◀ 論　　文 ▶

非對稱急擴大채널의 層流流動 및 熱傳達 解析

元 昇 鎬* 孟 柱 星** 孫 炳 鎮**

Analysis of Laminar Flow and Heat Transfer in Asymmetric, Sudden Expansion Channel

Won Seung Ho · Maeng Joo Sung · Son Byung Jin

ABSTRACT

This analysis of numerical procedure is prediction of laminar flow and heat transfer at two dimension and steady flow in asymmetric sudden expansion channel.

At former study, to analyse the flows with separation, the full Navier-Stokes equation is used, but there are many difficulties to analyse, and although significant progress has been made in the development of efficient computational methods for the Navier-Stokes equations, very large computation times are still required.

In case of reward-facing flow, boundary-layer equation is used instead of full Navier-Stokes equation to analyse velocity fields, and result of this numerical analysis is good agreement with the given experimental study.

In this case, since the computer time required for the boundary-layer calculation is an order of magnitude less than required for the solution of the full Navier-Stokes equation, this boundary-layer model provides a good approximate solution.

* 正會員，漢陽大學校 大學院 機械工學

** 正會員，漢陽大學校 工大 機械工學科

NOMENCLATURE

$Aj, aj, a'j'$	: Coefficients appearing in the the finite-difference expressions for the boundary equation
Bj, bj, bj'	: 〃
cj, cj'	: 〃
dj, dj'	: 〃
ej, ej'	: 〃
Hj', hj	: 〃
h	: step height
H_i	: channel inlet height
H_o	: channel height downstream of step
L	: leading length
P	: pressure
P_x	: nondimensional presure gradient
P_r	: prantl nomber
T_o	: initial temperature
T_w	: heating or cooling wall temp.
T	: temperature
u	: x component of velocity
x	: coordinate along the surface
x_r	: reattachment point
y	: coordinate normal to the surface.
$\triangle Y$	: $Y_{j+1}-Y_j, Y_j-Y_{j-1}$
v	: Y component of velocity
ε	: convergence criteria
θ	: nondimensional temperature
υ	: kinematic viscosity
ρ	: density
Ψ	: streamfunction
Ψ_t	: total volume flow rate per unit width in a channel

Subscripts

e	: evaluated at the boundary-layer edge
i	: mesh index corresponding to x
j	: mesh index corresponding to y
r	: reattachment point
T	: total value

Superscripts

	: previous iteration level

1. 緖 論

하나의 step을 가진 急擴大 Channel (Sudden Expansion channel with a step) 內에서는 流體가 흐르는 表面에 不連續的인 變化가 생김으로써 壓力강하, 에너지 損失등 바람직하지 못한 現象을 수반하는 剝離現象 (Separation)이 발생한다. 이러한 境遇에 發生하는 剝離現象은 流動場內에 剝離領域을 形成하여 渦流를 일으킬 뿐아니라, 熱傳達에도 커다란 影響을 미친다.

이에 대한 유체특성에 대하여 Goldstein[1], Cherdron [2] Denham & Patrie[3]은 모델의 기하학적 변화로 인하여 발생하는 剝離에 관한 실험적 연구를 수행하였고, Denham[6], Kwon[5] 은 같은 모델에 대한 理論的 解析을 하였다. 그리고 熱傳達 特性의 연구는 거의 대부분이 난류에 대한 실험적 연구이다. 종래의 理論解析에서는 대부분이 난류에 대한 실험적 연구이다. 종래의 理論解析에서는 대부분 full Navier-Stokes 方程式을 使用하였으나, 해석상의 어려움이 많고 computer에 많은 時間이 所要된다는 缺點이 있었다. 本 硏究에서는 Reyhner [10]가 제안하였고 Cebeci [11] 등이 使用하여 좋은 結果를 얻은 FLARE의 假定을 使用하여 해석영역 전체가 하나의 境界層 方程式에 의하여 계산하도록 하였으며, Block Elimination[4] 을 適用하여 流體

流動과 熱傳達 特性을 解析하고 妥當性을 檢討하였다.

解析 範圍는, step 높이를 特性길이로 하고 channel 入口 평균속도를 사용한 Reynolds 數가 100에서 600까지이고, Prandtl 數가 0.7인 境遇에 대하여 解析하였다. 그리고 channel入口에서 step까지의 거리를 變化시킴으로써 생기는 step에서의 多樣한 境界層두께가, reattachment가 發生하는 곳까지의 거리 變化에 미치는 影響및 이 부근에서의 Edge velocity, Nusselt 數 변화에 對하여 考察하였다.

2. 理論 分析

本 硏究에서는 아래와 같은 假定下에서 Fig. 1에 表示된 하나의 step을 갖는 急擴大 channel 內에서의 流動과 熱傳達을 解析하기로 한다.

(1) 入口 channel과 擴大 channel이 接하는 面사이의 熱傳達과 自然對流의 影響은 무시한다.

(2) Channel 入口에서의 속도는 uniform 하다.

(3) 二次元 定常流動을 하는 非壓縮性流體이다.

(4) 流體의 物性値는 一定하다.

(5) step 높이는 入口 channel 높이에 비하여 비교적 작다.

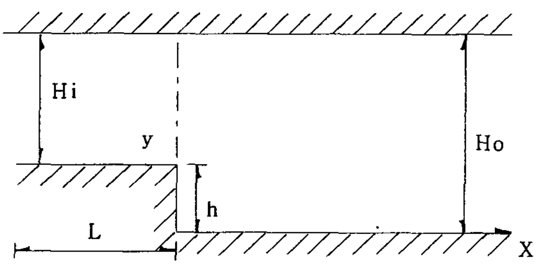

Fig. 1 schematic diagram of sudden expantion channel

속도, Ψ, 온도등은 다음과 같은 無次元 變數를 사용한다. U_o는 입구에서의 평균속도, T_w는 가열벽면의 온도이다.

$$U^*=u/u_o,\quad V^*=v/u_o,\quad P^*=p/eu_o^2$$

$$x^*=eu_o x/\mu,\quad \theta=(T-T_w)/(T_\infty-T_w),$$

$$h^*=eu_o h/\mu$$

$$\Psi^*=\rho\Psi/\mu,\quad \theta=(T-T_w)/(T_\infty-T_w),$$

$$h^*=\rho u_o h/\mu$$

(단, 편의상 이후의 계산식에서는 '*' 없앴음)

Fig.1에 表示된 모델에서, 얇은 剝離 領域에서의 x 方向의 convection 影響은 무시할만큼 작다는 FLARE 가정을 使用하면 무차원화된 支配方程式과 境界條件은 다음과 같다.

支配方程式

$$U=\frac{\partial\Psi}{\partial y}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (1)$$

$$cu\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdots(2)$$

$$cu\frac{\partial\theta}{\partial x}+v\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{k}{uc_p}\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}=\frac{2}{p_r}\cdot\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

단, $c=0\ ;\ u\leqq 0$

$c=1\ ;\ u>0$

境界條件

1) $-L\leqq x<0$: $u(x,h)=v(x,h)=0$

$u(x,H_i)=v(x,H_i)=0$

$\Psi(x,h)=0$

$\Psi(x,H_i)=\Psi_T$, 단,

$\Psi_T=\int_0^{H_i}u\,dy$

$\theta(x,h)=\theta(x,H_i)=0$

2) $x\geqq 0$: $u(x,0)=v(x,0)=0$

$u(x,H_i)=v(x,H_i)=0$

$\Psi(x,0)=0$

$$\Psi(x, H_i)=\Psi_T$$

$$\theta(x, 0)=\theta(x, H_i)=1$$

여기서 支配方程式들은 모두 Parabolic형태를 가지며 implicit finite difference를 便用하여 변형시키면 다음과 같다.

$$\circ \quad \frac{u_i^{i+1}+u_{j-1}^{i+1}}{2}=\frac{\Psi_j^{i+1}-\Psi_{j+1}^{i+1}}{\triangle y}$$

$$\circ \quad C\frac{u_j^{i+1}-u_j^i}{\triangle x}-\frac{\Psi_j^{i+1}-\Psi_j^i}{\triangle x}\frac{u_{j-1}^{i+1}-u_{j-1}^{i+1}}{2\triangle x}=P_x+\frac{1}{\triangle y}\cdot\left(\frac{u_{j+1}^{i+1}-u_j^{i+1}}{\triangle y}-\frac{u_j^{i+1}-u_{j-1}^{i+1}}{\triangle y}\right)\cdots(5)$$

$$\circ \quad cu_j^{i+1}\frac{\theta_j^{i+1}-\theta_j^i}{\triangle x}-\frac{\Psi_j^{i+1}-\Psi_j^i}{\triangle x}\cdot\frac{\theta_{j+1}^{i+1}-\theta_{j-1}^{i+1}}{2\triangle y}=\frac{1}{P_r}\frac{1}{\triangle y}\cdot\left(\frac{\theta_{j+1}^{i+1}-\theta_j^{i+1}}{\triangle y}-\frac{\theta_j^{i+1}-\theta_{j-1}^{i+1}}{\triangle y}\right)\cdots(6)$$

여기서 $P_x=-\dfrac{dp}{dx}$이고 식(5), (6)은 $(i+1)$ level의 값이 $(i+1)$level에서 계산되어야 할 값들이 포함되어 있으므로 비선형의 식들이다.

본 硏究에서는 Newton선형법을 사용하였으며 이 방법으로 수렴값을 얻지 못하는 경우에 lagging선형법을 사용하였다. Newton선형법을 적용하여 변환하면 아래와 같다.

$$A_j u_{j-1}^{i+1}+B_j u_j^{i+1}+\Psi_{j-1}^{i+1}-\Psi_j^{i+1}=0\cdots\cdots(7)$$

$$a_j u_{j-1}^{i+1}+b_j u_j^{i+1}+C_j u_{j+1}^{i+1}+d_j\cdot\Psi_j^{i+1}=e_j P_x+h_j\cdots\cdots(8)$$

$$TA_j u_j^{i+1}+TB_j\Psi_j^{i+1}+TC_j\theta_j^{i+1}+TD_j\theta_{j+1}^{i+1}=TH_j\cdots\cdots(9)$$

단, $A_j=\dfrac{\triangle y}{2}$, $B_j=\dfrac{\triangle y}{2}$

$$a_j=\frac{\widetilde{\Psi}_j^{i+1}-\Psi_j^i}{2\triangle x\triangle y}-\frac{1}{(\triangle y)^2}$$

$$b_j=\frac{c(2\widetilde{u}_j^{i+1}-u_j^i)}{\triangle x}+\frac{2}{(\triangle y)^2}$$

$$c_j=\frac{\Psi_j^i-\widetilde{\Psi}_j^{i+1}}{2\triangle x\triangle y}-\frac{2}{(\triangle y)^2}$$

$$d_j=\frac{\widetilde{u}_{j+1}^{i+1}-\widetilde{u}_{j-1}^{i+1}}{2\triangle x\triangle y}$$

$$e_j=1$$

$$h_j=\frac{c}{\triangle x}(\widetilde{u}_j^{i+1})^2+\frac{1}{2\triangle x\triangle y}\cdot(-\widetilde{u}_{j+1}^{i+1}\widetilde{\Psi}_j^{i+1}+\widetilde{u}_{j-1}^{i+1}\widetilde{\Psi}_j^{i+1})$$

$$TA_j=\frac{c}{\triangle x}(\widetilde{\theta}_j^{i+1}-\theta_j^i),$$

$$TB_j=\frac{\widetilde{\theta}_{j-1}^{i+1}-\widetilde{\theta}_{j+1}^{i+1}}{2\triangle x\triangle y}$$

$$TC_j=\frac{\widetilde{\Psi}_j^{i+1}-\Psi_j^i}{2\triangle x\triangle y}-\frac{1}{P_r(\triangle y)^2}$$

$$TD_j=\frac{c}{\triangle x}\widetilde{u}_j^{i+1}+\frac{2}{P_r(\triangle y)^2}$$

$$TH_j=\frac{\Psi_j^i-\widetilde{\Psi}_j^{i+1}}{2\triangle x\triangle y}-\frac{1}{P_r(\triangle y)^2}$$

여기서 '~'는 전 iteration의 계산값을 나타낸다.

3. 解析方法

支配方程式 中에서 연속방정식과 運動量方程式을 同時에 計算하는 Block Elimination Method를 便用하여 U, Ψ를 計算하고 여기서 얻은 값을 便用하여 Energy方程式을 計算하였다. Block Elimination Method를 식(7), (8)에 適用하면 아래와 같은 式을 얻는다.

$$\circ \quad u_j^{i+1}=c'_j\,u_{j+1}^{i+1}+e'_j P_x^{i+1}+H'_j \qquad (10)$$

$$\circ \quad \Psi_j^{i+1} = a_j' u_{j+1}^{i+1} + b_j' P_x^{i+1} + d_j' \qquad (11)$$

단, $c_j' = -c_j / \{ b_j + c_{j-1}' (A_j d_j + a_j) + d_j (a_{j-1}' + B_j) \}$

$a_j' = c_j' (B_j + A_j c_{j-1}' + a_{j-1}')$

$H_j' = \{ H_j - a_j H_{j-1}' - d_j (A_j H_{j-1}' + d_{j-1}') \} / \{ b_j + c_{j-1}' (A_j d_j + a_j) + d_j (a_{j-1}' + B_j) \}$

$b_j' = A_j e_{j-1}' + b_{j-1}' + (B_j + A_j c_{j-1}' + a_{j-1}') e_j'$

$d_j' = A_j H_{j-1}' + d_{j-1}' + H_j' (B_j + A_j c_{j-1}' + a_{j-1}')$

$e_j' = \{ e_j - a_j e_{j-1}' - d_j (A_j e_{j-1}' + b_{j-1}') \} / \{ b_j + C_{j-1}' (A_j d_j + a_j) + d_j (a_{j-1}' + B_j) \}$

식 (10), (11) 에서 알 수 있는 바와 같이 j+1 지점의 변수값이 決定되어야만 한다.

$j = MJ - 1$ 에서 式 (10), (11) 은

$$u_{MJ-1}^{i+1} = c_{MJ-1}' u_{MJ}^{i+1} + e_{MJ-1}' P_x^{i+1} + H_{MJ-1}' \qquad (12)$$

$$\Psi_{MJ-1}^{i+1} = a_{MJ-1}' u_{MJ}^{i+1} + b_{MJ-1}' P_x^{i+1} + d_{MJ-1}' \qquad (13)$$

그리고 $$P_x^{i+1} = \frac{1}{\triangle x} \{ (2 \tilde{u}_{MJ}^{i+1} - u_{MJ}^{i+1}) \tilde{u}_{MJ}^{i+1} - (\tilde{u}_{MJ}^{i+1})^2 \} \qquad (14)$$

$$u_{MJ}^{i+1} = 0 \qquad (15)$$

$$\Psi_{MJ}^{i+1} = \Psi_t \qquad (16)$$

위의 式 (12) 에서 式 (16) 까지를 풀면

$$P_x^{i+1} = \frac{\Psi_t - \frac{\triangle y}{2} H_{MJ}' - d_{MJ-1}'}{\frac{\triangle y}{2} e_{MJ-1}' + b_{MJ-1}'} \qquad (17)$$

式 (12), (13), (17) 에서 u, Ψ 를 決定하고 Energy 式에서의 θ_j 값은 Gauss Elimination Method 로 구할 수 있다.

4. 解析 結果및 고찰

Step 位置에서 거의 完全히 發達된 流動形態를 가지며 Reynolds Number 가 229 인 流動에 대하여 Denham[6]의 實驗값, Kwon[5]의 數值解와 本 硏究에서 使用한 境界層 方程式의 結果値를 比較한 것이 Fig.2 이다.

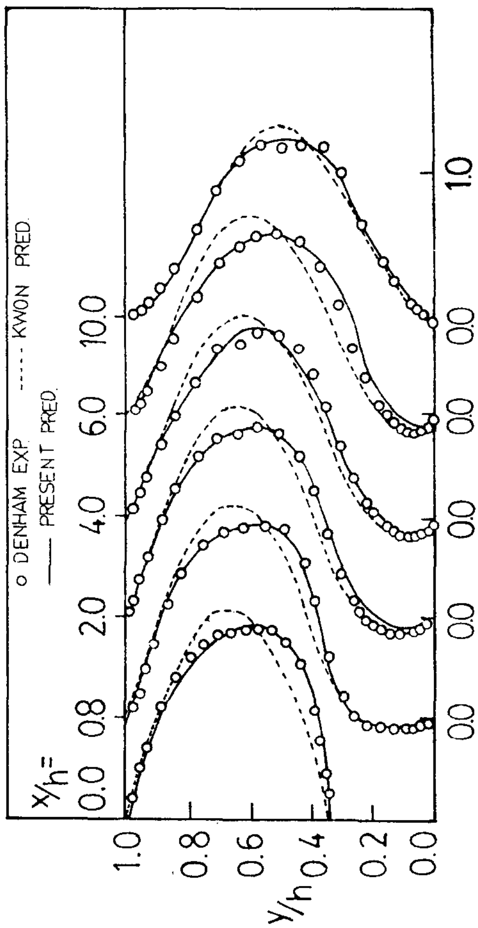

Fig. 2 Comparison of velocity profiles in step flow

본 예측값과 실험값이, Separation 밖의 領域에서뿐만 아니라 Separation 領域에서도 상당히 잘 一致한다는 것을 알 수 있다. 그러므로 本境界層 方程式은 Navier-Stokes Equation 全體를 解析한 것과 거의 같은 정도의 正確性을 갖는

同時에 적어도 1/10정도로 CPU time 을 절약할 수 있으며 Navier-Stokes Equation이 갖는 Elliptic特性 때문에 局部的인 singular point를 豫防할 수 있으므로 計算上의 오차도 줄일 수 있다.

Energy方程式에 대하여는 本 모델에 대하여 Prandtl number가 0.7, Reynolds number 가 431, Channel 높이에 대한 leading length의 比가 2인 Channel 入口에서의 流動狀態가 uniform한 경우에 대한 速度分布및 溫度分布를 각각 Fig.3과 Fig.4에 나타내었다. Fig.3 에서 Reattachment point가 5.6근방에서 생긴다는 것을 알 수 있으며, Fig.4에서 보면 이 근방에서의 온도구배가 가장 크다는 것을 알 수 있다.

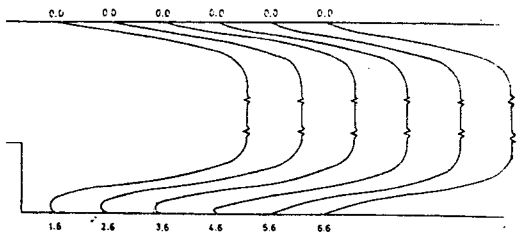

Fig.3 Prediction of velocity profiles in step flow, Reh = 431

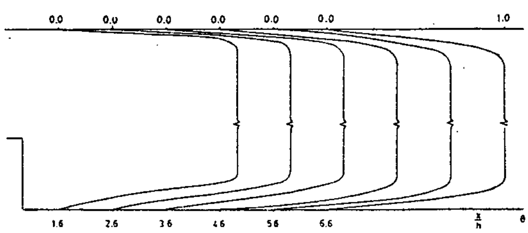

Fig.4 Prediction of temperature profiles in step flow, Reh = 431

그러므로 이 부근에서의 局部 熱傳達이 最大가 될 것이라는 것을 예측할 수 있으며, 이후의 Channel 에서는 ehannel 윗면과 아랫면의 溫度分布가 中心에 대하여 점차적으로 對稱을 이룬다는 것을 알 수 있다.

上記에서 說明한 바와 같이 Reattachment 가 되는 지점에서의 變化가 많이 일어날 것이라는 것을 예측할 수 있다. 이것은 速度 變化率이 가장 큰 곳에서 熱傳達이 最大가 될 것이라는 것과 一致하는 것이다. Fig.5는 Channel 入口에서의 流動狀態가 uniform하며 leading-length가 4.06 cm, 30.6 cm의 두 경우에 대하여 Goldstein[1)]의 實驗값과 比較한 것으로, 실험값과 비교적 잘 一致한다는 것을 알 수 있으며 두가지 leading length의 경우에, step 높이에 대한 Reattachment point 지점을 Reynolds number에 따라 쉽게 예측할 수 있다.

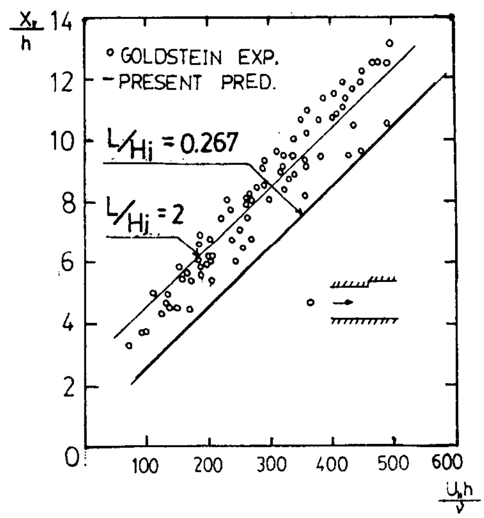

Fig. 5 Comparision of reattachment position at various Reynolds number

Reattachment point 부근에서의 無次元 edge velocity 分布를 Reynolds number 가 104에서 523까지의 여러 경우에 대하여 Channel 높이에 대한 leading length比가 0.267인 경우를 Fig. 6에 나타내었다. 여기서 보는 바와 같이 Reattachment point 지점에서 모든 曲線이 變曲點을 가지며, Reattachment point 以後에는 Recirculation flow의 影響이 사라지므로 이 point 直前까지의 急激한 edge velocity의 감소가 이 point를 지나면 완만해 진다고 말할 수 있다.

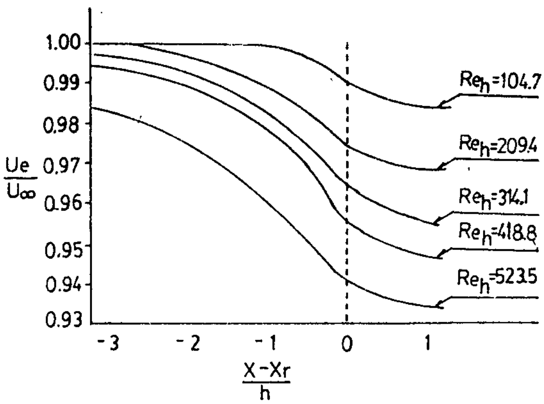

Fig. 6 Prediction of edge velocity

그리고 step位置에서의 displacement thickness가 Reattachment point에서의 Displacement thickness에 미치는 影響을 考察하기 위하여 Channel 높이에 對한 leading length의 比가 0.267, 2.0인 경우에 대하여 Fig. 7에 나타나 있다. 여기에서도 알 수 있는 바와 같이 Reynolds number에 따라서 無次元 displacement thickness의 變化보다는 step 位置에서의 displacement thickness에 따른 變化가 크다는 것을 알 수 있다. 그리고 Fig.8은 channel 높이에 대한 leading length 比가 2.0, Reynolds number가 486.57, 313.09 이며 Prandtl number가 0.7일때 平板 아랫면의 Nusselt Number 變化를 나타낸 것이며, Fig.

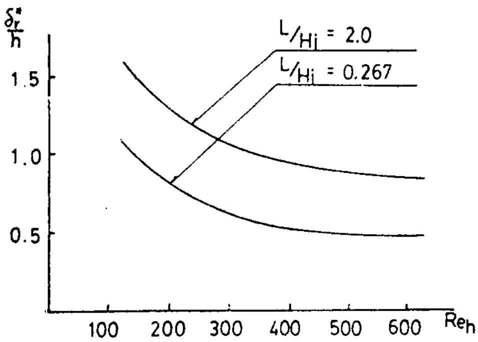

Fig. 7 Displacement thickness curves at various step in reattachment region

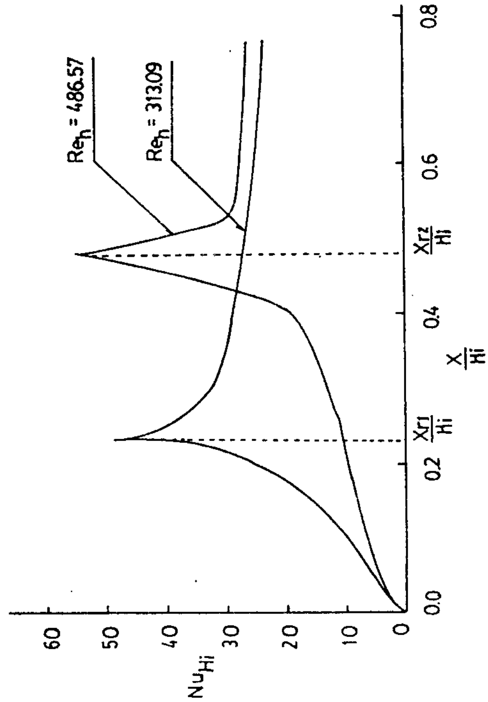

Fig. 8 prediction of Nusselt number at Reh = 486.57 , 313.09

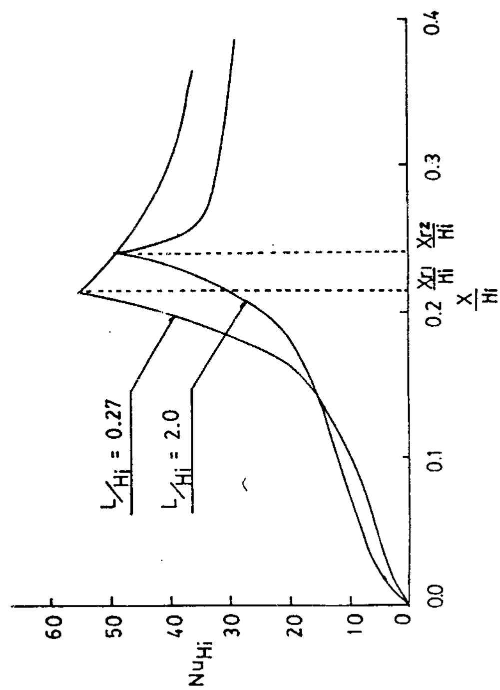

Fig. 9 Prediction of Nusswlt number at Reh = 313.09

9는 Regnolds number가 313.09이고 Prandgt number가 0.7인 경우에 대하여, Channel 높이에 대한 leading length比가 각각 0.267, 2.0의 각각의 Nusselt Number變化를 比較한 것이다. 여기에서 Nusselt number의 最大値는 모든 경우에서 Reattachment point 부근에서 일어난다는 것을 알 수 있다.

5. 結 論

1. 速度場은 Separation領域에서도 매우 잘 一致하여 Navier-Stokes Equation을 푸는 것에 比하여 境界層 近似式을 使用하는 것이 1/10 정도로 CPU time을 절약할 수 있으므로 本 모델과 같은 流動解析에서는 매우 유용한 方法이다.

2. Reattachment point까지의 거리는 Reynolds number와 線型的인 關係를 가지므로 그 point를 쉽게 豫測할 수 있다.

3. Leading length가 Reattachment point의 生成에 많은 영향을 주며, 따라서 熱傳達에도 많은 영향을 준다는 것을 알 수 있다.

參 考 文 獻

1. Goldstein, R.J., Eriksen, V.L., Olson, R.M., and Eckert, E.R.G. "Laminar Separation, Reattachment and Transition of the Flow over a Downstream-Facing Step." J. Basic Engineering 92 (1970): 732-741
2. Cherdron, W., Durst, F., and Whitelaw, J.H. "Asymmetric Flows and Instabilities in Symmetric Ducts with Sudden Expansions." J. Fluid Mechanics 84 (1978): 13-31
3. Denham, M.K., and Patric, M.A. "Laminar Flow over a Downstream Facing Step in a Two-Dimensional Flow Channel." Trans. Instn. Chemical Engineers 52 (1972): 361-367
4. Blottner, F.G. "Investigation of some Finite-Difference Techniques for solving the boundary-layer Equations." Computation Methods in Applied Mechanics and Engineering 6 (1975): 1-30
5. Kwon, O.K. "Prediction of the incompressible flow over a rearwardfacing step." Ph.D. thesis, Iowa State University (1981): 149
6. Denham, M.K., Briard, P., and Patrick, M.A. "A Directionally - Sensitive Laser Anemometer for velocity Measurements in Highly Turbulent Flows." J. Physics E; Scientific Instruments 8 (1975): 681-683
7. Mercer, W.E., Pearce, W.M., Hitchcock, J.E. "Laminar Forced Convection in the Entrance Region Between Parallel Flat Plates." J. Heat Transfer, (1967): 251-257
8. Filetti, E.G., Kays, W.M. "Heat Transfer in Separated, Reattached, and Redevelopment Regions Behind a Double Step at Entrance to a Flat Duct." J. Heat Transfer (1967): 163-167
9. Zemanick, P.P., and Dougall, R.S. "Local Heat Transfer Downstream of Abrupt Circular Channel Expansion." J. Heat Transfer (1970): 53-60

10. Reyhner, T.A., and Flugge-Lotz, I. "The Internation of Shock Wave with a Laminar Boundary Layer." Int. J. Nonlinear Mechanics 3 (1968): 173-199

11. Cebeci, T., Keller, H.B., and Williams, P.G. "Separating Boundary Layer Flow Calculation." J. Computational Physics 31 (1979): 363-378