

공정제어를 위한 DDC 알고리즘

許 旭 烈
(仁荷大 工大 助教授)

■ 차례 ■

- 1. 서 론
- 2. 플랜트 모델이 주어진 경우
- 3. 플랜트 모델이 주어지지 않은 경우
- 4. 결 론
참고문헌

1 서 론

최근 반도체 기술의 발전은 LSI 칩들의 성능 향상과 가격의 저렴화를 이루게 되어 대형 컴퓨터 및 마이크로 프로세서들을 공정제어에 이용하려는 시도가 점점되고 있다.

이러한 컴퓨터에 의한 제어는 아날로그형 장치와 스위칭 소자들을 컴퓨터로 대체되는 것만으로 만족되지 않고 프로세스의 수행 능력을 향상시키기 위한 새로운 방법들이 요구된다.

이러한 공정제어에 많이 이용되는 방식이 계층 제어 (Hierarchical Control)이다. 제어의 여러가지 기능을 다음과 같은 네가지 계층으로 구분한다.¹⁾

- 직접제어 계층 (Level 1)
- 모니터 계층 (Level 2)
- 최적화 계층 (Level 3)
- 협조 계층 (Level 4)

이들 각 계층에서 수행할 역할을 간단히 살펴보면 다음과 같다.

먼저 직접제어 계층에서는 선형시스템은 물론 매우 비선형이거나 지연시간이 큰 경우등 여러가지 형태의 제어대상 시스템에 대하여 보다 나은 제어 능력을 수행 할 수 있어야 한다. 즉 최적화 과정에서 설정된 최적치가 변화 했을때 단시간내 적은 변위로 제어할 수 있어야 한다.

다음 최적화 과정에서는 주어진 생산치에 대한 에너지 및 원료의 소비를 최소화 하든가, 주어진 소비 원료에 대한 생산량을 최대로 하도록 목적함수를 설정하여 이를 최적화하는 경제적인 최적치를 직접 제어 프로세스에 설정한다. 그런데 이 설정치는 가능한 한 변화가 적어야 한다.

또 협조 과정에서는 최적화된 몇개의 대형 프로세스가 최적화 과정에서의 마찬가지로 상호 협조 차원에서 최적화 한다.

마지막으로 모니터 계층에서는 출력을 비롯하여 각종 변수들이 한계치를 초과하는지 여부를 감시하고 이를 경보하며 가능한한 이러한 사고를 지역화하여 전 시스템을 멈추게 되는 결과를 초래하지 않도록 한다.

이와 같은 네단계 기능 중 본 논문에서는 직접제어 계층에 대한 이산 알고리즘 (Direct Digital Control Algorithm) 중 구조가 간단하여 마이크로 프로세서를 위시한 LSI 들에 의하여 구현 가능하며 앞서 설명한 직접제어의 특성을 살릴 수 있는 알고리즘들 중 몇가지에 관하여 간단히 설명한다.

이러한 DDC 알고리즘들 중 제어대상 플랜트에 대한 플랜트 모델이 주어진 경우와 모델이 주어지지 않은 경우를 구분하여 설명한다.

2 플랜트 모델이 주어진 경우

이산 제어 알고리즘 중 구조가 간단하여 마이크로 프로세서를 위시한 LSI 를 이용한 이산 제어기 설계에 적합한 알고리즘으로 다음 두가지를 소개한다.

이들은 최단시간내에 기준치에 도달 가능한 Dead beat 알고리즘과 출력의 차를 최소화하는 최소변위 제어 (Minimum Variance Control) 알고리즘이다.

제어대상 플랜트는 다음과 같은 ARMA 모델로 주어진다 가정한다.

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_m y(k-m) = b_0 u(k-d) + b_1 u(k-d-1) + \dots + b_m u(k-d-m) \quad (1)$$

(1) Dead beat 제어기

Dead beat 제어기는 페루우프 시스템의 극을 Z-평면상의 원점에 모두 배치함으로써 시스템의 착수만큼의 시간 이후는 설정된 최적치에 도달할수 있도록 하였다. 이러한 제어기의 방정식은 다음과 같다.

$$G_c(z) = \frac{q_0 A(z^{-1})}{1 - q_0 B(z^{-1}) z^{-d}} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{단, } A(z^{-1}) &= 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m} \\ B(z^{-1}) &= b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m} \\ q_0 &= 1 / \sum_{k=1}^m b_k \end{aligned}$$

이러한 Dead beat 알고리즘은 설정치에 도달하는 시간이 짧다는 장점은 있으나 시스템의 변화에 매우 민감하다. 설정치에 도달하는 시간을 좀 길게 하더라도 시스템의 변화에 따른 감도를 줄일 수 있는 방안들이 연구되고 있다. 그리고 이 방법은 안정된 플랜트에만 적용 가능하다.

(2) 최소변위 제어기(Minimal Variance Controller)

이 제어기 앞에서 설명한 플랜트에 다음과 같이 ARMA 형태로 표현되는 잡음이 그림 1 과 같이 출력에 부가된 경우이다.

$$\begin{aligned} n(k) + c_1 n(k-1) + \dots + c_m n(k-m) \\ = v(k) + d_1 v(k-1) + \dots + d_m v(k-m) \quad (3) \end{aligned}$$

여기서 $v(k)$ 는 백색잡음이다.

플랜트의 출력에 관한 식을 다시 쓰면 다음의 식(4)로 표현된다.

$$y(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} z^{-d} u(z) + \frac{D(z^{-1})}{C(z^{-1})} v(z) \quad (4)$$

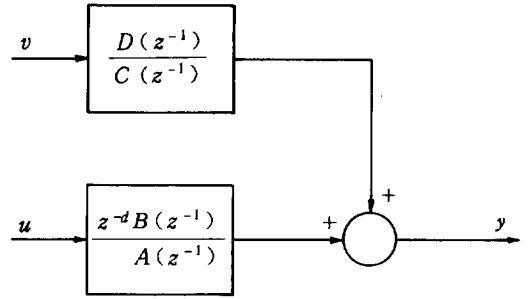


그림 1. 잡음이 부가된 플랜트 출력의 블럭선도

단, $C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_m z^{-m}$

$D(z^{-1}) = 1 + d_1 z^{-1} + \dots + d_m z^{-m}$

이와 같은 플랜트에 다음과 같은 평가 함수를 최소화 하도록 설계한 것이 최소 변위 제어기 이다.

$$J_1 = E\{y^2(k+1) + r u^2(k)\} \quad (5)$$

이 제어기는 잡음, $n(k)$ 의 형태에 따라 제어기의 형태가 달라진다. 이 결과들 중 $C(z^{-1}) = A(z^{-1})$ 이고 $d=0$ 인 경우에는 다음과 같다.

$$G_c(z) = \frac{[D(z^{-1}) - A(z^{-1})] z}{zB(z^{-1}) + (r/b_1) D(z^{-1})} \quad (6)$$

이 제어기의 차수는 $(m-1)$ 차이다. 이 제어기는 스토캐스틱한 잡음이 있는 경우에 적합하다. 또 이 경우 플랜트와 잡음에 대한 정확한 모델을 필요로 한다. 식(5)의 평가함수에서 입력에 대한 가중치(r)을 영으로 둔 경우에는 초기에 입력값을 너무 크게 할 경우가 있다. 또 이 경우에는 최소 위상 시스템 (Minimum phase system) 에만 적용 가능하다. 입력에 대한 항을 가중치를 주어서 평가함수에 포함시킴으로써 입력값을 어느 정도 제한할 수 있을 뿐만 아니라 비최소 위상 시스템에도 적용 가능한 제어기가 된다. 이 제어기도 플랜트의 변화에 따른 감도가 높은 편이다.

이상과 같이 DDC 알고리즘으로 이용 가능한 간단한 구조를 갖는 알고리즘들을 살펴 보았다. 그런데 이들 알고리즘들은 플랜트에 관한 모델 혹은 잡음에 관한 정확한 모델을 알고 있어야 한다. 실제 플랜트에서는 그렇지 못한 경우가 대부분이다. 이러한 플랜트에 대한 제어기로는 PID 제어기를 들 수 있다.

그러면 다음 절에서 이산형 PID 제어기에 관하여 살펴보고 이를 현대제어 이론에 적합토록 변형한 새로운 알고리즘을 소개한다.

③ 플랜트 모델이 주어지지 않은 경우

대부분의 제어대상 플랜트들은 단위계단 입력을 가했을때 S 자형 응답 혹은 진동형 응답이다. 본 논문에서 이중 S 자형 응답을 갖는 경우에 관해서만 간단히 설명한다.

먼저 연속형 PID제어기를 이산화한 이산형 PID 제어기에 관하여 간단히 소개하고 현대제어 이론을 이용한 새로운 PID형 DDC 알고리즘을 소개한다.

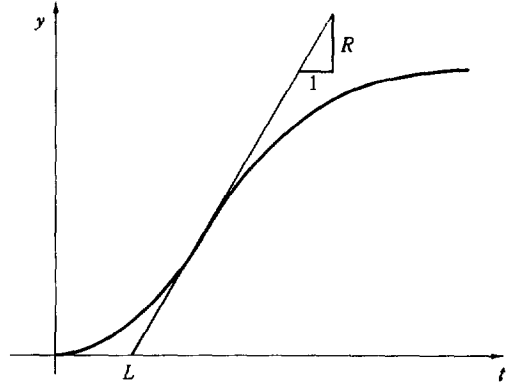


그림 2. 플랜트의 계단입력에 대한 S 자형 응답 (PID경우)

$$K_i = \frac{0.6 \Delta t}{R(L + \frac{\Delta t}{2})^2}$$

$$K_d = \frac{0.6}{R \Delta t} \tag{11}$$

이와 같은 PID 제어기는 플랜트의 변화에 대한 출력의 감도가 낮다. 그러나 잡음에 대한 문제 때문에 많은 경우 PI 제어기를 쓴다. 이 경우에는 감도가 상당히 높아지는 약점이 있다. 또 샘플주기 Δt 가 커지면 정상상태에 도달하는데 많은 시간이 걸린다.

이상의 PID 제어기에서는 플랜트를 지연시간을 갖는 1차시스템으로 표현 하였으나 플랜트를 고차방정식으로 표현하여 관측자를 구성하고 이의 Dead beat 제어기 및 LQ 제어기를 구성한 결과를 다음에서 본다.

(2) 새로운 DDC 알고리즘¹⁾

단위 계단 입력에 대한 응답이 그림 3과 같은 S자형인 경우 이의 전달함수는 다음과 같이 표현된다.

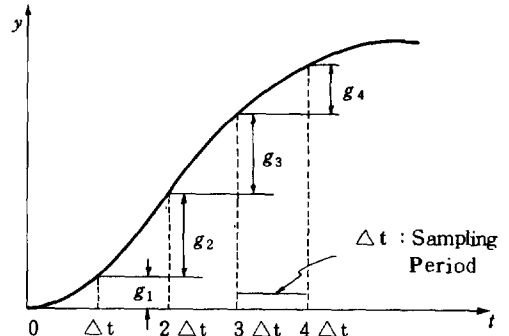


그림 3. 계단입력에 대한 플랜트의 S 자형 응답 (고차 모델)

(1) 이산형 PID 알고리즘

이산형 PID 알고리즘은 다음 식으로 표현된다.

$$\Delta u(k) = K_p(y(k-1) - y(k)) + K_i(r(k) - y(k)) + K_d(2y(k-1) - y(k-2) - y(k)) \tag{7}$$

여기서 $y(k)$ 는 플랜트의 출력값이고 $r(k)$ 는 기준 입력값이다. 또 $\Delta u(k) = u(k) - u(k-1)$ 의 값을 갖는 입력 $u(k)$ 의 변화량이다.

시연속 시스템의 PID 제어기를 다음식으로 둔다면 이들 이득계수와 이산형의 이득계수 사이에는 다음과 같은 관계가 있다. 먼저 연속형 PID 제어기는

$$u(t) = K_c \{e(t) + \frac{1}{T_i} \int_{-\infty}^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{d}{dt} e(t)\} \tag{8}$$

또 이들 계수 K_c, T_i, T_d 와 이산형의 계수 K_p, K_i, K_d 사이의 관계는

$$K_p = K_c - \frac{1}{2} K_i$$

$$K_i = \frac{K_c}{T_i} \Delta t$$

$$K_d = \frac{K_c T_d}{\Delta t} \tag{9}$$

여기서 Δt 는 샘플주기이다.

이러한 제어기에 평가함수를 다음과 같이 주었을 때 이를 최소화하는 Zieger-Nichols의 이득결정 방법을 따라 PID 제어기의 이득을 결정한다.³⁾

$$I_2 = \int_0^{\infty} |e(t)| dt \tag{10}$$

단위계단 입력을 플랜트에 가했을때 그 응답이 그림 2와같이 S 자형이라면 이 응답에서 기울기가 가장 큰부분에 접하는 직선을 그어서 t축과 만나는 점을 L 이라하고 이의 기울기를 R이라 하면 다음과 같다.

$$K_p = \frac{1.2}{R(L + \Delta t)} - \frac{1}{2} K_i$$

$$G_p(z) = g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2} + \dots + \frac{g_n z^{-n}}{1 - p z^{-1}}$$

혹은

$$G_p(z) = \frac{b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \dots + b_n}{z^{n-1} (z - p)}$$

$$= \frac{B(z)}{z^{n-1} (z - p)} \quad (12)$$

단, $b_1 = g_1$
 $b_i = -p g_{i-1} + g_i \quad (i = 2 \dots n)$
 $p = 1 - \frac{g_n}{k_p - \sum_{i=1}^{n-1} g_i}$

여기서 k_p 는 플랜트의 이득이다. 이를 상태방정식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\mathbf{x}(k+1) = P \mathbf{x}(k) + \mathbf{q}u(k) \quad (13)$$

$$y(k) = \mathbf{c}\mathbf{x}(k)$$

여기서 P , \mathbf{q} , \mathbf{c} 는 각각 다음과 같은 $n \times n$ 행렬, $n \times 1$, $1 \times n$ 벡터이다.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = [1, 0, \dots, 0]$$

이러한 플랜트 모델링 방법은 계단 입력에 대한 응답이 S 자형일때 뿐만아니라 진동하는 응답을 갖는 경우에도 적용 가능하다.

관측자 알고리즘

PID 제어에서 PD의 역할은 앞절에서 본바와 같이 과도기에서 안정도 및 응답속도 뿐만아니라 감도를 개선하는데 상당한 공헌을 한다. 이러한 PD의 역할을 상태변수를 피드백 함으로써 페루우프 응답이 더 개선되고 어떤 의미에서는 최적제어도 가능하도록 일반화 할 수 있다. 그러나 이 상태변수는 측정하기 힘들거나 불가능 함으로 관측자를 이용하여 상태변수를 추정하여야 한다.

식(13) 과 같이 주어진 이산형 플랜트에 대한 관측자는 다음식으로 주어진다.

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \hat{\mathbf{x}}^o(k+1) + \mathbf{f}[y(k+1) - \mathbf{c}\hat{\mathbf{x}}^o(k+1)]$$

$$\hat{\mathbf{x}}^o(k+1) = P\hat{\mathbf{x}}^o(k) + \mathbf{q}u(k) \quad (14)$$

$$\hat{\mathbf{x}}^o(0) = 0$$

여기서 $\hat{\mathbf{x}}^o(k+1)$ 은 $\hat{\mathbf{x}}(k+1)$ 의 사전 추정치이다. 만일 측정불가능한 잡음이 없는 경우에는 \mathbf{f} 벡터를 식(15)와 같이 정하면 $(n-1)$ 스텝 혹은 그 이내에 $\hat{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}(k)$ 의 상태가 되는 Dead beat 형의 관측자가 된다.

$$\mathbf{f}^T = [1, p, p^2 \dots p^{n-1}] \quad (15)$$

만일 잡음이 존재하는 경우에는 \mathbf{f} 벡터가 Kalman 이득이 되도록 정하는 것이 바람직하다.

Dead beat 제어 알고리즘

상태변수를 피드백하는 제어기의 제어형태는 그림 4와 같고 이의 제어법칙은 식(16)과 같다.

$$u(k) = k_r \sum_{i=0}^k [r(i) - y(i)] - \sum_{j=1}^n k_j x_j(k) \quad (16)$$

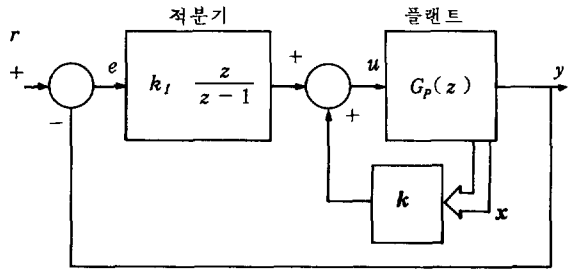


그림 4. 제어기의 구성선도

식(16)과 같은 제어법칙을 이용하여 페루우프 시스템을 구성하였을때 이의 특성방정식은 $(n+1)$ 차가 된다. 이러한 특성방정식의 모든 근을 원점에 두려면 플랜트가 식(13)으로 주어진 경우, 식(16)의 $(n+1)$ 개의 이득은 다음의 값들이 된다.

$$k_r = \frac{1}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}$$

$$k_1 = 0, \quad k_2 = k_3 = \dots = k_{n-1} = k_r \quad (17)$$

$$k_n = \frac{1}{g_n} [(1+p) - (g_1 + g_2 + \dots + g_{n-1}) k_r]$$

앞에서도 설명한 바와 같이 실제 구성할때 모든 상태변수가 측정 불가능한 경우에는 관측자를 이용하여 추정치를 피드백 시킨다.

선형 2차형식(LQ) 최적제어

식(16)의 k_r 및 k_i 값들은 선형 2차형식(LQ) 문제로써 풀 수 있다. 적분기를 포함한 제어기의 최적 이득을 찾기 위하여 다음과 같은 평가함수를 둔다.

$$I_3 = \sum_{k=0}^{\infty} [(r - y(k))^2 + w(\Delta u(k))^2] \quad (18)$$

여기서 r 는 기준치이고 w 는 제어입력의 변위에 대

한 가중치이다. $e(k) = y(k) - r$ 라두고 $\Delta \mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k-1)$ 이라 두면 식(13)의 플랜트에 관한 식은 다음과 같은 새로운 상태방정식으로 변형 가능하다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} e(k-1) \\ \Delta \mathbf{x}(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{c}P \\ 0 & \mathbf{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(k) \\ \Delta \mathbf{x}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{c}q \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u}(k) \\ &= A \begin{bmatrix} e(k) \\ \Delta \mathbf{x}(k) \end{bmatrix} + B \Delta \mathbf{u}(k) \end{aligned} \quad (19)$$

식(18)의 평가함수는 제어입력 $\Delta \mathbf{u}(k)$ 와 상태벡터 $(e(k), \Delta \mathbf{x}^T(k))^T$ 의 2차형식이다. 따라서 식(18)과 식(19)는 LQ 문제가 된다. 이 평가함수를 최소화하는 제어입력 $\Delta \mathbf{u}^{opt}(k)$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}^{opt}(k) &= -[w + B^T H_k B]^{-1} B^T H_k A \begin{bmatrix} e(k) \\ \Delta \mathbf{x}(k) \end{bmatrix} \\ &= -k_f e(k) - [k_1, k_2, \dots, k_n] \Delta \mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (20)$$

또 H_k 는 다음의 Ricatti 방정식의 정상상태 해이다.

$$\begin{aligned} H(k+1) &= A^T H(k) A + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad - \frac{1}{(w + B^T H(k) B)} A^T H(k) B B^T H(k) A \end{aligned} \quad (21)$$

제어 입력에 관한 최적 증가분이 식(20)에 의하여 주어지므로 이 관계로 부터 최적 제어치를 구하면 다음과 같다.

$$\mathbf{u}^{opt}(k) = k_f \sum_{j=0}^k (r - y(j)) - \sum_{i=1}^n k_i \mathbf{x}_i(k) \quad (22)$$

편의상 $\mathbf{u}(-1) = 0, \mathbf{x}(-1) = 0$ 이라 두었다.

4 결론

이상과 같이 공정제어에서 소형 컴퓨터를 이용한 직접제어 알고리즘으로 이용 가능한 몇가지 방안에 관하여 살펴 보았다.

이상의 소개된 알고리즘들 중 아직까지 프로세스 제어의 대부분을 차지하고 있는 알고리즘은 PID 알고리즘이다. 이는 PID 알고리즘이 구조가 간단하고 플랜트의 변화에 대한 감도가 낮다는 장점 때문이다. 그러나 이상에서 소개된 Dead beat 알고리즘이나 최소변위 제어 알고리즘등을 장점은 살리면서 감도나 잡음에 대한 약점을 보완하면 공정제어에 이용될 수 있는 좋은 알고리즘이 되리라 생각된다.

참고 문헌

- 1) R. Isermann; "Advanced Methods of Process Computer Control for Industrial Processes" Computer in Industry, Vol. 2, pp. 59-72, 1981
- 2) R. Isermann; Digital Control Systems, Springer-Verlag, Berlin 1981
- 3) Y. Takahashi, M. J. Rabins, D. M. Auslander; Control and Dynamic Systems, Addison-Wesley, 1970
- 4) D. M. Auslander, Y. Takahashi, M. Tomizuka; "Direct Digital Process Control: Practice and Algorithms for Microprocessor Application". Proc. of IEEE, Vol. 66, No. 2, pp. 199-208, Feb. 1978