

2 단 量子化器를 사용한 1次 DPLL의 性能 改善에 關한 研究

(A Study on the Performance of a Modified Binary Quantized First-Order DPLL)

姜 治 宇*, 金 鎮 憲**

(Chi Woo Kang and Jin Hun Kim)

要 約

기존의 2 단 양자화된 1 차 디지털 위상포착회로(DPLL)의 포착시간과 정상상태에서의 위상오차를 줄이기 위한 방법을 연구하였다. 기본적인 DPLL에 하향(falling) 영전위교차시간을 검출하여 위상을 교정하는 회로를 첨가하여 그 성능을 개선하기 위한 연구를 하였으며 기본적인 DPLL의 성능과 비교하였다. 그래프방식을 사용하여 잡음이 없는 상태에서 위상스텝 및 주파수 스텝입력에 대한 DPLL의 위상포착과정을 시각적으로 해석하였다. 정현파 입력에 협대역임의잡음(narrow band random noise)이 섞여 있을 때 DPLL의 성능을 분석하기 위해서 Chapman-Kolmogorov 방정식을 사용하였다. 이 방법은 컴퓨터에 의한 모의 시험을 통하여 입증되었다. 수정된 DPLL의 정상상태의 위상오차와 평균포착시간이 기본적인 DPLL의 그것들과 비교되었다. 수정된 DPLL의 포착시간은 거의 두 배 정도 빨라졌으며 정상상태의 위상오차는 신호대잡음비가 커짐에 따라 개선의 폭이 증가하여 결국 영에 접근함을 알 수 있었다.

Abstract

The basic binary quantized first-order digital phase locked loop (DPLL) is modified in order to reduce the acquisition time and steady-state phase error. Adding the loop that corrects the phase difference by detecting the falling zero-crossing time, an effort for the improving the performance is performed and the performance compared with that of the basic DPLL.

Using a graphical method, the phase locking processes of the modified DPLL for a phase step and a frequency step input are depicted visually in the absence of noise. The performance of the modified DPLL for a sinusoidal input added narrow band random noise is evaluated using the Chapman-Kolmogorov equation. This approach is verified by direct computer simulation.

The steady-state phase error and the average acquisition time of the modified DPLL are compared with those of the basic DPLL. It is shown that the acquisition time of the modified DPLL is shortened about twice, also, as signal to noise ratio increases, the effect of the modification increases and the steady-state phase error approaches to zero.

I. 序 論

통신 시스템이 다변화되고 복잡해짐에 따라 대부분의 시스템은 디지털 컴퓨터를 포함하거나 디지털화 되어 가고 있다. 가능한 한 많은 부분을 디지털화 해서 디지털 시스템이 갖는 일반적인 장점(간결, 저렴, 고신뢰도, 안정성 등)을 얻기 위하여 아날로그 위상포착

*正會員, 大田機械廠

(Daejeon Machine Depot)

**正會員, 西江大學校 理工大學 電子工學科

(Dept. of Electronics Eng., Sogang Univ.)

接受日字: 1983年 12月 28日

회로(analog phase locked loop, APLL)에서 디지털 위상포착회로(digital phase locked loop, DP LL)로 전환하려는 노력이 지난 10여년간 계속 되어 오고 있다. 특히 컴퓨터산업의 발달에 힘입어 보다 성능 좋은 DP LL을 얻기 위한 노력이 진행되고 있다.

1960년대 Gill과 Gupta¹⁾가 비균일(nonuniform) 샘플방식을 창안한 이후 많은 사람들이 2단계 또는 다단(multi-level) 양자화된 DP LL을 잡음이 있을 때 또는 없을 때에 대해서 그래프 표시방식, 랜덤-워크 모형, Chapman-Kolmogorov 방정식등을 이용하여 해석하였다. DP LL을 설계하는데 있어서의 주요 관점은

- 포착시간(acquisition time)
- 실추시간(slipping time)
- 정상상태 위상오차(steady-state phase error)
- 포착범위(locking range)

등이다. 위의 4 가지 사항들은 서로 상반되는 성질이 있기때문에 설계자는 타협하지 않으면 안된다. 본 논문에서는 2단 양자화된 1차의 DP LL을 보완해서 위상포착시간과 정상상태의 위상오차를 줄이기 위한 연구를 하였다. 수정된 DP LL을 이해하기 위해서 우선 모델화하여 그 동작원리를 설명하였고 잡음이 없는 경우에 대해서 그래프 방법²⁾을 사용 위상스텝입력과 주파수스텝입력에 대한 위상포착과정을 표시하였다. 잡음이 포함되어 있는 경우를 해석하기 위해서 잡음을 협대역임의잡음(narrow band random noise)으로 가정하였으며 이미 잘 알려져 있는 방식인 랜덤-워크 모형과 Chapman-Kolmogorov 방정식을 이용하여 주어진 SNR(signal to noise ratio)에 대한 위상오차의 표준편차를 구하고 이 결과를 컴퓨터 모의시험을 통하여 얻은 결과와 비교 분석하였다.

II. 수정된 DP LL의 구성 및 해설

1. 수정된 DP LL의 구성 및 동작

수정된 DP LL은 그림 1에서 보는 바와같이 기본적인 DP LL에 폴링에취(falling edge)검출기 및 위상검출기와 리미터를 추가한 것으로 되어 있다. 샘플러는 클락에 의해서 입력신호를 샘플하고 2단 양자화기는 하드(hard) 리미터로 되어 있으며 그 출력은 입력의 부호에 따라 ± 1 이 된다. 이 출력은 일정한 이득이 곱해져서 클락카운터(clock counter)의 내용을 가감하게 되며 따라서 다음 샘플시간이 전후로 조정된다. 이런 방식으로 샘플하는 시간 즉 내부 클락을 입력의 상향영전위교차시간에 맞추는 방식이 기본적인 DP LL이다. 추가된 부분은 폴링에취검출기로 입력의 폴링에취를 검출하고 검출된 순간에 클락카운터의 내용을 읽어 위상

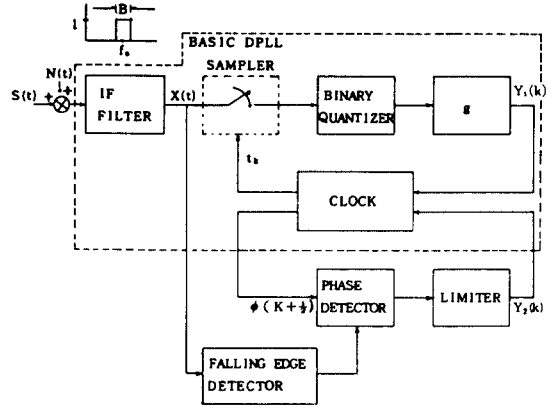


그림 1. 수정된 DP LL의 블록선도
Fig. 1. Block diagram of modified DP LL.

오차를 검출한다. 다음에 이 검출된 위상오차에 리미터를 이용 한계치를 주어 클락을 조정한다. 따라서 내부 클락은 두개의 입력에 의해서 조정되는 클락카운터이며 그 리플(ripple)은 샘플러를 동작시킨다. 또한 카운터의 내용은 위상검출기에 의해서 위상을 검출하는데 이용된다. 위상포착과정을 그림 2에 표시했다. 그림에서 $\theta_c(Y_1(k))$ 및 $\theta_c(Y_2(k))$ 는 각각 $Y_1(k)$ 및 $Y_2(k)$ 에 의해서 교정되는 위상을 뜻하며 $\phi(k)$ 는 K번째 샘플시간에서의 위상오차를 뜻한다. 기본적인 DP LL은 양자화된 값으로만 위상오차 교정이 가능하지만 첨가된 부분은 위상오차가 정해진 한계치내에 있을 경우에는 그 위상오차만큼 즉 연속적인 값으로 위상오차를 교정할 수 있으므로 정상상태의 위상오차는 감소하게 된다.

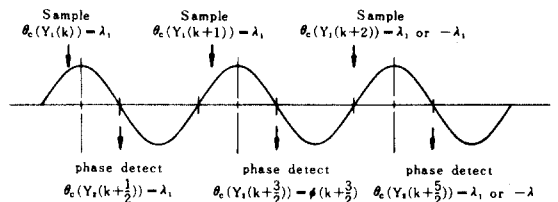


그림 2. 수정된 DP LL의 위상 포착 과정의 예
Fig. 2. An example of phase tracking process of modified DP LL.

영전위를 교차함은 한 주기에 두번 일어나며 서로 180°의 위상차이가 있으므로 수정된 DP LL은 한 주기에 거의 등간격으로 두번 위상을 조정하게 된다.

2. 수정된 DP LL의 수식적인 표현

그림 1에서 보듯이 X(t)는 S(t)와 n(t)의 합이고

각각 다음과 같이 가정한다.

$$S(t) = A \sin(\omega_0 t + \theta(t)), \quad A > 0 \quad (1)$$

$n(t)$: 협대역 가우시안 잡음

$$E[n(t)] = 0, \quad E[n^2(t)] = \sigma_n^2$$

잡음 $n(t)$ 는 가우시안 임의잡음 $N(t)$ 를 대역폭이 매우 작은 대역통과 여파기로 여과한 잡음을 뜻한다.

$N(t)$ 는 그 크기가 가우시안분포를 가지며 평균치가 영인 광대역 임의잡음이고 대역통과 여파기의 중심주파 f_0 는 $\omega_0/2\pi$ 이다. 신호대잡음비(SNR)는

$$SNR \triangleq \frac{A^2}{2\sigma_n^2} \triangleq \rho \quad (2)$$

k 번째 샘플시간 $t(k)$ 는

$$t(k) = t(k-1) + T_0 - Y_1(k-1) - Y_2(k-1) \\ = t_0 + KT_0 - \sum_{i=0}^{k-1} [Y_1(i) + Y_2(i)] \quad (3)$$

여기서 $T_0 = 1/f_0$, $\omega_0 = 2\pi f_0$, t_0 는 초기시간이다. 입력 각주파수가 ω 가

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega$$

로 $\Delta\omega$ 만큼 변하고 초기 위상차가 θ_0 라면 뒤틀림위상(detuning phase) $\theta(k)$ 는

$$\theta(k) = \Delta\omega(k) + \theta_0 \quad (4)$$

교정위상(correcting phase) $\theta_c(k)$ 는

$$\theta_c(k) = \omega_0 \sum_{i=0}^{k-1} [Y_1(i) + Y_2(i)] \quad (5)$$

샘플러의 출력 $X(k)$ 는

$$X(k) = A \sin \phi(k) + n(k), \quad \phi(k) = \theta(k) - \theta_c(k)$$

$$Y_1(k) = g \cdot \text{sgn}[X(k)], \quad \text{sgn}[x] = \begin{cases} 1, & X > 0 \\ -1, & X < 0 \end{cases}$$

$\lambda_1 = \omega_0 \cdot g$, $\lambda_2 = 2\pi \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ 로 정의하면,

$Y_1(k)$ 및 $Y_2(k)$ 에 의해서 교정되는 위상은

$$\theta_c(Y_1(k)) = \lambda_1 \cdot \text{sgn}[A \sin \phi(k) + n(k)] \quad (6)$$

$$\theta_c(Y_2(k)) = L[\phi(k) + \frac{\lambda_2}{2} - \theta_c(Y_1(k)) + \phi_n(k)] \quad (7)$$

식(7)의 우변에서 []안은 K 번째 홀링에 취 검출 시간에서 위상검출기로 검출한 위상오차를 뜻하며, $\phi(k)$ 는 K 번째 샘플시간의 위상차, $\theta_c(Y_1(k))$ 는 $Y_1(k)$ 에 의해서 교정된 위상, $\frac{\lambda_2}{2}$ 는 반주기동안 입력각주파수의 변동($\Delta\omega$)에 의해서 생긴 위상차, $\phi_n(k)$ 는 잡음에 의해서 위상검출 시간이 달라지고 이에따라 생기는 위상검출오차(phase detection error)이며 랜덤프로세스(random process)이다. 연산자 L 는 리미터이며 그림 3과 같다. 리미터의 한계값 L 을 λ_1 으로 정했다. 그이유는 두개의 영전위교차점(zero crossing point)에서 오차가 생길 확률은 같으므로 $Y_1(k)$ 와 $Y_2(k)$ 로 교정하는 위상은 같은 가중치를 주는 것이 좋고 또한 $Y_2(k)$ 가 추가된 효과를 보는 데도 좋기 때문이다. 이

상의 관계식으로부터 다음과 같은 비선형 차등방정식(nonlinear difference equation)을 얻을 수 있다.

$$\phi(k+1) = \phi(k) + \lambda_2 - \lambda_1 \text{sgn}[A \sin \phi(k) + n(k)] \\ - L[\phi(k) + \frac{\lambda_2}{2} - \lambda_1 \text{sgn}[A \sin \phi(k) + n(k)] + \phi_n(k)] \quad (8)$$

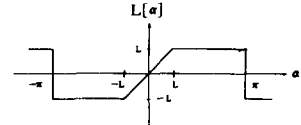


그림 3. 리미터 $L[\alpha]$
Fig. 3. Limiter $L[\alpha]$.

III. 잡음이 없는 경우의 수정된 DPLL의 분석

잡음이 없는 경우에 대해서 식(8)을 정리하면,

$$\phi(k+1) = \phi(k) + \lambda_2 - \lambda_1 \text{sgn}[A \sin \phi(k)] \\ - L[\phi(k) + \frac{\lambda_2}{2} - \lambda_1 \text{sgn}[A \sin \phi(k)]] \quad (9)$$

이식은 그래프를 통하여 그 특성을 알아보기 위해서 다음과 같은 두개의 식으로 표시할 수 있다.^[11]

$$C(\phi(k)) = \phi(k) - \lambda_1 \text{sgn}[\sin \phi(k)] \\ - L[\phi(k) + \frac{\lambda_2}{2} - \lambda_1 \text{sgn}[\sin \phi(k)]] \quad (10)$$

$$D(\phi(k)) = \phi(k) - \lambda_2 \quad (11)$$

식(9)를 식(10)과 (11)로 표시하면 다음과 같은 관계가 성립된다.

$$D(\phi(k+1)) = C(\phi(k)) \quad (12)$$

식(10)을 특성곡브(characteristic curve) 식(11)을 뒤틀림직선(detuning straight line)이라고 부른다. 식(10)과 (11)을 위상평면에 그리고 식(12)의 관계식으로부터 $\phi(k)$ 를 구해 나간다. 위상스텝입력과 주파수스텝입력에 대한 응답에 대해서 각각 해석하기로 한다.

1. 위상스텝응답

위상스텝입력은 다음과 같이 정의된다.

$S(t) = A \sin(\omega_0 t + \theta_0)$, θ_0 : 초기위상차
주파수편이가 없으므로 $\lambda_2 = 0$ 이다. 이런 입력에 대해서 식(9), (10) 및 (11)을 다시쓰면,

$$\phi(k+1) = \phi(k) - \lambda_1 \text{sgn}[\sin \phi(k)] \\ - L[\phi(k) - \lambda_1 \text{sgn}[\sin \phi(k)]] \quad (13)$$

$$C(\phi) = \phi - \lambda_1 \text{sgn}[\sin \phi] - L[\phi - \lambda_1 \text{sgn}[\sin \phi]] \quad (14)$$

$$D(\phi) = \phi \quad (15)$$

식(14)와 (15)에서 편의상 K 는 생략했음. 식(14)를 다시 정리하면 다음과 같다.

$$C(\phi) = \begin{cases} \phi - 2\lambda_1, & 2\lambda_1 < \phi \leq \pi \\ 0, & -2\lambda_1 \leq \phi \leq 2\lambda_1 \\ \phi + 2\lambda_1, & -\pi \leq \phi < -2\lambda_1 \end{cases} \quad (16)$$

그림 3은 식 (15)와 (16)을 이용하여 그린 위상스텝 응답이다. 그림에서 보듯이 식 (12)의 성질을 이용하여 수평과 수직으로 서로 다른 선에 투영해 나가면 $\phi(k)$ 를 구할 수 있다. 하나의 평 선분(segment) 즉 P_0P_0' , P_1P_1' 등은 한번의 샘플을 뜻하며 위상오차 $\phi(k)$ 까지 도달하는데 필요한 샘플수는 P_k 까지의 수평 선분의 수와 같다. 그림 4에서처럼 수정된 DPLL의 정상상태 위상오차는 영이다. 기본적인 DPLL의 경우는 그림 5에서처럼 $\pm\lambda_1$ 사이를 진동한다. 또한 그림 4와 5를 비교해 보면 포착시간이 약 2배가 개선되었음을 알 수 있다.

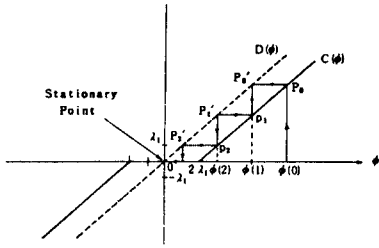


그림 4. 수정된 DPLL의 위상스텝 응답
Fig. 4. Phase step response of modified DPLL.

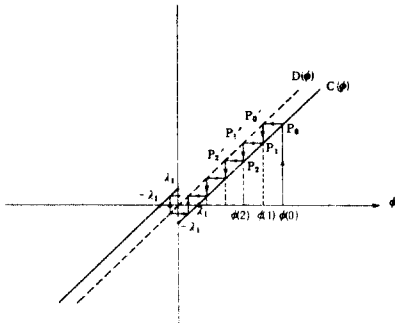


그림 5. 2단 양자화된 DPLL의 위상스텝 응답²⁾
Fig. 5. Phase step response of binary quantized DPLL²⁾.

2. 주파수 스텝 응답

주파수 스텝 입력은 다음과 같이 정의된다.

$$S(t) = A \sin(\omega t + \theta_0), \quad \omega = \omega_0 + \Delta\omega,$$

$$\theta_0 : \text{초기위상차}$$

즉 입력의 주파수가 기본주파수 ω_0 에서 $\Delta\omega$ 만큼 편이된 신호를 뜻한다. 따라서 위상스텝 입력과 달리 시간에 따라 일정한 율로 위상오차를 유발시킨다. $\Delta\omega$ 는 시간의 함수가 아닌 상수이다.

주파수 스텝 입력에 대한 특성곡선 및 뒤틀림직선식은 식 (10)과 (11)로부터 다음과 같이 얻어진다. $\lambda_2 > 0$ 로 가정한다.

$$C(\phi) = \begin{cases} \phi - 2\lambda_1, & 2\lambda_1 - \frac{\lambda_2}{2} < \phi \leq \pi \\ -\frac{\lambda_2}{2}, & -2\lambda_1 - \frac{\lambda_2}{2} \leq \phi \leq 2\lambda_1 - \frac{\lambda_2}{2} \\ \phi + 2\lambda_1, & -\pi < \phi < -2\lambda_1 - \frac{\lambda_2}{2} \end{cases} \quad (17)$$

$$D(\phi) = \phi - \lambda_2 \quad (18)$$

식 (12), (17)과 (18)을 이용하여 앞에서와 같은 방법으로 위상평면에 그리면 그림 6과 같다. 그림 6에서 보듯이 정상상태 위상오차 (ϕ_{ss})는 $\frac{\lambda_2}{2}$ 가 된다. 기본적인 DPLL의 정상상태 위상오차의 범위는 그림 7으로부터

$$\lambda_2 - \lambda_1 \leq \phi_{ss} \leq \lambda_1 + \lambda_2$$

임을 알 수 있으며 수정된 DPLL에 비해서 좋지 않음을 알 수 있다. 또한 그림 6과 7을 비교해보면 포착시간이 λ_2 에 따라 달라지지만 적어도 2배이상 개선되었음을 알 수 있다.

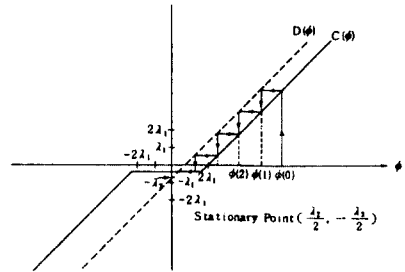


그림 6. 수정된 DPLL의 주파수스텝 응답 ($0 < \lambda_2 < \lambda_1$ 인 경우)

Fig. 6. Frequency step response of modified DPLL (for $0 < \lambda_2 < \lambda_1$).

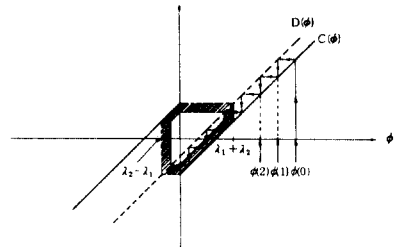


그림 7. 2단 양자화된 DPLL의 종말 위상오차 범위 ($0 < \lambda_2 < \lambda_1$ 인 경우)²⁾

Fig. 7. The range of final phase error of binary quantized DPLL (for $0 < \lambda_2 < \lambda_1$).²⁾

그림 5를 통하여 ϕ 가 양수인 경우 $D(\phi)$ 선이 $C(\phi)$ 선보다 위에 있고 ϕ 가 음수인 경우는 그 반대의 위치에 있지만 하면 위상오차는 감소하거나 증가하여 정상

상태 즉 $\frac{\lambda_2}{2}$ 인 점에 도달함을 알 수 있다. 즉,

$$\lambda_2 < 2\lambda_1 \quad (19)$$

이 조건이 포착조건(locking condition)이 된다. $\lambda_2 = 2\lambda_1$ 일 때는 위상오차는 수렴하거나 발산하지 않고 처음 위상오차값을 계속 유지한다. $\lambda_2 < 0$ 인 경우도 같은 결론에 도달하므로 반복하지 않는다.

IV. 잡음이 있는 경우의 수정된 DPLL의 분석

1. 정상상태 위상오차의 확률밀도함수

잡음이 신호에 어떤 비율로 섞여 있을 때의 DPLL의 특성을 살펴보고 정상상태 위상오차의 PDF(probability density function)와 평균포착시간등에 대해서 해석하고자 한다. 먼저 잡음의 특성부터 규정지으면, 가우시안잡음(Gaussian random noise)이 대역폭이 매우 좁은 대역통과여파기(band pass filter, BPF)를 통과한 출력 즉 협대역가우시안잡음(band limited Gaussian noise)이며 그 평균치는 영이고 전력은 σ_n^2 이다. BPF의 중심주파수는 신호의 주파수와 같다. 위상오차의 정상상태 PDF를 구하기 위해서는 초기위상오차와 위상천이확률(phase transition probability)을 알면 된다. 천이를 결정하는 것은 샘플러와 위상검출기의 출력이다. 샘플러에 의한 천이는 현재의 위상오차에서 감소하던지 아니면 증가하는 둘중의 하나를 선택하는 랜덤워크 프로세스(random-walk process)이다.^[1] $d\phi$ 와 $i\phi$ 를 각각 다음과 같이 정의하면,

$d\phi$: 위상오차가 현재의 위상오차 ϕ 에서 감소할 확률

$i\phi$: 위상오차가 현재의 위상오차 ϕ 에서 증가할 확률

$d\phi$ 는 식(8)에서 $\text{sgn}[A \sin \phi(k) + n(k)]$ 가 양수일 확률이고 $i\phi$ 는 음수가 될 확률이다. 가우시안 잡음 특성으로부터 $d\phi$ 와 $i\phi$ 를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$d\phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{2\rho} \sin \phi}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \quad (20)$$

$$i\phi = 1 - d\phi \quad (21)$$

다음에는 위상검출기(phase detector)에 의한 천이 확률을 계산하기로 한다. 위상검출오차를 계산하기 위해서는 우선 진폭잡음(amplitude noise)을 위상잡음으로 변환하는 것이 필요하다. 잡음이 협대역이므로 $X(t)$ 는 다음과 같이 표시된다.^[4,5]

$$\begin{aligned} X(t) &= A \sin \omega t + n(t) \\ X(t) &= R(t) \sin[\omega t + \theta(t)] \end{aligned} \quad (22)$$

윗 식에서 위상오차 θ 의 PDF는 다음과 같이 표시된다.

$$f(\theta) = \frac{e^{-\rho}}{2\pi} + \frac{\sqrt{2\rho} \cos \theta}{2\pi} e^{-\rho \sin^2 \theta} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{2\rho} \cos \theta}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \quad (23)$$

$f(\theta)$ 의 합이 1이 되도록 표준화한 것을 $g(\theta)$ 라 하면,

$$g(\theta) = \frac{f(\theta)}{\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta} \quad (24)$$

이다. 식(8)과 위에서 유도한 식들을 이용하면 다음과 같은 천이 PDF $q(\phi|z)$ (위상오차 z 에서 ϕ 로 이동할 확률)를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} q(\phi|z) &= d_z[g(\phi - \frac{\lambda_2}{2})]U[\phi - (z - 2\lambda_1 + \lambda_2)] - U[\phi - (z + \lambda_2)] + \text{DDA} \cdot \delta[\phi - (z - 2\lambda_1 + \lambda_2)] + \\ &\quad \text{DIA} \cdot \delta[\phi - (z + \lambda_2)] + i_z[g(\lambda - \frac{\lambda_2}{2})] \\ &\quad \{U[\phi - (z - \lambda_2)] - U[\phi - (z + 2\lambda_1 + \lambda_2)]\} + \\ &\quad \text{IDA} \cdot \delta[\phi - (z + \lambda_2)] + \text{IIA} \cdot \\ &\quad \delta[\phi - (z + 2\lambda_1 + \lambda_2)] \end{aligned} \quad (25)$$

여기서 사용된 부호들은 다음과 같다.

$$\text{DDA} = \int_{2\lambda_1 - z - \frac{\lambda_2}{2}}^{\pi - z + \lambda_1 - \frac{\lambda_2}{2}} g(\theta) d\theta, \quad \text{DIA} = \int_{-\pi - z + \lambda_1 - \frac{\lambda_2}{2}}^{-z - \frac{\lambda_2}{2}} g(\theta) d\theta$$

$$\text{IDA} = \int_{z - \frac{\lambda_2}{2}}^{\pi - z - \lambda_1 - \frac{\lambda_2}{2}} g(\theta) d\theta, \quad \text{IIA} = \int_{-\pi - z - \lambda_1 - \frac{\lambda_2}{2}}^{-2\lambda_1 - z - \frac{\lambda_2}{2}} g(\theta) d\theta$$

$$U[x] = \begin{cases} 0, & X < 0 \\ 1, & X \geq 0 \end{cases} \quad \delta[x] = \begin{cases} 1, & X = 0 \\ 0, & \text{그외} \end{cases}$$

식(25)를 통하여 $\phi(k)$ 는 $\phi(k-1)$ 이전의 값 즉 $\phi(k$

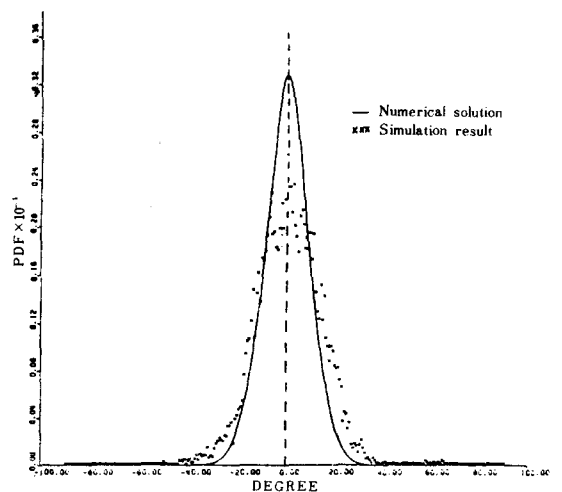


그림 8. 위상스텝 입력에 대한 정상상태 위상오차의 PDF ($\lambda_1 = \pi/16$ rad., $\lambda_2 = 0$ rad., SNR=10dB)

Fig. 8. PDF of steady-state phase error for phase step input ($\lambda_1 = \pi/16$ rad., $\lambda_2 = 0$ rad., SNR=10dB).

- 2) $\phi(k-3), \dots$ 등에 관계없이 $\phi(k-1)$ 에 의해서 결정되는 1 차 Markov 프로세스임을 알 수 있다. 그러므로 Markov 프로세스의 성질로부터 유도되는 Chapman-Kolmogorov 식^[6] 과 식 (25) 를 이용하면 $(k+1)$ 번째 샘플에서 위상오차가 ϕ 가 분포할 PDF를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$P_{k+1}(\phi | \phi_0) = \int_{-\pi}^{\pi} q(\phi + 2n\pi | z) P_k(z | \phi_0) dz \quad (26)$$

$n = 1, 2, 3, \dots$

정상상태 위상오차의 PDF는 식 (19) 를 반복해서 풀면 구할 수 있다.

$$P(\phi) = \lim_{k \rightarrow \infty} P_k(\phi | \phi_0) \quad (27)$$

즉 $P(\phi)$ 의 계산결과와 컴퓨터 모의실험 결과를 그림 8, 9 에 표시하였다.

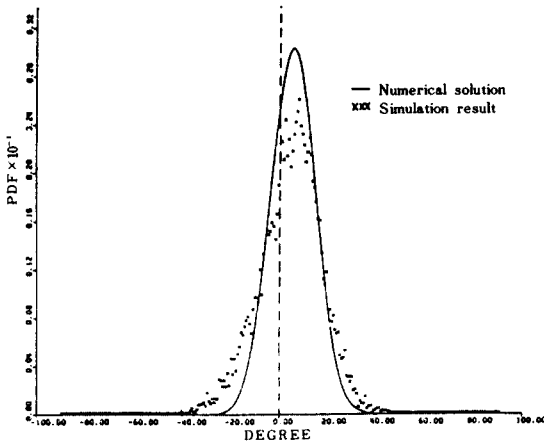


그림 9. 주파수 스텝 입력에 대한 정상 상태 위상오차의 PDF ($\lambda_1 = \pi/16$ rad., $\lambda_2 = \pi/32$ rad., SNR=10dB)

Fig. 9. PDF of steady-state phase error for frequency step input ($\lambda_1 = \pi/16$ rad., $\lambda_2 = \pi/32$ rad, SNR=10dB).

2. 평균포착시간

K 번째 스텝 후에 위상오차가 정해진 구간 $\pm \epsilon$ 사이에 들어오면 DPLL은 포착되었다고 말한다. 본 논문에서는 ϵ 을 λ_1 으로 정했다. K 번째 스텝 후에 포착될 확률은 각 스텝에서 위상오차가 포착범위내에 존재할 확률을 K 번째 스텝 까지 합한 것과 같다.^[7] $(k+1)$ 번째 스텝 후에 포착되지 않고 남아 있을 확률 $r_{k+1}(\phi)$ 은

$$r_{k+1}(\phi) = \begin{cases} 0, & -\lambda_1 \leq \phi \leq \lambda_1 \\ \int_{-\pi}^{\pi} q(\phi + 2n\pi | z) r_k(z) dz \end{cases} \quad (28)$$

그외 $(k+1)$ 스텝에서 포착될 확률은

$$P_{acq}(k+1) = \int_{-\pi}^{\pi} r_k(\phi) - r_{k+1}(\phi) d\phi \quad (29)$$

초기 위상오차의 분포가 균일하다면,

$$r_0(\phi) = \begin{cases} 0, & -\lambda_1 \leq \phi \leq \lambda_1 \\ \frac{1}{2\pi}, & \text{그 외} \end{cases} \quad (30)$$

식 (28), (29) 및 (23) 을 이용하여 다음과같이 포착되기까지 필요한 평균스텝수를 얻을 수 있다.

$$N_{acq} = \frac{\pi - \lambda_1}{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} R(\phi) d\phi \quad (31)$$

$$R(\phi) = \sum_{k=0}^{\infty} r_{k+1}(\phi)$$

또한 평균포착시간은

$$T_{acq} = N_{acq} \cdot T \quad (32)$$

위상스텝에 대한 식 (31) 의 수치해 (numerical solution) 를 그림 10 에 표시하였다. 비교가 되도록 기본적인 DPLL의 자료도 표시하였다.^[2] 또한 식 (26) 을 계산하여 위상오차의 PDF를 구하고 다시 표준편차를 계산하여 그림 (11) 에 그렸다.

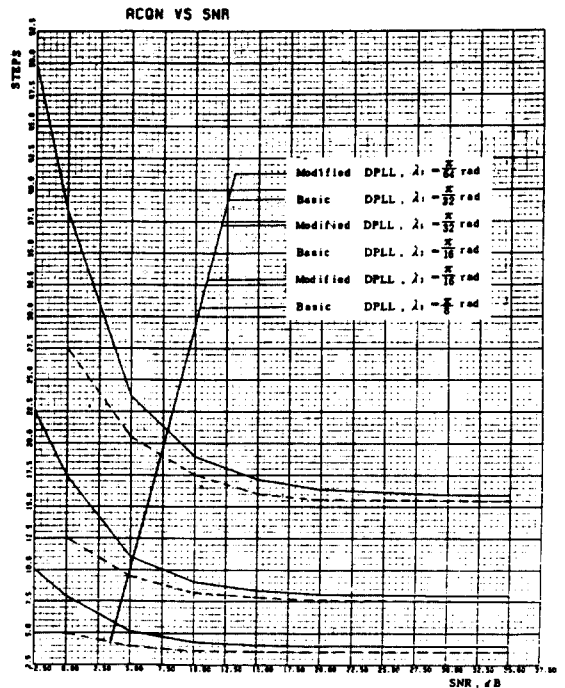


그림 10. 신호대잡음비에 따른 평균포착 스텝수 ($\lambda_2 = 0$ 인 경우)

Fig. 10. Average acquisition steps vs. SNR (for $\lambda_2 = 0$).

V. 結 論

잡음이 없을 때에 대한 분석결과 기본적인 DPLL은 정상상태 위상오차가 한점에 정지해 있지 않고 진동하는 반면에 수정된 DPLL은 한점에 정지해 있으며 위

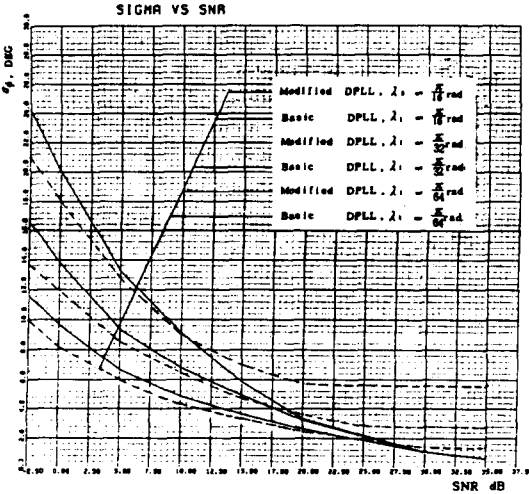


그림 11. 신호대잡음비에 따른 정상상태 위상오차의 표준편차 ($\lambda_2 = 0$ 인 경우)
 Fig. 11. Standard deviation of steady-state phase error vs. SNR (for $\lambda_2 = 0$).

상스텝입력에 대한 위상오차는 영이고 주파수 스텝입력에 대한 위상오차는 존재하나 매우 적음을 알 수 있다. 또한 주파수 스텝입력에 대한 포착범위도 수정된 DPLL이 두배나 크며 포착시간 역시 거의 두배가 단축됨을 알 수 있다. 이상과 같이 잡음이 없는 경우 즉 SNR이 매우 클 경우 수정된 DPLL의 성능은 모든 관점에서 거의 두배로 개선되었음을 알 수 있다.

잡음이 있을 때의 분석결과는 그림10과 11을 통하여 알 수 있다. 기본적인 DPLL과 비교하기 위해서 정상상태위상오차가 서로 비슷하도록 설계해서 비교하면 수정된 DPLL의 평균포착 시간이 두배정도 빠르게 개선되고, 평균포착시간을 비슷하게 되도록 설계해서 비교하면 정상상태위상오차가 훨씬 감소함을 알 수 있다. 또한 SNR이 작을 때는 개선의 폭이 적으나 SNR이 증가함에 따라 그 개선되는 정도가 증가한다.

그림 8 과 9에서 수치해와 컴퓨터 모의실험치의 차이는 모의실험시 협대역 잡음을 만들기 위해서 사용한 대역통과 여파기가 2 차(계산시간을 줄이기 위해서 2 차 여파기를 사용했음)이고 10,000번이라는 국한된 샘플을 가지고 평균을 냈기 때문이라고 판단된다. 본 논문에서 비교대상이된 기본적인 DPLL의 자료는 참고 문헌2에서 발췌한 것이다.

參 考 文 獻

- [1] G.S. Gill and S.C. Gupta, "On higher order discrete phase-locked loops", *IEEE Trans. Aerosp & Elect. Sys.*, vol. AES-8, pp.615-623, 1972.
- [2] Nunzio Aldo D'andrea and Franco Russo, "A binary quantized DPLL: A graphical analysis", *IEEE Trans. Comm.*, vol. COM-26, pp.1355-1364, 1978.
- [3] Jack K. Molmes, "Performance of a first-order transition sampling DPLL using random-walk models", *IEEE Trans. Comm.*, vol. COM-20, pp.119-131, 1972.
- [4] Jae Chon Lee and Chong Kwan Un, "Performance analysis of digital tanlock loop", *IEEE Trans. Comm.*, vol. COM-30, pp.2398-2411, 1982.
- [5] John B. Thomas, *An Introduction to Statistical Communication Theory*. Wiley, New York, pp.154-167.
- [6] Aaron Weinberg and Bede Liu, "Discret time analysis of nonuniform sampling first-and second-order DPLL", *IEEE Trans. Comm.*, vol. COM-22, pp.123-137, 1974.
- [7] William C., Lindsey and Chak Ming Chie, "Acquisition behavior of a first-order DPLL", *IEEE Trans. Comm.*, vol. COM-26, pp.1364-1370, 1978.