의 원과의 交点 $N(x_n \cdot y_n)$, $M(x_m \cdot y_m)$을 구한다.

먼저 〈⑨점으로부터 직선에의 垂線〉에서 사용했던 방법에 따라 점 3으로 부터 선분 1−2에의 垂線의 길이 d_1과 점 4$(x_4 \cdot y_4)$의 좌표를 구한다.

점 1로부터 점 2로의 거리 d, 점 1로부터 점 2로의 방향각을 θ라고 하면

$$\left.\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \\ Cos\ \theta &= (x_2-x_1)\ /\ d \\ Sin\ \theta &= (y_2-y_1)\ /\ d \end{aligned}\right\} \quad (3 \cdot 25)$$

⑨의 경우와 같이

$$d_1 = |-(x_3-x_1)\ Sin\ \theta + (y_3-y_1)\ Cos\ \theta| \quad (3 \cdot 26)$$

만약 $d_1 > r$이면 원과 직선은 교차하지 않는다. 図 3·11에서 $M-4$의 길이 d_2는

$$d_2 = \sqrt{r^2-d_1{}^2}$$

이 된다. $d_2=0$이면 직선과 원이 접하는 것을 알 수 있고, 접점은 점 4$(x_4 \cdot y_4)$가 된다. 이 접점의 좌표는 1−4의 길이를 d_3로 하면 다음과 같이 얻어진다.

$$d_3 = (x_3-x_1)\ Cos\ \theta + (y_3-y_1)\ Sin\ \theta \quad (3 \cdot 28)$$

$$\left.\begin{aligned} x_4 &= d_3\ Cos\ \theta + x_1 \\ y_4 &= d_3\ Sin\ \theta + y_1 \end{aligned}\right\} \quad (3 \cdot 29)$$

직선과 원이 2점에서 만났을 때 점 1에 가까운 쪽의 교점을 M, 먼쪽의 교점을 N으로 하면 각각의 좌표는 〈④角 A 방향의 거리 d의 점〉에서 기술한 방법을 사용한다.

$$\left.\begin{aligned} x_m &= x_4 - d_2\ Cos\ \theta \\ y_m &= y_4 - d_2\ Sin\ \theta \end{aligned}\right\} \quad (3 \cdot 30)$$

$$\left.\begin{aligned} x_n &= x_4 + d_2 \ \mathrm{Cos}\ \theta \\ y_n &= y_4 + d_2 \ \mathrm{Sin}\ \theta \end{aligned}\right\} \quad (3\cdot31)$$

로 계산된다.

⑫ 2圓의 交点

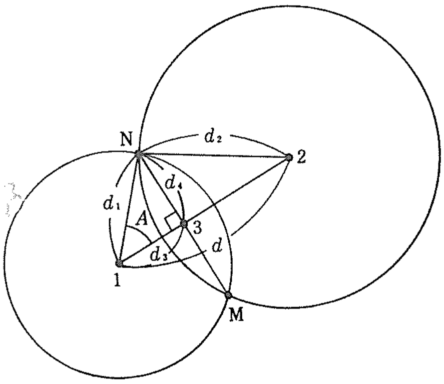


図3・12

점 1($x_1 \cdot y_1$)을 중심으로 하는 반경 d_1의 원과, 점 2($x_2 \cdot y_2$)를 중심으로 하는 반경 d_2의 원과의 교점 M ($x_m \cdot y_m$) 및 N($x_n \cdot y_n$)을 구한다.

점 1과 점 2의 거리 d는

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \quad (3\cdot32)$$

만일 $d \geqq d_1+d_2$ 또는 $\min(d_1 \cdot d_2)+d \leqq \max(d_1 \cdot d_2)$라면 교점을 갖지 않는다.

3각형 1—2—N의 각 변의 길이는 알고 있으므로 각 N—1—2를 A로 하면 3각형에 관한 제2 余弦定理를 사용하여 Cos A를 계산할 수 있다.

$$\cos A = (d_1^2+d^2-d_2^2)/2\,d_1\,d \quad (3\cdot33)$$

점 N으로부터 직선 1—2로의 垂線의 다리를 점 3($x_3 \cdot y_3$)으로 해서 점 1로 부터 점 3까지의 거리를 d_3로 하면

$$d_3 = d_1 \ \cos A \quad (3\cdot34)$$

따라서

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= x_1+(x_2-x_1)\ d_3/d \\ y_3 &= y_1+(y_2-y_1)\ d_3/d \end{aligned}\right\} \quad (3\cdot35)$$

또한 점 N으로부터 점 3까지의 거리 d_4는

$$d_4=\sqrt{d_1^2-d_3^2} \quad (3\cdot36)$$

점 1로부터 점 2에의 방향각을 θ라고 하면

$$\left.\begin{aligned} \cos\ \theta &= (x_2-x_1)/d \\ \sin\ \theta &= (y_2-y_1)/d \end{aligned}\right\} \quad (3\cdot37)$$

이에 〈③ 직선상의 점으로부터 거리 d의 점〉에서 기술한 방법으로 점 3에서부터 거리 d_4로서 방향각 $\theta+\pi/2$와 $\theta-\pi/2$의 점을 구하면 그것이 교점 M과 N이 된다.

$$\left.\begin{aligned} x_m &= x_3+d_4\cos(\theta-\pi/2) \\ &= x_3+d_4\ \sin\theta \\ y_m &= y_3+d_4\sin(\theta-\pi/2) \\ &= y_3-d_4\ \cos\theta \end{aligned}\right\} \quad (3\cdot38)$$

$$\left.\begin{aligned} x_n &= x_3+d_4\cos(\theta+\pi/2) \\ &= x_3-d_4\ \sin\theta \\ y_n &= y_3+d_4\sin(\theta+\pi/2) \\ &= y_3+d_4\ \cos\theta \end{aligned}\right\} \quad (3\cdot39)$$

⑬ 圓의 接線

점 1($x_1 \cdot y_1$)을 통하는 직선이 점 2($x_2 \cdot y_2$)를 중심으로 하는 반경 r의 원과 접할 때 접점 M($x_m \cdot y_m$)및 N($x_n \cdot y_n$)을 구한다.

점 1과 점 2의 거리

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

가 r보다 작다. 즉 점 1이 원 속에 들어가 버릴 때 접선이 그어지지 않는다.

図 3·13에서 3각형 N—1—2는 직각 3각형이므로 1—N의 길이 d_1은

$$d_1=\sqrt{d^2-r^2} \quad (3\cdot40)$$

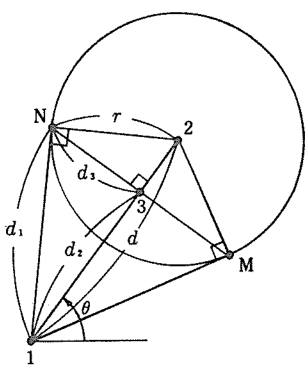


図3・13

3각형 1—2—N과 3각형 1—N—3과는 유사함으로 1—3의 길이 d_2와 3—N의 길이 d_3는

$$d_2 = d_1^2/d \quad (3\cdot41)$$

$$d_3 = rd_1/d \quad (3\cdot42)$$

가 된다.

점 1을 원점으로 해서 점 2의 방향으로 x^1축을 가지는 신좌표를 생각하면 M·N의 좌표는 ($d_2, -d_3$), (d_2, d_3)이므로 이것을 원래의 좌표계에 되돌리기 위해 식(2·7)을 사용하면

$$\left.\begin{aligned} x_m &= d_2\cos\ \theta+d_3\ \sin\ \theta+x_1 \\ y_m &= d_2\sin\ \theta-d_3\ \cos\theta+y_1 \end{aligned}\right\} \quad (3\cdot43)$$

$$\left.\begin{aligned} x_n &= d_2\cos\ \theta-d_3\ \sin\ \theta+x_1 \\ y_n &= d_2\sin\ \theta+d_3\ \cos\theta+y_1 \end{aligned}\right\} \quad (3\cdot44)$$

로 된다. 단 1—2의 방향각 θ의 관계식

$$\left.\begin{aligned} \cos\ \theta &= (x_2-x_1)/d \\ \sin\ \theta &= (y_2-y_1)/d \end{aligned}\right\}$$

를 사용하는 것이다. 식(3·43)·식(3·44)을 계산하는데 3각관수를 계산할 필요는 없다.

⑭ 3각형의 면적

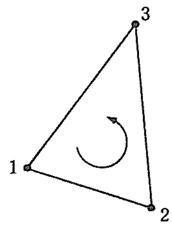


図3・14

3각형의 면적이라 하면 유명한 헤론의 공식이 있으나, 3각형의 정점의 좌표가 알려져 있을 때는 아래의 行列式을 구하는 것이 쉽다.

점 1($x_1 \cdot y_1$), 점 2($x_2 \cdot y_2$), 점 3($x_3 \cdot y_3$)을 정점으로 하는 3각형의 면적 S는

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\{(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)\} \quad (3\cdot45)$$

로 계산된다.

이 S의 값은 점 1·2·3이 좌회전할 때 正의 값을 취하고 우회전 때 負의 값을 취한다. 또한 S=0가 되는 것은 3점이 일직선상에 있거나 1점에 겹치는 경우이다. 이 관계는 3각형의 존재나 3각형의 表裏의 판별 등으로 사용된다.

⑮ 4面体의 体積

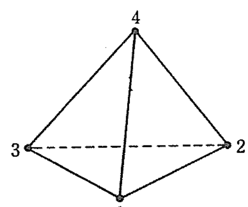


図3・15

지금까지는 평면상의 図形에 대하여 기술했으나 전술한 3각형의 면적과 같은 식으로서 4면체의 체적을 구하는 식이 있음을 설명하고자 한다.

점 1($x_1 \cdot y_1 \cdot z_1$), 점 2($x_2 \cdot y_2 \cdot z_2$), 점 3($x_3 \cdot y_3 \cdot z_3$), 점 4($x_4 \cdot y_4 \cdot z_4$)를 정점으로 하는 図 13·5와 같은 4면체의 체적 V는

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \qquad (3\cdot46)$$

$$=\frac{1}{6}\{(x_2-x_1)(y_3-y_1)(z_4-z_1)+(x_3-x_1)(y_4-y_1)(z_2-z_1)+(x_4-x_1)(y_2-y_1)(z_3-z_1)-(x_2-x_1)(y_4-y_1)(z_3-z_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)(z_4-z_1)-(x_4-x_1)(y_3-y_1)(z_2-z_1)\}$$

으로 나타낼 수가 있다.

이 식에 의하여 체적을 계산하는 것은 별로 없으나 공간 내의 평면의 表裏를 판별할 때 등에 사용된다. 그것은 V의 값이 점 4에서보다, 점 1·2·3이 좌회전일 때는 正의 값을, 우회전일 때도 負의 값을 취하기 위해서이다.

⑯ 직선과 평면의 交点

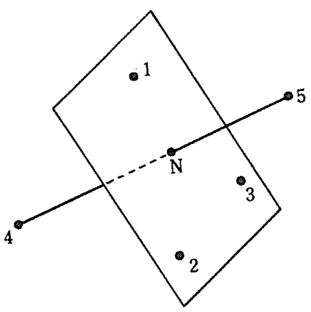


図3·16

공간 내에서 점 1($x_1 \cdot y_1 \cdot z_1$), 점 2($x_2 \cdot y_2 \cdot z_2$), 점 3($x_3 \cdot y_3 \cdot z_3$)을 통하는 평면과, 점 4($x_4 \cdot y_4 \cdot z_4$),점 5,($x_5 \cdot y_5 \cdot z_5$)를 통하는 직선과의 교점 N($x_n \cdot y_n \cdot z_n$)을 구한다.

처음 3점을 통하는 평면의 식은 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0 \qquad (3\cdot47)$$

이것을 전개하면 다음과 같이 된다.

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$$

여기에

$$\left.\begin{aligned} A&=(y_2-y_1)(z_3-z_2)-(z_2-z_1)(y_3-y_2) \\ B&=(z_2-z_1)(x_3-x_2)-(x_2-x_1)(z_3-z_2) \\ C&=(x_2-x_1)(y_3-y_2)-(y_2-y_1)(x_3-x_2) \end{aligned}\right\} \qquad (3\cdot48)$$

점 4·5를 통하는 직선의 방정식은

$$\frac{x-x_4}{x_5-x_4}=\frac{y-y_4}{y_5-y_4}=\frac{z-z_4}{z_5-z_4}=S \qquad (3\cdot49)$$

이므로 변형해서

$$\left.\begin{aligned} x&=(x_5-x_4)\,S+x_4 \\ y&=(y_5-y_4)\,S+y_4 \\ z&=(z_5-z_4)\,S+z_4 \end{aligned}\right| \qquad (3\cdot50)$$

가 되며 이것을 식(3·48)에 대입해서 S를 구하면

$$S=\frac{A(x_1-x_4)+B(y_1-y_4)+C(z_1-z_4)}{A(x_5-x_4)+B(y_5-y_4)+C(z_5-z_4)} \qquad (3\cdot51)$$

이 된다. 더우기 이 식의 右邊의 분모가 0이 될 때는 교점이 없다.

여기에서 교점의 좌표는 식(3·49)에서

$$\left.\begin{aligned} x_n&=(x_5-x_4)\,S+x_4 \\ y_n&=(y_5-y_4)\,S+y_4 \\ z_n&=(z_5-z_4)\,S+z_4 \end{aligned}\right\} \qquad (3\cdot52)$$

도 얻어진다.

⑰ 3平面의 交点

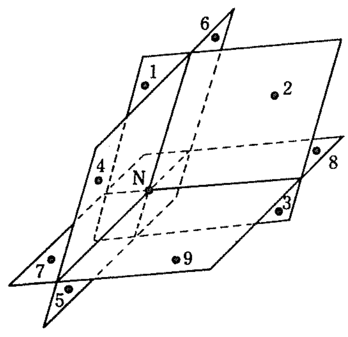


図3·17

또하나 立体幾何의 문제를 컴퓨터에 맞게 풀어보자.

3점으로 결정되는 평면이 3개 있고 그 9개의 점을 1($x_1 \cdot y_1 \cdot z_1$)…9($x_9 \cdot y_9 \cdot z_9$)로 한다. 이 3개의 평면의 교점 N($x_n \cdot y_n \cdot z_n$)을 구한다.

〈⑯직선과 평면의 교점〉에서 보인 것과 같이 3점을 통하는 평면의 방정식을 전개해서 다음과 같이 표현할 수가 있다.

$$A_1x+B_1y+C_1z=d_1 \qquad (3\cdot53)$$

다른 2평면에 대하여도

$$A_2x+B_2y+C_2z=d_2 \qquad (3\cdot54)$$

$$A_3x+B_3y+C_3z=d_3 \qquad (3\cdot55)$$

가 되므로 이것을 연립방정식으로 풀고 $x \cdot y \cdot z$를 구하면 그것이 교점의 좌표가 된다.

크라멜의 공식에 의하여 구해보면 교점은

$$\left.\begin{aligned} x_n&=\overline{D}_1/D \\ y_n&=\overline{D}_2/D \\ z_n&=\overline{D}_3/D \end{aligned}\right\} \qquad (3\cdot56)$$

이 된다.

단,

$$D=A_1(B_2C_3-B_3C_2)+A_2(B_3C_1-B_1C_3)+A_3(B_1C_2-B_2C_1)$$

$$\overline{D}_1=d_1(B_2C_3-B_3C_2)+d_2(B_3C_1-B_1C_3)+d_3(B_1C_2-B_2C_1)$$

$$\overline{D}_2=d_1(C_2A_3-C_3A_2)+d_2(C_3A_1-C_1A_3)+d_3(C_1A_2-C_2A_1)$$

$$\overline{D}_3=d_1(A_2B_3-A_3B_2)+d_2(A_3B_1-A_1B_3)+d_3(A_1B_2-A_2B_1)$$

더우기 $D=0$일 때는 교점을 가지지 않는다. (3·57)

이상 열거한 바와 같이 계산의 범위를 더욱 넓혔다. 하나의 체계화된 프로그램으로서 COGO나 APT라고 하는 것이 있다. COGO(Coordinate Geometry의 약자)라고 하는 것은 미국 메사츄세츠주 공과대학이 중심이 되어 토목측량 계산용으로 만들어진 幾何計算 프로그램이며 APT(Automatic Programmed Tools의 약자)라고 하는 것은 공작기계의 수치제어용 프로그램이다. 이것은 키지피化 되어 있고 우리들의 프로그램에서 쉽게 인용되지 않으므로 건축에 관계가 있을 것 같은 기하계산의 논리를 전술한 바와 같이 정리해 둔 것이다.

2. 面積의 計算

不整形의 부지나 방 면적을 컴퓨터에서는 어떻게 계산하는가.

앞에서 기술한 COGO라고 하는 토

목측량용의 프로그램 중에는 부지 등의 면적을 계산하는 기능이 있다. 그 방법은 다음과 같은 것이며, 부지에 한하지 않고 면적을 구할 때는 응용할 수가 있을 것이다.

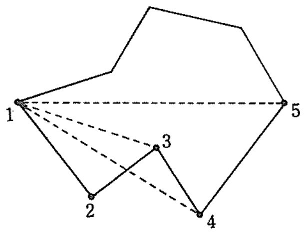


図 3.18 多角形의面積

임의로 된 형상의 다각형의 각 정점에 좌회전으로 1·2·3…N과 같이 번호를 붙여 그 좌표를 $(x_1 \cdot y_1)$, $(x_2 \cdot y_2)$, $(x_3 \cdot y_3) \cdots (x_n \cdot y_n)$ 으로 하면 면적 S는 다음과 같이 구할 수 있다. 〔식(3·45) 참조〕

$$
\begin{aligned}
S &= \triangle 123 + \triangle 134 + \triangle 145 + \cdots\cdots \\
&\quad + \triangle 1\,(n-2)\,(n-1) + \triangle 1\,(n-1)\,n \\
&= \frac{1}{2}\{(x_2-x_1)(y_3-y_1) - (x_3-x_1)(y_2-y_1) \\
&\quad + (x_3-x_1)(y_4-y_1) - (x_4-x_1)(y_3-y_1) \\
&\quad + \cdots\cdots \\
&\quad + (x_{n-2}-x_1)(y_{n-1}-y_1) - (x_{n-1}-x_1)(y_{n-2}-y_1) \\
&\quad + (x_{n-1}-x_1)(y_n-y_1) - (x_n-x_1)(y_{n-1}-y_1)\} \\
&= \frac{1}{2}\{(x_1-x_3)(y_2-y_1) \\
&\quad + (x_2-x_4)(y_3-y_1) \\
&\quad + \cdots\cdots \\
&\quad + (x_{n-2}-x_n)(y_{n-1}-y_1) \\
&\quad + (x_{n-1}-x_1)(y_n-y_1)\} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\{(x_i-x_{i+2})(y_{i+1}-y_1)\} \quad \text{단 } x_{n-1}=x_1 \quad (3\cdot 58)
\end{aligned}
$$

상기의 전개에서 마지막으로 얻어진 식은 $n-1$항의 積和를 나타내고 있다. 이와 같은 모양으로 정리한 식의 계산은 컴퓨터가 가장 이점이 있다.

되도록이면 컴퓨터에서 취급하는 모든 문제를 이와 같은 식으로 정리하고 싶으나, 현실적으로는 많은 판별이 필요하므로 프로그램이 복잡하게 되고 작성에 일손이 많이 들어 착오가 생기기 쉬운 경우가 많다. 이 면적계산의 Algorism은 매우 簡明하고 드문 예라고 할 수 있다.

3. 土量의 計算

起伏이 있는 토지를 편편하게 해서 건물을 세우려고 할 때 절취해 내지 않으면 안되는 土量이 어느 정도 될 것인가 하는 문제가 있다. 토목분야에서는 도로나 철도를 부설할 때 토량계산을 하게 된다.

여기에서는 극히 간단한 방법을 기술한다.

어떤 부지의 범위 내 요소요소 지점의 xyz 좌표를 알고 있다고 하자. (図 3·19 참조)

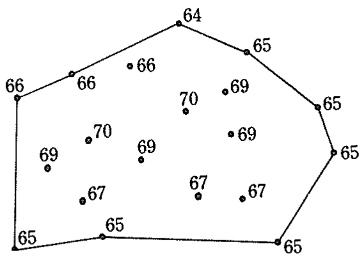


図 3.19 각점의 높이

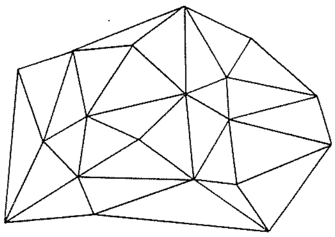


図3·20 3角網

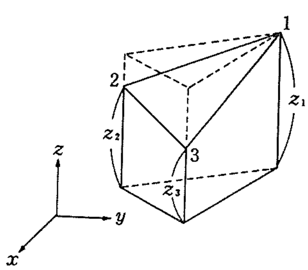


図3·21

지형에 맞추어 이들 점을 정점으로 하는 3각형의 網을 짜고, 각 3각형을 평면이라고 보고 이때의 어떤 기준이 되는 地盤面으로부터 위의 土量을 계산해 보자.

평면상에서의 하나의 3각형 부분을 입체적으로 볼 때 図 3·21과 같이 된다. 지표의 3각형의 정점을 $1(x_1 \cdot y_1 \cdot z_1)$, $2(x_2 \cdot y_2 \cdot z_2)$, $3(x_3 \cdot y_3 \cdot z_3)$과 위로부터 왼쪽으로 돌아 번호를 붙이면 이 3角柱의 평균 높이는 $(z_1+z_2+z_3)/3$이며, 저면적은 식(3·45)와 같음으로 3각주의 체적 V는 다음과 같이 된다.

$$
V = \frac{1}{6}\{(x_2-x_1)(y_3-y_1) - (x_3-x_1)(y_2-y_1)\}\ (z_1+z_2+z_3) \quad (3\cdot 59)
$$

부지 내의 모든 3각주에 대한 V를 구하여 합산하면 토량이 구해진다.

4. 領域의 판별

도형의 문제에서 자주 필요로 하는 것은 어떤 점이 영역 안이냐 밖이냐 하는 문제이다. 図 3·22와 같이 凸다각형으로서 점 p가 이 속에 있는지 어떤지의 판별은 어떻게 할 것인가.

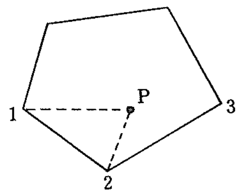


図 3.22 凸다각형 가운데 점P가 있는지 없는지의 판별

사람들은 그림을 본 것만으로 판별하지만, 컴퓨터는 순간적으로 판별한다고 할 수 없다. 컴퓨가 실제로 계산할 때에는 순간이라고 할만큼 고속이나, 계산방법을 가르키는 사람은 〈설마…〉하고 생각해 버리기 쉬운 문제이다. 그것은 점 P가 영역의 경계선상 또는 경계선상에 극히 가깝게 존재할 때나 판별을 위해 그은 직선이 영역을 나타내는 다각형의 정점상이나, 극히 가까운 곳을 지날 때 등에 수치오차를 위한 고려가 필요하며 그것은 약간 귀찮은 일이다.

凸다각형의 경우는 전술한 바와 같이 3각형의 면적을 계산하는 방법을 응용해서 되므로 먼저 이것을 해보기로 한다.

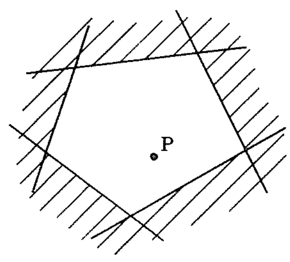


図 3.23 凸다각형의 영역

다각형의 各項点에는 왼쪽으로 돌려 번호를 붙여 놓은 것으로 한다. 3 각형 1—2—P의 면적을 먼저 기술한 식(3·45)에 의해 구하고 負(—)면 점 P가 직선 1—2의 점 1로부터 2를 향해 우측이라는 것을 알 수 있고 凸다각형 속에 점 P가 없는 것을 알 수 있다. 만약 면적이 正이면 직선 1—2의 좌측에 점 P가 있으므로 영역 내에 점이 있는 가능성을 나타내고 있다. 다시 다음의 辺 2—3과 점 P로 이루어지는 3 각형에 대하여 똑같은 판정을 하고 면적이 正으로 될 때만이 다음다음으로 모든 辺에 대하여 조사한다. 한번이라도 면적이 負(—)가 되면 점 P가 영역 밖에 있다는 것을 알 수 있다. 끝까지 면적이 正으로 남았을 때 점 P가 영역 내에 있었다고 할 수 있다.

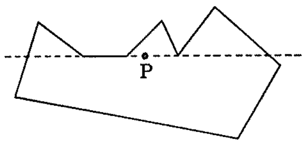


図 3.24 凹다각형 가운데 점P가 있는지 없는지의 판별

위의 방법은 계산량이 적으나 유감스럽게도 凸다각형의 경우에 한하여 유용한 방법으로서 일부라도 쑥 들어간 곳이 있는 凹다각형에는 적용할 수가 없다. 凹다각형의 경우는 점 P를 지나는 직선을 긋고 점 P에서 밖으로 나올때 까지의 영역을 나타내는 辺과 몇 회나 교차하는 가를 헤아려 본다. 회수가 奇数回이면 내측, 偶数回이면 외측으로 판별하는 방법이 하나의 방법인 것이다. 여기에는 그림 3·24와 같이 交点을 헤아리기 어려울때를 생각해서 프로그램을 만들지 않으면 안되는 어려움이 있다.