
 論 文

大韓造船學會誌
 第21卷 第1號 1984年 3月
 Journal of the Society of
 Naval Architects of Korea
 Vol. 21, No. 1, March 1984

衝擊荷重을 받는 變斷面보의 動的 應答解析

崔 慶 植* · 張 昌 斗**

On the Dynamic Response of a Beam with Variable Section subject to Impact Load

by

K.S. Choi* · C.D. Jang**

Abstract

As the first step to the dynamic stress analysis of structures, transient responses of a Timoshenko beam with variable section subject to impact load are analyzed. According to the various characteristics of impact load, time histories of the transient response of Timoshenko beam with general boundary conditions are obtained and compared with those of one degree of freedom system. Numerical solutions of the governing equations of motion are calculated by adopting the equivalent lumped-mass system and the finite difference method.

It is found that the dynamic responses of Timoshenko beam depend on the effect of concentration and location of impact load. As a result, increasing tendency of fluctuation in dynamic response, especially in bending moment, is found according to the increase of loadconcentration factor in time and space.

1. 緒 言

여러 가지 선박과 해양구조물의 설계에 있어서 衝擊荷重의 문제는 매우 복잡한 부분으로서, 최근 船底衝擊(slamming)이나 衝突(collision)등과 같은 動的荷重으로 인한 손상이 종종 보고되고 있다. 이에 따라 충격의 물리적인 현상규명과 함께 충격에 대한 구조설계 능력을 향상시키려는 노력이 활발해지고 있으며, 앞으로의 추세도 설계의 신뢰성과 피로문제에까지 연관되는 動的解析이 요구되고 있다.

일반적으로 충격하중의 특징은, 짧은 시간에 좁은 부위에 걸쳐 작용한다는 점인데, 이러한 특징으로 인

하여 충격을 받는 구조물은 국부적으로 큰 영구변형을 유발시키며 동시에 구조물 전체에 걸친 過渡振動을 일으키게 된다. 편의상 이 두 가지 문제를 서로 분리하여 다루고 있는데 [1], 局部構造의 변형에 대해서는 주어진 動荷重을 等價靜荷重(equivalent static load)의 개념을 이용하여 靜的 解析을 하고 있다. Jones [2]는 충격하중에 의해 평판과 보에 발생하는 영구변형을 예측할 수 있는 理論式을 제시한 바 있으며, Kawai [3] 등은 離散化모델을 사용한 수치계산을 통해 평판과 보의 동적붕괴(dynamic collapse)과정을 해석하였다. 한편 구조물 전체에 걸친 과도진동응답에 대해서는, 주어진 동하중을 구조물의 한 지점에 작용하는 충격으로 보고 시간변화에 따른 動的 解析을 하고 있다. Borg [4]

接受日字: 1983年 12月 8日, 再接受日字: 1984年 3月 16日

* 正會員, 서울大學校 工科大學 大學院

** 正會員, 서울大學校 工科大學

는 stress 해석의 관점에서 양단 자유보의 충격응답을 계산한 바 있으며, Bishop 등[5]은 frequency 해석의 관점에서 선저충격으로 인한 선체의 과도진동응답을 구하였다. 그리고 Timoshenko보 구조체의 강제진동해석의 일환으로 최근 Kim 등[6]에 의해 基準振動型중첩법에 의한 일련의 연구도 있다.

해양구조물이나 선체를 간단한 경우 變斷面 Timoshenko보로써 이상화시킬 수 있는데, 본 논문에서는 동적구조해석의 첫 단계 작업으로 충격하중의 여러 특성에 따른 Timoshenko보의 동적응답의 변화를 구하였다. 특히 양단 자유인 경계조건에 대해서만 적용한 McGoldrick[7]과 Polachek[8]의 연구를 일반적인 경계조건으로 확장하고, 그 방법으로 等價離散系로의 치환과 差分法을 사용한 수치계산을 통해 Timoshenko보의 과도응답을 구하였다.

2. 基本運動方程式과 過渡應答解析

보 이론에 기초한 충격응답은 과도진동의 해석으로 귀결된다. 여기서는 우선 과도진동에 대한 기본방정식을 Timoshenko보에 대해 나타내고, 변단면보를 등가의 집중질량계로 치환한 뒤 여기에 차분법을 사용하여 定式化시키게 된다.

Fig. 1과 같이 변단면보의 미소요소를 나타낸 자유물체도로 부터 Timoshenko보 이론에 따른 기본운동방정식 (1)~(5)로 표시된다.

Dynamic Force Equilibrium

$$m(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + c(x) \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = P(x,t) \tag{1}$$

Dynamic Moment Equilibrium

$$I_{mz}(x) \frac{\partial^2 \gamma(x,t)}{\partial t^2} + V(x,t) - \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} = Q(x,t) \tag{2}$$

Moment-Curvature Relations

$$M(x,t) = EI(x) \frac{\partial \gamma(x,t)}{\partial x} \tag{3}$$

Shear-Slope Relations

$$V(x,t) = kAG(x) \cdot \beta(x,t) \tag{4}$$

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = \gamma(x,t) - \beta(x,t) \tag{5}$$

여기서

- x : 좌표원점으로부터 중방향 거리(m)
- t : 시간(sec)

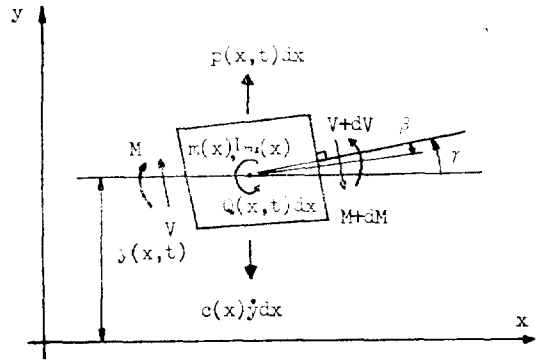


Fig. 1 Free body diagram

- $m(x)$: 단위길이당 有效質量(ton-sec²/m²)
- $c(x)$: 단위길이당 감쇠력 계수(ton-sec/m²)
- $I_{mz}(x)$: 단위길이당 有效回轉慣性(ton-sec²)
- $EI(x)$: 굽힘강성계수(ton-m²)
- $kAG(x)$: 전단강성계수(ton)
- $P(x,t)$: 단위길이당 기진력(ton/m)
- $Q(x,t)$: 단위길이당 기진모멘트(ton)
- $y(x,t)$: 처짐(m)
- $\gamma(x,t)$: 굽힘에 의한 기울기(radian)
- $\beta(x,t)$: 전단에 의한 기울기(radian)
- $M(x,t)$: 굽힘모멘트(ton-m)
- $V(x,t)$: 전단력(ton)

보의 길이에 따라 탄성 및 관성특성치들이 변하므로 이들 운동방정식의 엄밀해는 특별한 경우 이외에는 구할 수 없다. 따라서 수치해석의 방법이 효과적이든 본 연구에서는 차분법을 이용하였다. 연속체에 대한 미분방정식을 등가의 차분식으로 나타내기 위해서는 離散化(discretization) 방식을 결정해야 하는데, 가장 간편한 방법으로는 변단면보가 N개의 등간격요소로(Δx) 분할되며 그 분할된 보요소의 중앙에 보의 특성치들이 집중되어 있다고 생각할 수 있다. 즉 $m(x)Δx$, $c(x)Δx$, $I_{mz}(x)Δx$, $P(x,t)Δx$, $Q(x,t)Δx$ 등은 각 보요소의 중앙점(half-station)에서 값을 갖고, $\frac{Δx}{EI(x)}$, $\frac{Δx}{kAG(x)}$ 는 각 요소의 분할지점(station)에서 값을 갖는다.

앞 절에서 구한 기본운동방정식은 독립변수 2개, 종속변수 4개를 갖는 연립편미분방정식을 형성한다. 여기에서 보의 길이와 시간에 대한 차분식이 동시에 적용된다. 특별히 시간 t에 대한 차분식은 초기조건을 갖는 time integration을 의미하는데, 정확도를 높이기 위해 Linear Acceleration Method, Newmark-β Method, Wilson-θ Method 등과 같이 반복계산에 의해 수립된 해를 구하는 차분공식을 이용하기도 하지만 변수가 많

아지면 계산시간상 큰 이득을 볼 수 없다. 여기서는 시간간격 Δt 을 짧게 하고 대신 Taylor series 근사전개의 제 2 항까지만 고려하는 방법을 택하였다.

m 과 n 을 각각 시간과 길이 방향으로의 위치를 나타내는 첨자라 하면 운동방정식은 다음과 같은 차분식으로 표현된다.

$$y_{n+1/2}^{m+1} = (2y_{n+1/2}^m - y_{n-1/2}^{m-1}) - \frac{c_{n+1/2}}{m_{n+1/2}} (y_{n+1/2}^m - y_{n+1/2}^{m-1}) \cdot \Delta t - \frac{V_{n+1}^m - V_n^m}{m_{n+1/2}} \cdot \frac{(\Delta t)^2}{\Delta x} + \frac{P_{n+1/2}^m}{m_{n+1/2}} \cdot (\Delta t)^2 \quad (6)$$

$$\gamma_{n+1/2}^{m+1} = (2\gamma_{n+1/2}^m - \gamma_{n-1/2}^{m-1}) + \frac{M_{n+1}^m - M_n^m}{(Imz)_{n+1/2}} \cdot \frac{(\Delta t)^2}{\Delta x} - \frac{V_{n+1/2}^m}{(Imz)_{n+1/2}} \cdot (\Delta t)^2 + \frac{Q_{n+1/2}^m}{(Imz)_{n+1/2}} \cdot (\Delta t)^2 \quad (7)$$

$$M_n^{m+1} = (EI)_n \frac{\gamma_{n+1/2}^{m+1} - \gamma_{n-1/2}^{m-1}}{\Delta x} \quad (8)$$

$$V_n^{m+1} = (kAG)_n \cdot \gamma_n^{m+1} - (kAG)_n \cdot \frac{y_{n+1/2}^{m+1} - y_{n-1/2}^{m-1}}{\Delta x} \quad (9)$$

여기서 $\gamma_n^m = \frac{1}{2}(\gamma_{n+1/2}^m + \gamma_{n-1/2}^m)$, $V_{n+1/2}^m = \frac{1}{2}(V_{n+1}^m + V_n^m)$ 로 정의된다.

i) 初期조건

보의 운동은 최초 정지상태에서 시작하는 것으로 생각한다.

$$y_{n+1/2}^0 = \frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{n+1/2}^0 = 0, \quad \gamma_{n+1/2}^0 = \frac{\partial \gamma}{\partial t} \Big|_{n+1/2}^0 = 0$$

$$V_n^0 = M_n^0 = 0 \quad (n=0, 1, 2 \dots N)$$

ii) 境界조건

보의 양단의 구속상태에 따라 다음과 같이 구분된다

自由端: $M_0^m = M_N^m = 0$

$$V_0^m = V_N^m = 0$$

固定端: $y_0^m = y_N^m = 0$

$$\gamma_0^m = \gamma_N^m = 0$$

單純支持端: $y_0^m = y_N^m = 0$

$$M_0^m = M_N^m = 0 \quad (m=0, 1, 2 \dots)$$

한편 시간적분을 수행하는 차분식에서 중요한 점은 적절한 크기의 시간간격을 사용하는 것인데, 시간간격이 충분히 작지 않다면 계산결과에 신빙성을 잃은 결과를 얻게 된다. Timoshenko보의 과도진동응답에 있어서 Polachek [8]는 수치계산의 安定性을 보장하는 식을 제시하였다. 이 부등식은 계산의 전과정에 걸쳐 성립해야 한다.

$$\Delta t \ll \frac{m}{c} \quad (10)$$

$$(\Delta t)^2 \leq \frac{m \cdot Imz(\Delta x)^2}{Imz(kAG) + m \cdot (EI) + \frac{1}{4}m \cdot (\Delta x)^2(kAG)} \quad (11)$$

이상과 같이 운동방정식과 함께 초기조건과 경계조건이 완전히 부여된다면 시간변화에 따른 보의 거동은 완전히 파악된다. 한편 Timoshenko보의 강제진동응답은 基準振動型중첩법에 의해 convolution integration으로 표현되는데 본 연구의 차분식 계산과 비교할 때, 한 가지 유의할 점을 찾을 수 있다. 즉 보의 양단이 자유-자유, 자유-단순지지인 경우, 기준진동형중첩법에서는 강제운동을 나타내는 zero mode와 first mode는 제외되나, 본 연구의 계산에서는 이들 강제운동의 mode가 포함된 결과가 얻어진다는 점이다.

3. 計算結果 및 考察

본 연구에서는 Fig. 2과 같은 규격을 가진 3개의 상자형보를 선택하여 충격하중에 의한 응답계산을 수행하였다. 이들 3개의 Model은 똑같은 길이를 갖는 대신 폭과 깊이의 치수를 점차 변화시켜서, Timoshenko 이론에 따른 전단처질의 영향을 알 수 있도록 하였다.

본 계산에 앞서서 회전관성과 전단처질의 효과를 고려하지 않은 Euler보 이론에 의한 충격응답을 정적처질의 계산결과와 비교하였다. Fig. 3에 의하면 Euler



	Model 1	Model 2	Model 3	Unit
L	8	8	8	M
B, D	0.3	0.2	0.4	M
t	0.01	0.04	0.02	M

Fig. 2 Model of box girder

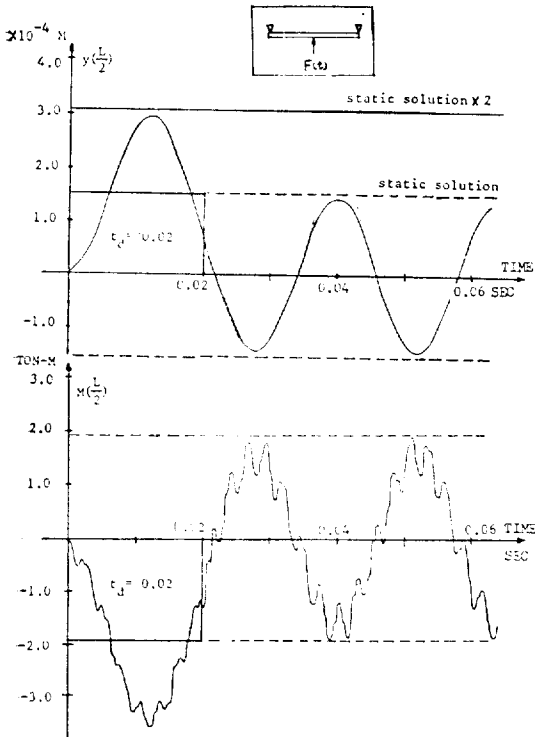


Fig. 3 Dynamic response of a Euler beam

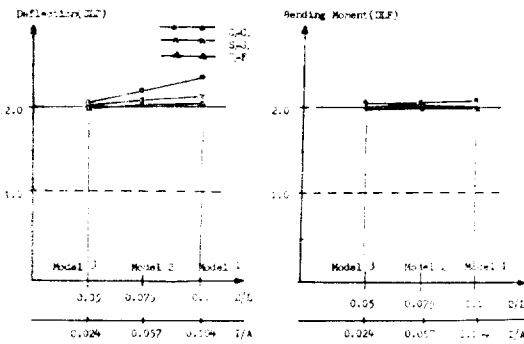


Fig. 4 Increase of dynamic responses vs. slenderness ratio (D/L)

보 이론에 의한 최대 충격응답은 경계조건에 따라 약간의 차이는 있지만 대체로 정적치점의 계산값의 2배보다 약간 작아지는 것을 알 수 있다. 회전관성과 전단치점의 효과를 포함시키는 경우에도, Euler보이론에 의한 충격응답의 결과와 유사하지만, 그 크기는 정적치점의 계산값에 비해 높게 나타나는데 특히 치점의 경우에서 현저하다. Fig. 4에 의하면 보의 細長比 D/L의 변화에 따른 치점의 증가는 비교적

Table 1. Effect of shear deformation

	Model A	Model B	Model C
B, D	0.8m	0.6m	0.4m
t	0.02m	0.028m	0.04m
L	8m	8m	8m
D/L	0.1	0.075	0.05
Theoretical $\frac{\delta_{shear}}{\delta_{bend}}$	11.3%	6.22%	2.63%
Authors $\frac{\delta_{shear}}{\delta_{bend}}$	10.5%	5.2%	1.6%

* I-Beam/simple-simple boundary conditions/concentration load at midspan

큰 데 비해 굽힘모멘트의 변화는 거의 없음을 알 수 있다. 한편 전단응력과 처짐의 관계식으로부터 순수히 전단력만에 의한 처짐의 기여도를 계산할 수 있는데, 그 결과를 Table 1에 수록하여 본 연구의 계산결과와 비교하였다.

3.1 충격하중의 시간에 따른 변화

충격하중의 시간적 변화가 보의 충격응답에 미치는 영향을 살펴보기 위해 Fig. 5와 같은 4가지 형태의 하중을 생각하여, 양단 단순지지의 Model 2 (Fig. 2)의 동적응답을 계산한 결과를 Fig. 6 (a)~(d)에 수록하였다. 이 결과에 의하면 보의 충격응답의 거동은 1차 유도체의 거동과 유사한 점이 있으나, Rising time이 zero인 Rectangular load와 Blast load에 있어서 처짐응답의 변화에 비해 굽힘모멘트의 변화에 매우 심한

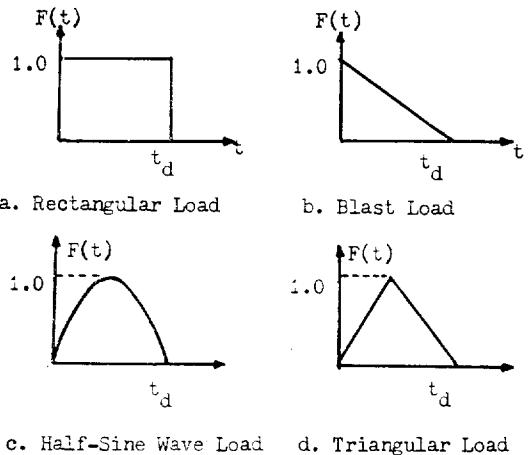


Fig. 5 Types of impact loads

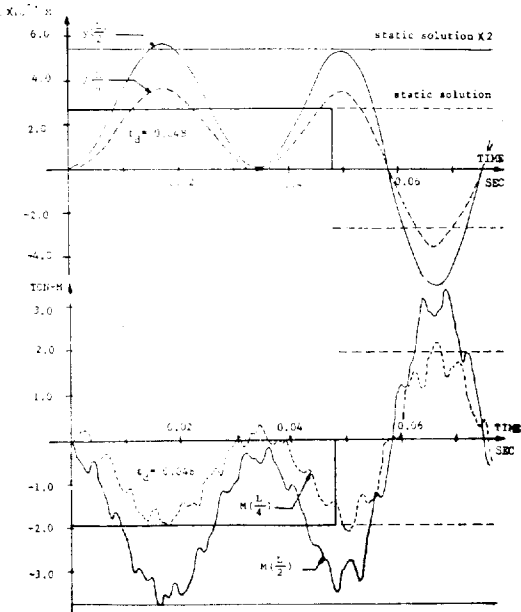


Fig. 6 (a) Dynamic response of a beam under rectangular load

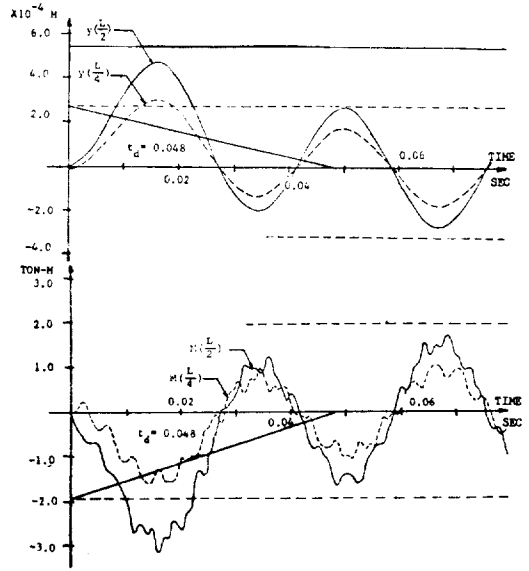


Fig. 6 (b) Dynamic response of a beam under blast load

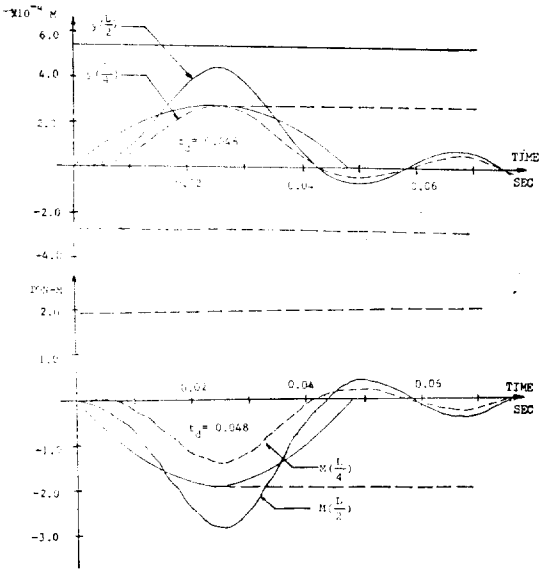


Fig. 6 (c) Dynamic response of a beam under sine wave load

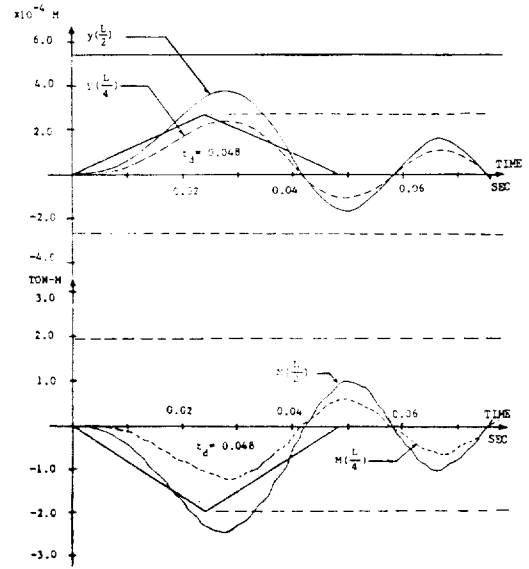


Fig. 6 (d) Dynamic response of a beam under triangular load

fluctuation이 나타나는 것을 볼 수 있다. 이렇게 처짐에 비해서 굽힘모멘트의 변동이 심한 원인은 $M=EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ 로 표시되므로 굽힘모멘트의 n 차 기준진동형의 기여도가 처짐의 n 차 기준진동형의 기여도에 비해 n^2 만큼 커지기 때문이다. 한편 Half-Sine Wave Load와

Triangular Load인 경우 굽힘모멘트의 fluctuation은 그다지 현저하지 않았다. 이는 충격하중이 a, b인 경우에는 c, d의 경우보다 high frequency component의 기진력을 갖고 있기 때문인 것으로 사료된다.

3.2 충격하중의 분포와 하중점의 위치에 따른 변화

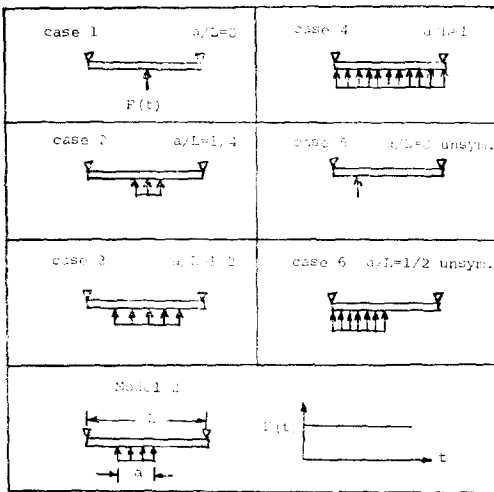


Fig. 7 Various types of loading on a beam

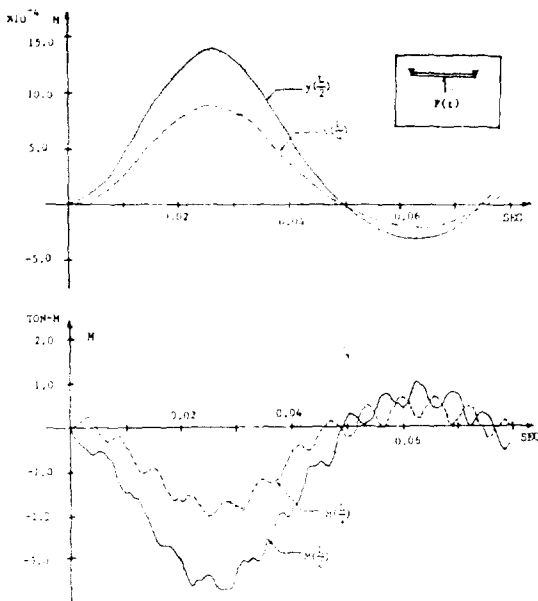


Fig. 8 Dynamic behavior of a simple beam ($a/L=0$)

충격하중의 분포와 하중점의 위치에 따른 보의 충격 응답변화를 살펴보기 위해 Fig. 7과 같은 6가지 경우의 하중을 생각하였다. 하중의 집중도는 분포하중이 가해진 길이 a 와 보의 전체길이 L 와의 비로써 표시하기로 한다. 각 경우에 대한 계산결과는 Fig. 8~13에 수록하였다. 이 결과에 의하면, 우선 하중의 집중도가 응답에 미치는 영향은 Fig. 8~11에서 알 수 있는데 $a/L=0$ 에 가까울수록 굽힘모멘트의 fluctuation이 심해

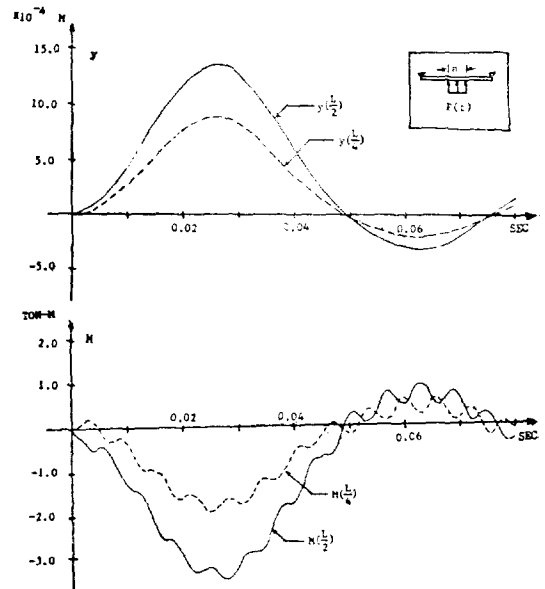


Fig. 9 Dynamic behavior of a simple beam ($a/L=1/4$)

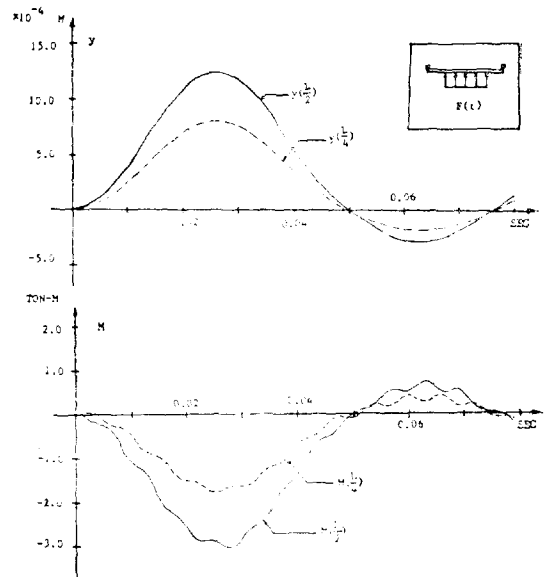


Fig. 10 Dynamic behavior of a simple beam ($a/L=1/2$)

지며, 반대로 $a/L=1$ 에 가까울수록 고차진동형의 기여도는 거의 사라져서 보의 응답은 기본진동형만으로 표시될 수 있다. 즉 하중의 집중도가 클수록 보의 응답은 기본진동형에서 멀어져감을 알 수 있다. 한편 동일한 조건에서 하중의 위치를 변화시켰을 때의 변화는

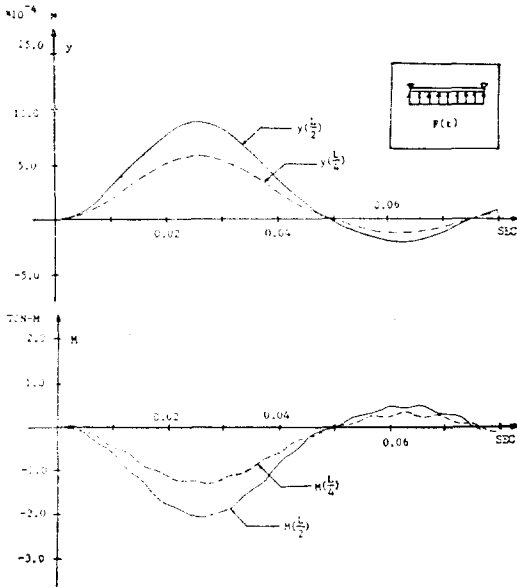


Fig. 11 Dynamic behavior of a simple beam ($a/L=1$)

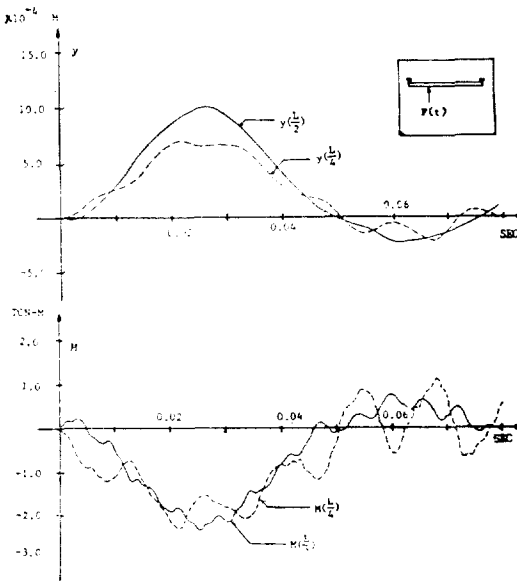


Fig. 12 Dynamic behavior of a simple beam (un-symmetric $a/L=0$)

Fig. 8과 12, Fig. 10과 13의 비교로써 확인할 수 있는데, 이에 의하면 비대칭하중의 경우 굽힘모멘트의 fluctuation이 더욱 현저해지고 있으며 진동형 역시 비대칭으로 나타나고 있다. 이 사실은 매 시각에 있어서의 진동형을 도시함으로써 명확히 알 수 있는데 Fig.

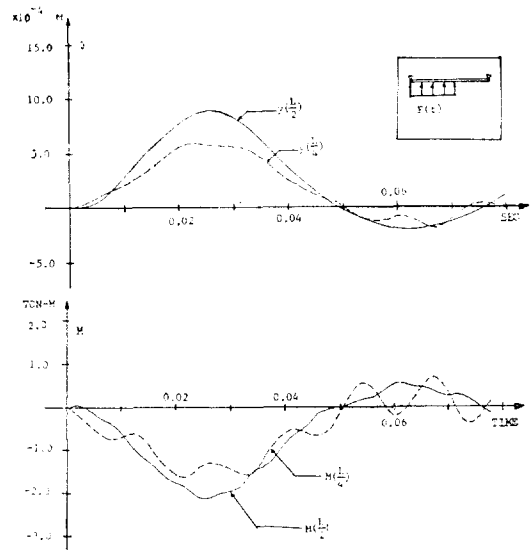


Fig. 13 Dynamic behavior of a simple beam (un-symmetric $a/L=1/2$)

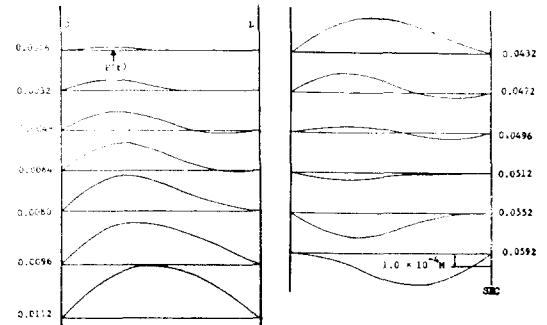


Fig. 14 Change of deflection modes

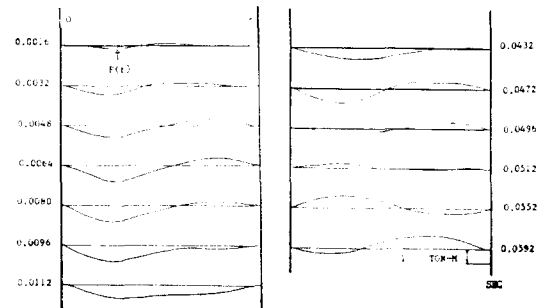


Fig. 15 Change of bending moment in the beam

14와 15에 그 결과를 수록하였다. 여기에도 기본진동형은 보이지 않고 비대칭의 파형을 보이고 있다.

3.3 실제문제에의 응용

변단면 Timoshenko보의 실제적인 예로서, Fig. 16에 보인 바와 같은 海洋構造物에 그림과 같이 理想化된 충격파랑하중이 작용하였을 때 이 구조물의 動的 應答의 결과를 Fig. 17에 나타내었다. 충격하중이 작용하는 순간에는 구조물의 처짐이나 굽힘모멘트의 발생이 극히 미미한 편이나 1.0~1.5sec 사이에 급격히 증가하여 최대치를 보임을 알 수 있다.

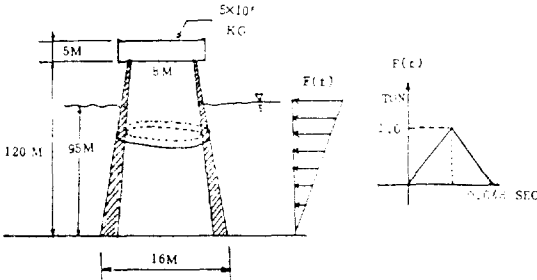


Fig. 16 Ocean structure

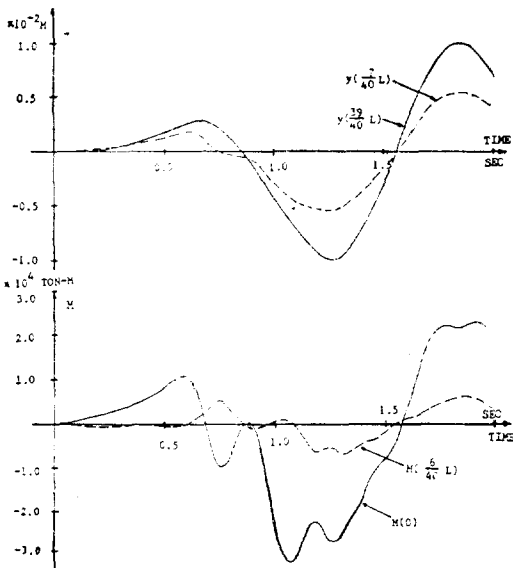


Fig. 17 Dynamic response of a ocean structure

4. 結 言

충격하중을 받는 구조물의 Stress 해석의 목적으로, 변단면 Timoshenko보의 동적응답을 等價離散系치환과 差分法에 의해 수치해석한 결과 다음과 같은 結論을 얻는다.

(1) 충격하중의 시간적 변화에 따른 보의 응답은 1

자유도계의 거동과 비슷하게 나타나지만, 하중의 지속 시간과 Rising time이 짧아질 수록 고차진동형의 기여도가 현저해진다.

(2) 하중의 집중도가 클수록(a/L→0) 보의 응답은 기본진동형에서 멀어져 굽힘모멘트의 fluctuation이 심해지며, 반대로 분포하중(a/L→1)에 가까울수록 보의 응답은 기본진동형에 유사한 거동을 나타낸다.

(3) 하중점의 위치가 비대칭적인 경우, 고차진동형의 기여도는 더욱 커지며 진동형 역시 비대칭적인 형상을 나타낸다.

(4) 충격하중의 최대값은 대개 처음의 1~2 cycle사이에서 나타나는데, 그 이후의 거동을 해석하기 위해서는 많은 계산량이 요구되므로, 현재 사용중인 시간 간격보다 좀 더 길게 잡을 수 있는 방법이 요구된다.

參 考 文 獻

- [1] "Transient Dynamic Loadings and Response," Proceedings of 8th I.S.S.C, Gdansk, 1982.
- [2] Jones, N., "Slamming Damage", Journal of Ship Research, Vol. 17, No. 2, 1973, pp.80-86.
- [3] Kawai, T. and Toi, Y., "A New Discrete Analysis on Dynamic Collapse of Structures," Journal of the Society of Naval Architects of Japan, Vol. 143, 1978, pp.257-263, Vol. 145, 1979, pp.112-119.
- [4] Borg, S.F., "The Analysis of Ship Structures subject to Slamming Loads", Journal of Ship Research, Vol. 4, No. 3, 1960, pp.11-27.
- [5] Bishop, R.E.D. and Price, W.G., "Hydroelasticity of Ships", Cambridge University Press, London, 1979.
- [6] Kim, K.C. et al., "An Investigation into the Mode Superposition Method for the Forced Vibration Analysis of Structures subject to the Timoshenko Beam Analogy", Journal of the Society of Naval Architects of Korea, Vol. 20, No. 1, 1983, pp.21-27.
- [7] McGoldrick, R.T., "Ship Vibration", DTMB report 1451, 1960.
- [8] Polachek, H., "Calculation of Transient Excitation of Ship Hulls by Finite Difference Methods", DTMB report 1120, 1957.
- [9] Biggs, J.M., "Introduction to Structural Dynamics", McGraw-Hill Co., New York, 1964.