

<論 文>

경사진 등은 평판위의 자연대류 유동에서의 와류 불안정성과 열전달 상관관계†

최 창 균* · 유 정 열** · 이 형 인***

(1983년 6월 16일 접수)

Vortex Instability and Heat Transfer Correlations in the Natural Convection Flow over Inclined Isothermal Flat Plates

C. K. Choi, J. Y. Yoo and H. I. Lee

Abstract

The critical conditions marking the onset of thermally induced vortices over an inclined isothermal plate are investigated using the linear stability theory. The stability equations are simplified by estimating the orders of magnitude of respective terms. The analysis is carried out under the assumption that for the system of large Prandtl numbers temperature disturbances are initiated within the conventional thermal boundary layer of the basic flow. The stability criteria obtained from the present results agree well with those of the existing quasi-parallel flow models. In addition it is found that the critical conditions generate the heat transfer correlation in good agreement with experiments. Therefore, it is suggested that the validity of existing theoretical models will be reexamined.

1. 서 론

경사진 가열 평판 위의 자연대류 유동에서의 와류형식의 불안정성의 발생은 매우 잘 알려져 있다. Sparrow와 Husar¹⁾는 전기화학적 유동 가시화 방법을 사용함

으로써 이런 와류의 특성을 조사하였다. 동일한 실험 방법을 사용하여 Lloyd와 Sparrow²⁾는 최초의 체계적인 실험결과, 즉, (수직선으로부터의) 경사각도가 17°보다 큰 경우에 불안정성은 길이 방향의 와류으로서 나타난다는 실험결과를 보고하였다. 그 이후로 실험적인 정보를 보충하기 위한 많은 이론적인 연구가 이루어 졌다.

Haland와 Sparrow³⁾는 선형 안정성해석을 수행함으로써, 재래적인 평행 유동 모형은 전반적인 영역에서 균일하게 유효하지는 않다는 것(예를 들면, $Pr \rightarrow \infty$ 의 경우에 파수가 0인 결과를 얻었는데, 이는 불합리함)을 보였다. 그들은 불안정성의 발생점에서 교란들은 각각의 기본유동 경계층내에 한정된다는 이른바 'bot-

†1983년도 대한기계학회 춘계학술대회('83. 5. 15)에서 발표

*서울대학교 공과대학 화학공학과

**정회원, 서울대학교 공과대학 기계공학과

***서울대학교 대학원 기계공학과, 현주소 Dept. of Thoret. and Appl. Mech., Univ. of Illinois at Urbana-Champaign, U.S.A.

ting 효과'를 제안 하였다. Hwang 과 Cheng⁴⁾은 기본 유동의 유동방향 의존성을 무시하지 않은 비평행 유동 모형을 사용함으로써 해석을 수행하였다. 이 모형을 사용함으로써 Kahawita와 Meroney⁵⁾은 교란들이 경계층 내의 구역에 한정되는 것을 보고하였다. 이 모든 해석들은 임계 Rayleigh 수가 실험자료들 보다 일반적으로 2크기 위수만큼 낮은 것을 예측하였다. Iyer와 Kelley⁶⁾는 파동 및 와동 형식의 불안정성을 함께 고려하였으며, 교란들의 공간적 성장을 검토하였다.

위의 안정성 해석과 관련하여 Choi⁷⁾의 가정에 특별한 관심이 기울어지는데, 그 내용은 큰 Prandtl 수의 계, 예를 들면, 물 및 silicone 유에 있어서 온도교란은 기본상태의 열경계층 내에서 발생된다는 것이다. Davis와 Choi⁸⁾는 이 개념을 밑으로부터 가열되는 평면 Couette 유동의 경우에 성공적으로 적용하였다. Davis등⁹⁾ 및 Choi와 Kim¹⁰⁾의 연이은 연구에서는 그들의 해석이 실험 결과와 일치하는 안정성 조건을 예측한다는 것이 밝혀졌다. 최근에, Yeo와 Choi¹¹⁾은 평면 Poiseuille 유동에 대하여 유사한 안정성 해석을 수행하였으며, Lee, Choi와 Yoo¹²⁾는 Blasius 유동, Kihm, Choi와 Yoo¹³⁾는 등은 냉각 유체층에 대하여 각각 유사한 안정성 해석을 수행하였다. 동일한 가정하에 얻어진 이 모든 이론적 결과들은 현존하는 실험결과들과 일관성이 있음을 알 수 있다. 그러므로, 본 연구의 목적은 Choi 등에 의하여 제안된 가정을 경사진 등은 평판에 적용하고 그 안정성 기준을 엄밀하게 재검토하는 것이다. 또한, 경사진 등은 평판에 대한 Fujii와 Imura¹⁴⁾의 실험을 고려함으로써, 안정성 기준에 근거를 둔 열전달 상관관계의 적용성을 검토하는 것이다.

2. 안정성 방정식

여기서 고려되는 계는 Fig. 1에 예시되었다. 벽 온도가 주위 온도보다 높을 때에는 ($T_w > T_\infty$), 경사진 평판위의 유체층에서는 자연대류 유동이 형성된다는 것은 잘 알려져 있다. 이 계에서는 부력에 기인하는 와동형식의 불안정성이 발생하는 유동방향의 위치가 중요한 문제로 된다. 와동의 발생은 대류유동의 변화를 일으키고 열전달을 증진시킨다.

2차유동 발생이전의 기본상태에서 유동 및 온도 분포는 다음 방정식들은 만족시킨다³⁾:

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + w_0 \frac{\partial u_0}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} + \beta g \cos \alpha (T_0 - T_\infty) \quad (2)$$

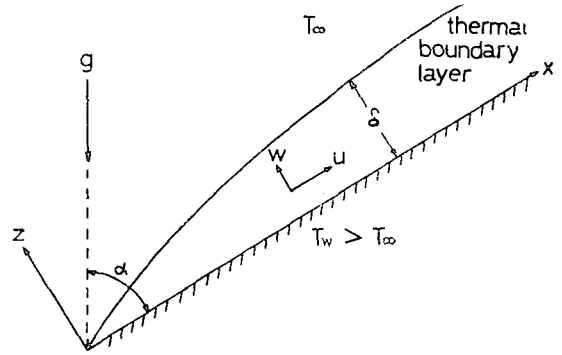


Fig. 1 Schematic diagram of an inclined isothermal flat plate

$$u_0 \frac{\partial T_0}{\partial x} + w_0 \frac{\partial T_0}{\partial z} = k \frac{\partial^2 T_0}{\partial z^2} \quad (3)$$

Ruckenstein¹⁵⁾에 의하여 제안된 바와 같이 열경계층두께 δ 를 온도와 속도장에 대한 공동길이 척도로 취하여 각항의 크기 위수를 검사하면 다음의 관계가 얻어진다:

$$|u_0| \sim \left| \frac{x}{\delta} w_0 \right| \sim \left| \frac{g\beta\delta^2\Delta T \cos \alpha}{\nu} \right| \sim \left| \frac{\delta \Delta p}{\rho \nu \tan \alpha} \right| \quad (4)$$

$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2}$ 이므로, $x \gg \delta$ 와 $\tan \alpha \sim 1$ 일 때, 기본유동 방정식 (1)~(3)은 유효하다는 것을 알 수 있다.

정상 와동 불안정성에 대하여 선형 섭동 방정식들은 통상적인 방법으로 구하여 진다^{3,4)}:

연속 방정식

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0 \quad (5)$$

운동 방정식

$$\frac{\partial(u_0 u_1)}{\partial x} + w_0 \frac{\partial u_1}{\partial z} + w_1 \frac{\partial u_0}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial x} + \nu \nabla^2 u_1 + g\beta \cos \alpha T_1 \quad (6)$$

$$u_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} + w_0 \frac{\partial v_1}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial y} + \nu \nabla^2 v_1 \quad (7)$$

$$u_0 \frac{\partial w_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial(w_0 w_1)}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial z} + \nu \nabla^2 w_1 + g\beta \sin \alpha T_1 \quad (8)$$

에너지 방정식

$$u_0 \frac{\partial T_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial T_0}{\partial x} + w_0 \frac{\partial T_1}{\partial z} + w_1 \frac{\partial T_0}{\partial z} = k \nabla^2 T_1 \quad (9)$$

여기서 하첨자 "0"은 기본 양들을 나타내며 "1"은 교란양들을 나타낸다. 위 방정식 (6)~(8)에서 각 항의 크기 위수를 검토하면 다음 관계가 얻어진다:

$$|u_1 \tan \alpha| \sim |v_1| \sim |w_1| \sim \left| \frac{g\beta\delta^2 \sin \alpha}{\nu} T_1 \right| \sim \left| \frac{\delta}{\rho \nu} p_1 \right| \quad (10)$$

방정식 (4)와 (10)에 의하여 규정되는 여러양들의 크기 위수를 고려하면, 크기가 작은 항들을 무시함으로써 안정성 방정식들을 다음과 같이 표현할 수 있다:

$$w_1 \frac{\partial u_0}{\partial z} = \nu \nabla_2^2 u_1 + g\beta \cos \alpha T_1 \quad (11)$$

$$\nu \nabla_2^2 \nabla_2^2 w_1 + g\beta \sin \alpha \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} = 0 \quad (12)$$

$$w_1 \frac{\partial T_0}{\partial z} = k \nabla_2^2 T_1 \quad (13)$$

여기서 $\nabla_2^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 이다. 이 방정식들은 평행유동 모형에서의 방정식들과 동일한 모양을 갖는다⁴⁾. 그러므로 위에서의 상세한 유도과정들은 경계층 유동에서 평행유동 모형을 보완할 수 있다.

이제, 각각의 유동방향 위치 x_c 에서 기본유동의 속도 및 온도분포를 동결(freezing)시킴으로써, 통상적인 정규형식(normal mode) 접근방법으로 안정성 해석을 수행할 수 있다. 즉, x_c 에서 교란들의 일반해는 수평방향의 파수(horizontal wave number)를 "a", 허수단위를 i로 표시하여

$$(u_1, v_1, w_1, T_1) = (u^*(z), v^*(z), w^*(z), \theta^*(z)) \exp(iay) \quad (14)$$

의 형태로 구성할 수 있다. 방정식들을 적절한 무차원 형태로 나타내기 위하여 다음과 같은 무차원수들을 도입한다.

$$\begin{aligned} (\xi, \zeta) &= \frac{1}{\delta}(y, z), \quad (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = \frac{\delta}{k}(u_0, v_0, w_0), \quad (\bar{u}^*, \bar{v}^*, \bar{w}^*) \\ &= \frac{\delta}{k}(u^*, v^*, w^*), \quad a^* = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \delta a, \quad Pr = \frac{\nu}{k}, \\ Gr_x &= \frac{g\beta(T_w - T_\infty)x^3}{\nu^2}, \quad Ra_x = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)x^3}{k\nu}, \\ Ra^* &= \frac{g\beta\Delta T\delta^3}{k\nu}, \quad \theta_0 = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} = \frac{T - T_\infty}{\Delta T}, \\ \theta^* &= \frac{T_1}{\Delta T} \end{aligned} \quad (15)$$

여기서 Ra^* 는 δ 에 근거를 둔 Rayleigh 수이다. 그러면 안정성 방정식들은 다음과 같이 된다. 단, $D = \frac{d}{d\xi}$ 이다.

$$\frac{1}{Pr} [\bar{w}^* D \bar{u}_0] = (D^2 - a^{*2}) \bar{u}^* + Ra^* \cos \alpha \theta^* \quad (16)$$

$$(D^2 - a^{*2})^2 \bar{w}^* + Ra^* a^{*2} \sin \alpha \theta^* = 0 \quad (17)$$

$$\bar{w}^* D \theta_0 = (D^2 - a^{*2}) \theta^* \quad (18)$$

이제 무한대의 Pr 수에 대한 단순화된 경우를 고찰하기로 한다. 이 조건하에서는 온도 교란은 기본 유동의 열경계층 내에서 발생되고, 속도교란은 전체유체층으로 전파된다고 가정할 수 있다. 이와같은 Choi⁷⁾의 가정에 의하여 다음과 같은 조건이 이 문제에 부과될 수 있다:

$$\theta^* = 0 \quad (\zeta \geq 1) \quad (19)$$

위의 표현은 Haaland와 Sparrow⁹⁾에 의하여 제안된 'bottling 효과'를 고려함으로써도 정당화 될 수 있다. 물론 'bottling 효과'는 초기에 정지하고 있는 유체층의 계에 대하여 서술되지는 않았으나, 식 (19)의 조건은 $Pr \rightarrow \infty$ 의 경우에 다른 아무 제한없이 적용될 수 있다.

따라서 열 경계층 외부에서의 교란들은 하첨자 "A"로, 열경계층 내부에서의 교란들은 하첨자 "B"로 표시하면, 안정성 방정식과 경계조건은 다음과 같이 된다.

$$(D^2 - a^{*2}) \bar{u}_A^* = (D^2 - a^{*2})^2 \bar{w}_A^* = \theta_A^* = 0 \quad (\zeta \geq 1) \quad (20)$$

$$\bar{u}_A^* = \bar{w}_A^* = D \bar{w}_A^* = 0 \quad (\zeta \rightarrow \infty) \quad (21)$$

$$(D^2 - a^{*2}) \bar{u}_B^* + Ra^* \cos \alpha \theta_B^* = 0 \quad (22)$$

$$(D^2 - a^{*2})^2 \bar{w}_B^* + Ra^* \sin \alpha \theta_B^* = 0 \quad (23)$$

$$\bar{w}_B^* D \theta_0 = (D^2 - a^{*2}) \theta_B^* \quad (24)$$

$$\bar{u}_B^* = \bar{w}_B^* = D \bar{w}_B^* = \theta_B^* = 0 \quad (\zeta = 0) \quad (25)$$

지극히 큰 Pr 수에 대하여는 관성항들이 무시될 수 있음은 주목할 만한 사실이다. $\zeta=1$ 에서의 중간 경계면 조건들은 교란속도, 응력 및 온도가 모두 연속이라는 가정으로부터 유도된다:

$$\bar{u}_A^* - \bar{u}_B^* = \theta_A^* - \theta_B^* = 0 \quad (\zeta=1) \quad (26)$$

$$\bar{w}_A^* - \bar{w}_B^* = D \bar{w}_A^* - D \bar{w}_B^* = 0 \quad (\zeta=1, n=1, 2, 3) \quad (27)$$

방정식 (20)~(27)을 검토하면 Blasius 유동($\alpha=90^\circ$)에 대하여는 $\bar{w}^* \equiv 0$ 임을 알 수 있다. 그러므로, Lee, Choi와 Yoo¹²⁾에 의하여 예측될 수 있는 바와 같이 결과로서 나타나는 운동은 규칙적인 길이 방향 와동으로 구성된다. 가열된 수직 평판($\alpha=0^\circ$)의 경우에는 $\bar{w}^* = \bar{v}^* = \bar{w}^* = \theta^* = 0$ 의 해만이 얻어지므로 와동양식의 교란에 대하여는 항상 안정하게 된다. 한편, Sparrow, Tsou와 Kurtz¹⁶⁾의 파동양식의 불안정성 해석에 의하면, $Pr > 5$ 에 대하여 점근적 안정성 조건 $Gr_x = (\text{constant}) Pr^3$ 이 얻어진다. 그러므로, 가열 수직 평판을 따르는 유동은 $Pr \rightarrow \infty$ 에 대하여 와동 및 [파동 양식의 불안정성에 관하여 모두 안정하다고 결론 지을 수 있다. 이 추측은 방정식 (10)에 의하여 규정된 관계로부터 직접 얻어질 수도 있다. 이 극한 경우를 고려함으로써, $Pr \rightarrow \infty$ 에 대한 본 안정성 방정식들은 타당성이 있는 것으로 여겨진다. 보다 상세한 토의는 4절의 후반부에서 계속된다.

3. 안정성 해석

무한대의 Pr 수에 대한 본 계의 안정성 방정식들은 다음과 같다.

$$\bar{w}_A^* = [c_1 + c_2 \zeta] \exp(-a^* \zeta) \quad (\zeta \geq 1) \quad (28)$$

$$[(D^2 - a^{*2})^3 - a^{*2} Ra^* \sin \alpha D \theta_0] \bar{w}_B^* = 0 \quad (\zeta \leq 1) \quad (29)$$

여기서 c_1 과 c_2 는 상수들이다. \bar{w}_B^* 에 대한 적절한 경계조건들은 아래와 같이 주어진다 :

$$\begin{aligned} \bar{w}_B^*(0) = D\bar{w}_B^*(0) = (D^2 - a^{*2})^2 \bar{w}_B^*(0) = D^n \bar{w}_A^*(1) \\ - D^n \bar{w}_B^*(1) = 0 \quad (n=0, 1, 2, 3, 4) \end{aligned} \quad (30)$$

주어진 위치 x_c 에 대하여, 불안정성의 발생점을 나타내는 임계조건 $Ra_c^* \sin \alpha$ 와 a_c^* 는 위의 경계조건을 만족시켜야 한다.

안정성 해석에서 마주치게 되는 수학적인 어려움을 극복하기 위하여 기본온도분포는 적분방법에 근거를 둔 형태로 가정한다.

$$\theta_0 = (1 - \zeta)^2 \quad (\zeta \leq 1) \quad (31)$$

그러면 방정식 (29)의 해는 Sparrow, Goldstein 와 Jonsson¹⁷⁾에 의하여 개발된 급속히 수렴하는 벽 급수를 사용함으로써 해석적으로 구하여 질 수 있다. 즉, 해는 6개의 무한급수의 합으로 표시될 수 있다.

$$\bar{w}_B^* = \sum_{j=3}^{\infty} c_j g_j(\zeta) \quad (32)$$

$$\begin{vmatrix} -\left\{g_5(1) + \frac{a^{*2}}{6}g_7(1)\right\} & -g_6(1) & -g_8(1) & e^{-a^*} & e^{-a^*} \\ -\left\{g_5'(1) + \frac{a^{*2}}{6}g_7'(1)\right\} & -g_6'(1) & -g_8'(1) & -a^*e^{-a^*} & (1-a^*)e^{-a^*} \\ -\left\{g_5''(1) + \frac{a^{*2}}{6}g_7''(1)\right\} & -g_6''(1) & -g_8''(1) & a^{*2}e^{-a^*} & -a^*(2-a^*)e^{-a^*} \\ -\left\{g_5'''(1) + \frac{a^{*2}}{6}g_7'''(1)\right\} & -g_6'''(1) & -g_8'''(1) & -a^{*3}e^{-a^*} & a^{*2}(3-a^*)e^{-a^*} \\ -\left\{g_5^{IV}(1) + \frac{a^{*2}}{6}g_7^{IV}(1)\right\} & -g_6^{IV}(1) & -g_8^{IV}(1) & a^{*4}e^{-a^*} & -a^{*3}(4-a^*)e^{-a^*} \end{vmatrix} = 0 \quad (37)$$

여기서 프라임은 ζ 에 관한 미분을 나타낸다. 주어진 a^* 값에 대하여 $Ra^* \sin \alpha$ 의 값이 식 (37)로부터 구하여진다. $Ra^* \sin \alpha$ 대 a^* 의 도표에서 $Ra^* \sin \alpha$ 의 최저치가 주어진 x_c 에 대한 와류의 발생을 표시하는 임계치이다. x_c 에 관한 정보는 δ 에 포함되어 있음이 주목된다.

4. 결과 및 검토

열 경계층두께 δ 의 길이 척도에 근거를 둔 와동 형식에 대한 안정성 기준은 다음과 같이 찾아진다.

$$Ra_c^* \sin \alpha = 670, \quad a_c^* = 1.90 \quad (38)$$

원존하는 이론적 해석^{3,4,5,6)}과 실험들^{1,2)}은 x 에 근거를 둔 안정성 기준을 예측하였으므로, 효과적인 비교를 위하여는 본 결과들은 이러한 유동방향 거리의 길이 척도로 환산되어야 한다.

기본 유동에 대하여는 엄밀해들은 Ostrach¹⁸⁾에 의하

$$g_j = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(j)} \zeta^n \quad (33)$$

여기서 c_j 와 $c_n^{(j)}$ 는 $Ra^* \sin \alpha$ 와 a^* 의 함수이다. 방정식 (29)로부터 순환공식은 다음과 같이 구해진다.

$$c_{-1}^{(j)} = 0, \quad c_n^{(j)} = \delta_{nj} \quad (n=0, 1, 2, 3, 4, 5) \quad (34)$$

$$\begin{aligned} c_n^{(j)} = \frac{1}{n(n-1)} \left[3a^{*2}c_{n-2}^{(j)} - \frac{1}{(n-2)(n-3)} \{ 3a^{*4}c_{n-4}^{(j)} \right. \\ \left. - \frac{1}{(n-4)(n-5)} [(a^{*6}c_{n-6}^{(j)} - 2a^{*2}Ra^* \sin \alpha)c_{n-6}^{(j)} \right. \\ \left. + 2a^{*2}Ra^* \sin \alpha c_{n-7}^{(j)}] \right] \quad (n \geq 6) \end{aligned} \quad (35)$$

여기서 δ_{nj} 는 Kronecker delta 이다. $\zeta=0$ 에서의 경계조건으로부터

$$c_3 = c_4 = 0 \quad \text{및} \quad c_7 = \frac{a^{*2}}{6} c_5 \quad (36)$$

$\zeta=1$ 에서의 나머지 조건들로부터 5개의 미지의 상수, c_1, c_2, c_5, c_6, c_8 에 대한 5개의 방정식들을 얻는다. 모두는 0이 아닌 해를 얻기 위하여는 이 상수들의 계수로 구성된 다음의 5×5 행렬식의 값이 0이 되어야 한다.

여 구해진다. 그의 연구에 근거하여 길이 척도의 환산이 이루어질 것이다. 기본방정식 (1)~(3)을 만족시키는 상사변수는 잘 알려진 바와 같이

$$\eta = cx^{-1/4}z; \quad c = \left(\frac{g\beta\Delta T \cos \alpha}{4\nu^2} \right)^{1/4} \quad (39)$$

결과적으로 δ 는 다음과 같이 주어지며

$$\delta = \frac{\eta_T}{c} x^{1/4} = x \left(\frac{Gr_x \cos \alpha}{4} \right)^{-1/4} \eta_T \quad (40)$$

방정식 (38)은 다음과 같이 환산된다.

$$Ra_{x,c} = Ra_c^* \left(\frac{x}{\delta} \right)_c^3 = \left(\frac{\cos \alpha}{4} \right)^3 \left[\frac{670}{(\eta_T Pr^{1/4})^3 \sin \alpha} \right]^4 \quad (41)$$

여기서 Ra_x 는 길이 척도 x 를 가지는 Rayleigh 수이며 하첨자 “c”는 임계조건을 나타낸다. Ostrach¹⁸⁾의 수치계산에 근거를 두어 구하여진 $\eta_T Pr^{1/4}$ 대 $Pr^{-1/4}$ 의 도표를 Fig. 2에 예시 하였는데, 여기서 η_T 는 온도가 $\theta_0(\eta_T) = 0.01$ 이 되는 평판으로부터의 거리로 정의한다. 이 그림으로부터 $\eta_T Pr^{1/4}$ 의 값은 $Pr \rightarrow \infty$ 에 따라 접근

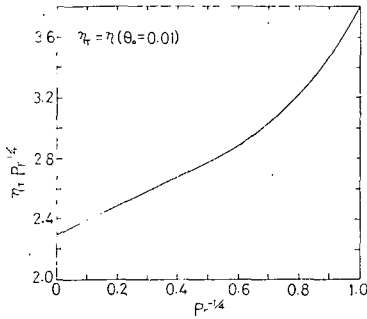


Fig. 2 The estimation of $\eta\tau Pr^{1/4}$ as $Pr \rightarrow \infty$ from the computations of Ostrach¹⁸⁾

치를 갖는다는 것을 알 수 있으며, 그 값은

$$\eta\tau Pr^{1/4} \approx 2.3 \quad (42)$$

임이 찾아진다. $\eta\tau$ 값의 유효성은 부분적으로 Fig. 3에 명시되었는데, $Pr=1,000$ 에 대하여 $\eta\tau=0.44[\theta_0(0.44)=0.01]$ 로 하면 식 (31)에 의하여 표현된 근사온도분포는 엄밀해와 잘 일치한다. 그러므로, 현재의 근사방법은 타당성이 있는 것으로 여겨진다.

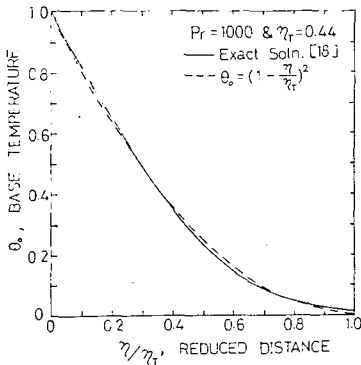


Fig. 3 The comparison between exact and approximate solutions for $Pr=1000$

안정성 조건은 x 에 관하여 다음과 같이 쓰여진다 :

$$(Ra_{x,c} \cos \alpha)^{1/4} \tan \alpha = 19.5 \text{ and } a_{x,c} = 0.58(Ra_{x,c} \cos \alpha)^{1/4} \quad (43)$$

여기서 $a_{x,c}$ 는 길이척도 x_c 를 가지는 입제파수이다. 이것은 다소 놀라운 결과이다. 왜냐하면 위의 매개변수들은 제래적인 안정성해석^{3,4)}에서와 완전히 동일하기 때문이다. Pr 의 감소에 따라서 Ra_c^* 와 $\eta\tau Pr^{1/4}$ 은 점차로 증가할 것이 기대된다. 따라서 식 (43)에 규정된 조건들은 Pr 의 약한 함수이다(Table 1을 보라). 이 관점은 실험결과²²⁾로도 입증될 수 있다. 안정성 기준에 대한 Pr 수의 영향은 장차 계속적인 연구를 요한다.

식 (38)~(43)을 사용함으로써 본 안정성 방정식의 정당성을 시험하기 위한 관계식이 구해진다.

$$\frac{\delta}{x} = 0.17 \tan \alpha \quad (x=x_c) \quad (44)$$

이 관계로부터 안정성 방정식을 유도하는데 사용된 $x)\delta$ 의 가정은 큰 α 에 대하여 유효하지 않다는 것을 알 수 있다. 그러나, 식 (4)와 (10)에 의하여 규정된 관계가 성립되면 $\alpha \rightarrow 90^\circ$ 에 따라 u_1 는 지극히 작아지며 관계식 (4)의 세제항은 무시될 수 있다. 만일 기본유동이 Blasius 유동의 형태라면, $x)\delta$ 위 가정은 큰 Pr 에 대하여 여전히 유효하다. 이 경우에는 식 (39)의 상사변수는 사용될 수 없다. $\alpha=90^\circ$ 에 대하여는 현재의 경사진 평판문제는 초기에 정지하고 있는 유체층에 대한 시간에 의존하는 Rayleigh-Benard 문제로 된다. 관계식 (4)를 유지하기 위한 기본유동은 존재하지 않을 것이다. 만일 불안정성이 규칙적인 2차원 롤의 형태로 나타난다면, 식 (10)에서의 교란양들 간의 관계는 여전히 유효할 것이다. 그러므로, 식 (44)는 이 계에 적용될 수는 없다. 이 시간에 의존하는 가열문제에 대하여 Kihm, Choi와 Yoo¹³⁾는 순수열전도의 열침투깊이 내에 온도교란들을 한정시킴으로써 안정성 해석을 수행하였다. 그들의 이론적인 결과들을 의심시키면, 안정성 기준은 아래와 같다.

$$Ra_c^* \approx 685, a_c^* \approx 1.91 \quad (Pr \rightarrow \infty) \quad (45)$$

이 기준들을 식 (38)의 본 결과와 비교하면, 그 일치성은 매우 놀랄만한 것이다. 그러므로 안정성 방정식 (20)~(27)은 $Pr \rightarrow \infty$ 의 경우에 대하여 경사진 평판의 전 영역에 걸쳐서 유효하다는 것을 알 수 있다. 또한 열경계층 두께는 열적불안정성의 해석에 적절한 단일의 길이 척도임이 명백하다. 기본유동에 있어서도 그 지배적인 역할은 Ostrach¹⁸⁾의 해석적 해에서와 같이 뚜렷하게 나타나고 있다.

경사진 평판에 대한 본 안정성 기준은 Haaland와 Sparrow³⁾ 및 Hwang과 Cheng⁴⁾과 비교되어 Table 1에 보여진다. 본 안정성 방정식들이 평행유동모형으로부터 유도된 방정식들과 동일한 모양을 갖더라도, 본 결과들은 비평행유동 모형의 결과들과 정성적으로 잘 일치하는 것을 알 수 있다. 비평행 유동모형에서는 본 해석절차에 의하여 얻어진 안정성조건들이 와동형성에 대한 실험적 관찰자료들과 근접하게 될 것이다. 그러나 우선 정규형식 접근방법을 사용한 비평행유동 모형의 유효성이 설명되어야 한다. 단일 길이 척도로서 제래적인 열경계층 두께를 사용하는 본 연구는 일반성을 상실하지 않고서 정규형식 접근방법을 채택하는 것을

Table 1 The comparison of the present stability criteria with those of Haaland and Sparrow²³⁾ and Hwang and Cheng⁴⁾

Case	$(Ra_{x,c} \cos \alpha)^{1/4} \tan \alpha$	$a_{x,c}/(Ra_{x,c} \cos \alpha)^{1/4}$
Present study $Pr \rightarrow \infty$	19.5	0.58
Haaland and Sparrow parallel flow model $Pr=6.7$ quasi-parallel flow model $Pr=6.7$	1.1	0
	13.4	0.53
$Pr=0.733$	9.7	0.46
Hwang and Cheng parallel flow model $Pr=1000$ quasi-parallel flow model $Pr=1000$	3.5	0.2
$Pr=10$	17.0	0.54
$Pr=10$	14.1	0.51
$Pr=0.72$	10.6	0.48

가능하게 한다. 명백하게 온도교란의 전파구역이 안정성 기준을 통제한다.

5. 열전달 상관관계

최근에, Choi와 Hwang¹⁹⁾은 식 (45)에서 Ra_c^* 의 안정성 조건이 열대류에서의 열전달 특성을 예측할 수 있음을 보고하였다. 본 연구에서와 유사한 절차를 사용함으로써 Howard²⁰⁾의 이른바 경계층 불안정성 모형이 연관되었다.

난류 열대류에서의 열전달이 표면 벽 근처의 얇은 열경계층을 가로지르는 온도차이에 의하여 주로 통제되므로^{20, 21)}, 국소 Nusselt 수와 국소 Rayleigh 수와의 관계는 다음과 같다.

$$Nu_x = \frac{x}{\delta} = \left(\frac{Ra_x}{Ra_c^*} \right)^{1/3} \quad (46)$$

식 (38)을 위의 식에 대입함으로써, 경사진 가열 평판을 따르는 난류열대류에서의 열전달 상관관계는 다음과 같아진다 :

$$Nu_x = 0.11 (\sin \alpha Ra_x)^{1/3} \quad (47)$$

$$Nu_L = 0.15 (\sin \alpha Ra_L)^{1/3} \quad (48)$$

여기서 Nu_L 은 유동방향 길이 L 에 걸친 평균 Nusselt 수 ($\frac{4}{3}$ 의 인자를 곱한)를 나타낸다.

Fujii와 Imura¹⁴⁾는 (30×15)cm와 (5×10)cm의 평판으로 $Pr=2\sim 9$ 에 대한 실험을 수행하였다. 그들은

5cm의 작은 평판에 대하여는 $Nu_L=0.16Ra_L^{1/3}$, 30cm의 큰 평판에 대하여는 $Nu_L=0.11Ra_L^{1/3}$ 의 결과를 얻었다. 큰 값의 Ra_L 에 대한 이 상관관계들에 비하면 식 (48)에 의하여 규정된 본 상관관계는 실험과 잘 맞는다는 것을 알 수 있다. 경사각도의 효과를 나타내는 식 (48)의 $\sin \alpha$ 항은 상당한 의미가 있음이 주목된다. 특히 수직 평판에서 와동 물들에 의한 열전달 증진은 무시할 수 있으므로 $\sin \alpha$ 를 포함하는 본 상관관계는 Fujii와 Imura의 상관관계보다 더 합리적인 것이다. $Ra_x \leq Ra_{x,c}$ 에 대하여, Fujii와 Imura는 다음 상관관계를 제안하였다.

$$Nu_L = 0.56 (Ra_L \cos \alpha)^{1/4} \quad (49)$$

위의 상관관계는 실험과 잘 일치함으로, $Ra_x \geq Ra_{x,c}$ 에 대하여 식 (48)과 (49)에 근거를 둔 새로운 상관관계를 수립하는 것이 시도되었다.

본 문제와 연관되어 층류 경계층에서 혼합된 강제 및 자연대류 열전달 현상에 대한 Acrivos²²⁾의 해석을 고찰한다. 그는 다음의 열전달 관계식이 계를 매우 잘 나타낸다고 제안하였다.

$$Nu = [Nu_0^4 + Nu_1^4]^{1/4} \quad (50)$$

여기서 하첨자 “0”과 “1”은 각각 순수한 강제대류 및 순수한 자연대류 접근치를 나타낸다. 식 (48), (49), (50) 및 Holman²³⁾의 식 (7~44)에 근거하여 경사진 평판을 따르는 새로운 경험적인 열전달 상관관계가 다음과 같이 수립되었다 :

$$Nu_L = [(0.56)^4 Ra_L \cos \alpha + (0.15 \sin^{1/3} \alpha)^4 (Ra_L^{1/3} - Ra_{x,c}^{1/3})^4]^{1/4} \quad (Ra_L \geq Ra_{x,c}) \quad (51)^*$$

이 상관관계는 파동 불안정성이 지배적으로 되기 이전까지 유효하다는 것이 주목된다. 상관관계 (51)은 Fig. 4에 보여진 바와 같이 Fujii와 Imura¹⁴⁾의 실험결과와 알맞게 잘 일치하는 것을 알 수 있다. 30cm 길이의 평판에서 본 상관관계는 실험자료보다 약간 높은 값을 예측한다. 이는 아마도 본 연구에서 $Pr \rightarrow \infty$ 가 정한데 기인하는 것으로 여겨진다. 그러나 매우 작은 Pr 의 경우를 제외하고는 열전달 및 안정성 기준은 Pr 수의 약한 함수인 것으로 추측될 수 있다. 그림에서 교란의 공간적 성장은 이론적인 와류형식 불안정성 발생위치근처에서 매우 작다는 것이 보여진다. 이와 유사한 경향은 밑으로부터 가열되는 Blasius 유동¹²⁾에서도 이론적으로 보여졌다. 이것은 일반적으로 받아들여

*국소 Nusselt 값은 식 (51)의 0.56 대신에 0.42, 0.15 대신에 0.11, Ra_L 대신에 Ra_x 를 대입함으로써 구할 수 있다.

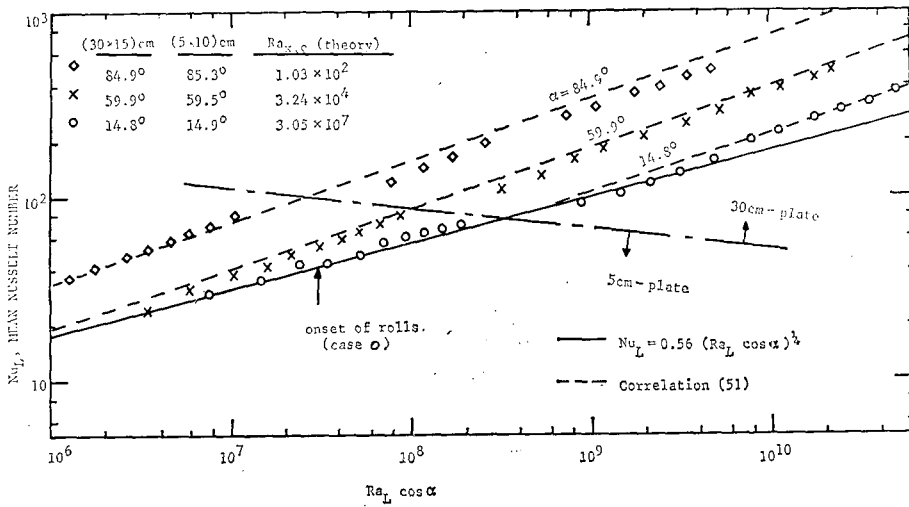


Fig. 4 The comparison between the present heat transfer correlations and the experimental results of Fujii and Imura¹⁴⁾

지고 있는 바와 같이 경계층 유동에서 불안정성이 탐지되고 관찰되기까지는 상당한 거리가 요구되기 때문이다. 이것이 사실이라면, 경계층 유동에서 교란의 크기의 급속한 증폭은 기대되지 않으며, 따라서 안정성 기준에 대한 x 의존 항들은 무시되어야 할 것이다.

6. 결 론

제변수들의 크기 위수를 비교함으로써, 평행유동 모형에서와 같은 안정성 방정식들이 유도되었다. 재래적인 열 경계층내에 온도 교란을 한정시킴으로써 경사진 평판에서 $Pr \rightarrow \infty$ 의 극한 경우에 대한 안정성 조건들이 해석되었다. 급속히 수렴하는 벽급수를 사용함으로써, 해석적인 해가 구하여졌다.

기본 유동에서의 열 경계층 두께의 단일 길이 척도에 근거를 두어, 재래적인 안정성 매계수변들을 최소화하였다. 와동 형식 불안정성의 발생점에서 임계조건은 $(Ra_{x,c} \cos \alpha)^{1/4} \tan \alpha = 19.5$ 와 $a_{x,c} = 0.58(Ra_{x,c} \cos \alpha)^{1/4}$ 임이 밝혀졌다. 이상하게도, 이 조건들은 비평행 유동모형의 조건들과 잘 일치된다. 그러므로 재래적인 모형의 유효성이 재검토될 필요가 있다.

안정성 해석과 관련하여 경계층 불안정성 모형을 열전달 특성의 예측에 적용하는 가능성이 검토된다. 안정성 기준에 근거를 둔 결과적인 상관관계는 실험적 결과들과 잘 일치함이 알려진다. 또한, 경사진 평판에서 열전달을 예측하는데 있어서 새로운 항, $\sin \alpha$ 는 상관관계 방정식에 포함될 것이 제안된다.

후 기

이 연구는 한국과학재단에 의하여 부분적으로 지원되었으며, 최창균 교수가 문교부 국비해외과견 연구교수로서 University of Iowa를 방문하는 동안 완성되었습니다. 이에 대하여 관계당국에 깊은 감사를 표합니다.

참 고 문 헌

- (1) E.M. Sparrow and R.B. Husar, "Longitudinal Vortices in Natural Convection Flow on Inclined Plates", J. Fluid Mech., Vol. 37, pp.251-255, 1969
- (2) J.R. Lloyd and E.M. Sparrow, "On the Instability of Natural Convection Flow on Inclined Plates", J. Fluid Mech., Vol. 42, pp.465-470, 1970
- (3) S.E. Haaland and E.M. Sparrow, "Vortex Instability of Natural Convection Flow on Inclined Surfaces", Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 16, pp.2355-2367, 1973
- (4) G.J. Hwang and K.C. Cheng, "Thermal Instability of Laminar Natural Convection Flow of Inclined Isothermal Plates", Can. J. Chem. Eng., Vol. 51, pp.659-666, 1973
- (5) R.A. Kahawita and R.N. Meroney, "The Vortex

- Mode of Instability in Natural Convection Flow Along Inclined Plates”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 17, pp. 541—548, 1974
- (6) P.A. Iyer and R.E. Kelley, “The Stability of the Laminar free Convection Flow Induced by a Heated Inclined Plate”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 17, pp. 517—525, 1974
- (7) C.K. Choi, “Thermal Convection in the Liquid Film of a Stratified Gas/Liquid Flow”, Ph.D. thesis, Clarkson College of Technology, 1976
- (8) E.J. Davis and C.K. Choi, “Cellular Convection with Liquid-film Flow”, *J. Fluid Mech.*, Vol. 81, Part 3, pp. 565—592, 1977
- (9) E.J. Davis, C.K. Choi and E.J. Bonano, “Cellular Convection with Stratified Gas-Liquid Flow” in *Two-Phase Transport and Reactor Safety*, eds. T.N. Veziroglu and S. Kakac, Hemisphere Pub., Washington, D.C., 1977
- (10) C.K. Choi and J.C. Kim, “The Stability of Plane Couette Flow Heated Uniformly from Below”, *Proceedings of the 7th Int. Heat Transfer Conf.*, München, Vol. 3, pp. 425—429, 1982
- (11) Y.K. Yeo and C.K. Choi, “Thermal Instability in a Plane Poiseuille Flow”, *J. Korean Inst. Chem. Eng.*, Vol. 19, pp. 411—418, 1981
- (12) 이형인, 최창균, 유정열, “등온으로 가열되는 수평 평판위를 지나는 블라시우스 유동의 와류불안정성 해석”, *대한기계학회논문집 제 6 권 제 4 호*, pp. 390—396, 1982
- (13) K.D. Kihm, C.K. Choi and J.Y. Yoo, “The Onset of Instability in a Horizontal Fluid Layer due to a Step Change in Temperature”, Vol. 25, No. 12, pp. 1829—1837, 1982
- (14) T. Fujii and H. Imura, “Natural-Convection Heat Transfer from a Plane with Arbitrary Inclination”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 15, pp. 755—767, 1972
- (15) E. Ruckenstein, “A Correlation for Laminar free Convection over the Entire Range of Prandtl Numbers”, *AICHE J.*, Vol. 26, pp. 850—852, 1980
- (16) E.M. Sparrow, F.K. Tsou and E.F. Kurtz, “Stability of Laminar Free Convection Flow on a Vertical Plate”, *Phys. Fluids*, Vol. 8, pp. 1559—1561, 1965
- (17) E.M. Sparrow, R.J. Glodstein and V.K. Jonsson, “Thermal Instability in a Horizontal Fluid Layer; Effect of Boundary Condition and Non-Linear Temperature Profile”, *J. Fluid Mech.*, Vol. 18, pp. 513—528, 1963
- (18) S. Ostrach, “An Analysis of Free-Convection Flow and Heat Transfer About a Flat Plate Parallel to the Direction of the Generating Body Force”, NACA Report 1111, 1953
- (19) C.K. Choi and S.T. Hwang, “Correlations of Heat Transfer by Thermal Convection in a Horizontal Fluid Layer”, submitted to *I & EC. Fund.*
- (20) L.N. Howard, “Convection at High Rayleigh Number”, *Proc. 11th Int. Congress Appl. Mech.*, Munich, pp. 1109—1115, 1964
- (21) F.B. Cheung, “Correlation Equations for Turbulent Thermal Convection in a Horizontal Fluid Layer Heated Internally and from Below”, *J. Heat Transfer*, Vol. 100, pp. 416—422, 1978
- (22) A. Acrivos, “On the Combined Effect of Forced and Free Convection Heat Transfer in Laminar Boundary Layer Flows”, *Chem. Eng. Sci.*, Vol. 21, pp. 343—352, 1966
- (23) J.P. Holman, *Heat Transfer*, 5th Ed., McGraw-Hill Book Company, 1981